Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(4), 669-675**
Published Online April 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.84075

Optimal Dividend Problem for the Compound Poisson Model with Investment Incomes and Debit Interest

Zejin Yang

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin
Email: 1315747481@qq.com

Received: Mar. 31st, 2019; accepted: Apr. 15th, 2019; published: Apr. 22nd, 2019

Abstract

In this paper, we consider the optimal dividend problem for the compound Poisson Model with Investment Incomes and Debit Interest. Ruin occurs when the reserve drops below the critical value. Our objective is to maximize the expected total discount dividends until ruin. We derive the associated measure-valued dynamic programming equation (DPE) by using the measure-valued generator theory.

Keywords

Optimal Dividend Problem, Absolute Ruin, Value Function, Measure-Valued DPE

复合泊松模型带投资和借贷的最优分红问题

杨泽晋

河北工业大学理学院，天津
Email: 1315747481@qq.com

收稿日期：2019年3月31日；录用日期：2019年4月15日；发布日期：2019年4月22日

摘　要

本文研究了复合泊松模型带投资和借贷的最优分红问题。当余额低于绝对破产限时，公司破产。我们的目的是最大化破产前的累积期望折现分红，我们运用测度值生成元理论得出了动态规划方程。

文章引用：杨泽晋. 复合泊松模型带投资和借贷的最优分红问题[J]. 应用数学进展, 2019, 8(4): 669-675.
DOI: 10.12677/aam.2019.84075

关键词

最优分红，绝对破产，值函数，测度值生成元

1. 引言

保险中的最优分红问题可以追溯到[1]。之后，这一领域的论文大量涌现。关于复合泊松模型的代表性文章有[2] [3] [4] [5] [6]。为了更贴近实际，我们考虑在此模型基础上加入投资和借贷，[7]运用了粘性解的方法研究了这个模型的最优分红问题，但是证明过程比较复杂。我们创新性地运用了测度值生成元的方法重新研究了这个模型。较之以前的方法，这个新方法证明过程更加简单，简化了推导过程。

我们研究分红问题的目的是找到最优分红策略使得破产前的累积期望折现分红最大化。我们运用测度值生成元的方法时，索赔额分布我们允许是任意的。我们首先要讨论值函数的性质，且对可行策略和马氏策略进行刻画，然后从马氏策略中推导出动态规划原理和动态规划方程。但是我们从可行策略中证明了验证定理。

文章结构如下：第二节详细阐述了该问题。第三节讨论值函数性质，刻画了马氏策略和可行策略。第四节得出了动态规划原理和方程。

2. 模型介绍

为了使我们优化问题的研究过程更加严谨，首先给出一赋予完备 σ -代数流的概率空间 $\left\{\Omega,\tilde{F},\left\{\tilde{F}_t\right\}_{\{t\geq 0\}},P\right\}$ 在不受控条件下，保险公司的盈余过程表示为：

$$\mathrm{d}R_t=\left(p+\gamma R_{t-}I_{\{R_{t-}\geq 0\}}+\beta R_{t-}I_{\{R_{t-}<0\}}\right)\mathrm{d}t-\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i\right),$$

其中 $p\geq 0$ 为保费收入率。$\{N(t)\}$ 服从强度为 λ 的泊松过程，索赔额序列 $\{Y_i\}$ 为一列独立同分布分严格正随机变量，其分布函数为 G，并且是与 $\{N(t)\}$ 独立的。$\gamma>0$ 为存款利率。$\beta(\beta>\gamma)$ 为借贷利率。当出现余额赤字时，进行借贷，并且贷款额等于赤字数。同时保险公司将连续地从保费收入中偿还贷款和贷款利息。

定义 τ_i，$i=1,2,\cdots$ 为第 i 次索赔到达的时刻，定义推移算子 $\{\theta_t\}_{t\geq 0}$，其满足

$$(\theta_s\omega)_t=\omega_{s+t},$$

其中 $\omega=\{\omega_t\}_{t\geq 0}\in\Omega,\mathrm{s},\mathrm{t}\geq 0$ 。

分红策略 $L=\{L_t\}_{t\geq 0}$ 是一过程，L_t 是从初始时刻到 t 时刻公司分给股东的累积分红。给定分红策略 L，则相对应的受控余额过程 R^L 为：

$$\mathrm{d}R_t^L=\left(p+\gamma R_{t-}^L I_{\{R_{t-}^L\geq 0\}}+\beta R_{t-}^L I_{\{R_{t-}^L<0\}}\right)\mathrm{d}t-\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i\right)-\mathrm{d}L_t \tag{1}$$

并且相对应的绝对破产时刻定义为：

$$\tau^L = \inf\left\{t \ge 0 : R_t^L < -\frac{p}{\beta}\right\}.$$

一个分红策略是可行的，如果：

1) $L_0 = 0$，L_t 是非降的，可料的，左连右极；

2) 等式(1)有唯一强解 R^L；

3) 对任意 $t \ge 0$，令 $g(x) = p + \gamma x I_{\{x\ge 0\}} + \beta x I_{\{X<0\}}$。

$$L_t < x + \int_0^t g\left(R_s^L\right)\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i + \frac{p}{\beta}，\ 且\ \Delta_+ L_t := L_{t+} - L_t < R_t^L + \frac{p}{\beta};$$

对任意 $x > -\frac{p}{\beta}$，我们定义 Π_x 为所有满足初始条件 $R_0 = x$ 的可行策略的集合。令 $\delta(\delta > \alpha)$ 是折现率。累积期望折现分红定义为：

$$V^L(x) = E_x\left[\int_0^{\tau^L} e^{-\delta s}\mathrm{d}L_s\right] = E_x\left[\int_0^{\tau^L} e^{-\delta s}\mathrm{d}L_s \middle| R_0 = x\right]$$

值函数为 $V(x) = \sup_{L\in\Pi_x} V^L(x)$，$x > -\frac{p}{\beta}$，特别地，我们规定当 $x \le -\frac{p}{\beta}$ 时，$V(x) = 0$。如果存在可行策略 L^* 满足 $V(x) = V^{L^*}(x)$ 时，则我们称 L^* 为最优分红策略。

3. 可行策略和马氏策略

在这一节我们将证明值函数的基本性质，并且刻画可行策略和马氏策略。

令 $\phi(x,t)$ 为从 x 出发，没有索赔发生时 R 的确定路径，即

$$\phi(x,t) = \begin{cases} \left(x + \frac{p}{\gamma}\right)e^{\gamma t} - \frac{p}{\gamma}, & t \ge 0, x \ge 0; \\ \frac{p}{\gamma}e^{\gamma(t-t_0)} - \frac{p}{\gamma}, & t \ge t_0, -\frac{p}{\beta} < x < 0; \\ \left(x + \frac{p}{\beta}\right)e^{\beta t}, & 0 \le t < t_0, -\frac{p}{\beta} < x < 0. \end{cases}$$

其中 $t_0 = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{p}{p+\beta x}\right)$。

命题 3.1：值函数 $V(x)$ 是非负的，非降的，在 $\left(-\frac{p}{\beta}, \infty\right)$ 上是局部 Lipschitz 连续的。若 $\alpha < \delta$，$x \in R$ 时，$V(x) \ge x + \frac{p}{\beta}$，并且 $x \ge 0$ 时，$V(x) \le \frac{\delta x + p}{\delta - \alpha} + \frac{p}{\beta}$。

证明：证明过程详见[7]的定理 3.1 和定理 3.2。证毕。

定义函数 $\alpha_x : R_+ \mapsto R_+$，其满足：

1) $\alpha_x(0) = 0$，$\alpha_x(\cdot)$ 是非降的，左连右极的；

2) 等式 $\phi^\alpha(x,t) = x + \int_0^t g\left(\phi^\alpha(x,s)\right)\mathrm{d}s - \alpha_x(t)$ 有唯一解 ϕ^α；

3) 对任意 $t \ge 0$，$x > -\frac{p}{\beta}$，有

$$\alpha_x(t) < x + \int_0^t g\left(\phi^\alpha(x,s)\right)\mathrm{d}s + \frac{p}{\beta}，\ 且\ \Delta_+\alpha_x(t) := \alpha_x(t+) - \alpha_x(t) < \phi^\alpha(x,t) + \frac{p}{\beta};$$

令 S_x 为所有满足上述条件的函数 α_x 的集合。

定理 3.2： 一个分红策略 L 是可行的当且仅当

$$L_t = L_{\tau_n} + \alpha_{R^L_{\tau_n}}\left(t-\tau_n\right), t\in\left[\tau_n,\tau_{n+1}\right), n=0,1,2,\cdots, \tag{2}$$

其中 $\tilde{F}_{\tau_n}\times\mathcal{B}\left(R_+\right)$-可测的。

证明： 若(2)式成立，我们显然可知分红策略 L 是可行的。所以我们只需证明必要性。由于 $\left\{\tilde{F}_t\right\}$ 是一个跳过滤(参考[8])，即

$$\tilde{F}_t = \tilde{F}_{\tau_n} \quad \text{a.s.} \quad t\in\left[\tau_n,\tau_{n+1}\right).$$

因此，存在 $\tilde{F}_{\tau_n}\times\mathcal{B}\left(R_+\right)$-可测函数 $\alpha_{R^L_{\tau_n}}$ 使得(2)式成立。由于 $L\in\Pi_x$，所以 $\alpha_{R^L_{\tau_n}}\in S_{R^L_{\tau_n}}$。证毕。

定义 3.3： 若受控余额过程 R^L 是强马氏过程，则称分红策略 $L\in\Pi_x$ 是马氏策略。若受控余额过程 R^L 是时齐的强马氏过程，则称分红策略 $L\in\Pi_x$，是平稳马氏策略。

令 U 为所有可测函数 l 的集合，其中可测函数 $l: R\times R_+\mapsto R_+$ 满足：

1) 对任意 $x>-\dfrac{p}{\beta}, \text{s,t}\geq 0, l\left(x,s+t\right)=l\left(x,s\right)+l\left(\phi^l\left(x,s\right),t\right)$，其中 ϕ^l 是等式

$$\phi^l\left(x,t\right)=x+\int_0^t g\left(\phi^l\left(x,s\right)\right)\mathrm{d}s-l\left(x,t\right)$$

的唯一解。

2) 对任意 $x>-\dfrac{p}{\beta}, l\left(x,\cdot\right)\in S_x$。

定理 3.4： 分红策略 $L\in\Pi_x$，是平稳马氏策略当且仅当存在可测函数 $l\in U$ 使得

$$L_t = L_{\tau_n} + l\left(R^L_{\tau_n}, t-\tau_n\right), t\in\left[\tau_n,\tau_{n+1}\right), n=0,1,2,\cdots, \tag{3}$$

证明： 首先证明必要性。由于 L 是一个平稳马氏控制策略，因此其对应的盈余过程 R^L 为是时齐的强马氏过程。进而可得

$$\begin{aligned} R^L_{s+t} &= R^L_t\circ\theta_s = R^L_s + \int_0^t g\left(R^L_{s+u}\right)\mathrm{d}u - \sum_{i=N(s)+1}^{N(s+t)} Y_i - L_t\circ\theta_s \\ &= x + \int_0^{s+t} g\left(R^L_u\right)\mathrm{d}u - \sum_{i=1}^{N(s+t)} Y_i - L_s - L_t\circ\theta_s, \end{aligned}$$

其中 θ_s 是一个推移算子。从(1)式，我们可得 $L_{t+s}=L_s+L_t\circ\theta_s$，因此由[9]的定义 4.1 可知 L 是余额过程 R^L 的可加泛函。从[9]的定理 3.9，我们可知存在一个可测函数 $l\in U$ 使得(3)式成立。

接下来，我们证明充分性。事实上 R^L 是一个三元特征为 $\left(\phi^l,F,q\right)$ 逐段决定马氏过程，其中 $\phi^l\left(x,t\right)$ 是两个索赔之间的确定的 R^L 轨道。其表述为

$$\phi^l\left(x,t\right)=x+\int_0^t g\left(\phi^l\left(x,u\right)\right)\mathrm{d}u-l\left(x,t\right)。$$

则

$$\begin{aligned} \phi^l\left(x,s+t\right) &= x+\int_0^{s+t} g\left(\phi^l\left(x,u\right)\right)\mathrm{d}u-l\left(x,s+t\right) \\ &= \phi^l\left(x,s\right)+\int_0^t g\left(\phi^l\left(x,s+u\right)\right)\mathrm{d}u-l\left(\phi^l\left(x,s\right),t\right), \end{aligned}$$

$$\phi^l\left(\phi^l\left(x,s\right),t\right)=\phi^l\left(x,s\right)+\int_0^t g\left(\phi^l\left(\phi^l\left(x,s\right),u\right)\right)\mathrm{d}u-l\left(\phi^l\left(x,s\right),t\right).$$

DOI: 10.12677/aam.2019.84075

然后定义两个函数

$$m(t)=\phi^{l}(x,s+t);\quad n(t)=\phi^{l}(\phi^{l}(x,s),t),$$

$m(0)=n(0)=\phi^{l}(x,s)$，m 和 n 都是方程

$$\psi(t)=\psi(0)+\int_0^t g(\psi(u))\mathrm{d}u-l(\psi(0),t)$$

的解。由于 $l(\psi(0),\cdot)\in S_{\psi(0)}$，所以这个方程有唯一解。进而可得，

$$\phi^{l}(x,s+t)=\phi^{l}(x,s)+\phi^{l}(\phi^{l}(x,s),t).$$

又由于

$$F(x,s)F(\phi^{l}(x,s),t)=e^{-\lambda s}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda(s+t)}=F(x,s+t).$$

$$q(\phi^{l}(x,s),t,dy)=dG(\phi^{l}(\phi^{l}(x,s),t)-y)=dG(\phi^{l}(x,s+t)-y)=q(x,s+t,y).$$

因此，R^{L} 是一个时齐的强马氏过程，L 是平稳马氏控制策略。

4. 动态规划原理和方程

引理 4.1：假定存在最优分红策略 $L^{*}\in\Pi_x$，并且其是平稳马氏策略，$l^{*}\in U$ 与之一一对应，则对任意 $x>-\dfrac{p}{\beta}$，$t\geq 0$，有

$$V(x)=\sup_{l\in U}E_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1}e^{-\delta s}l(x,\mathrm{d}s)+e^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(R_{t\wedge\tau_1}^{l}\right)\right].$$

证明：由于 $L^{*}\in\Pi_x$ 是最优分红策略，$l^{*}\in U$ 之对应，则

$$V(x)=V^{L^{*}}(x)=E_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1}e^{-\delta s}l^{*}(x,\mathrm{d}s)+e^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(R_{t\wedge\tau_1}^{l^{*}}\right)\right].\tag{4}$$

现在我们取 $l\in U$ 构造一个新的平稳马氏策略 $\hat{L}$，从 0 时刻到 $t\wedge\tau_1$，我们取 $\hat{L}=L$；$t\wedge\tau_1$ 之后取 $\hat{L}=L^{*}$. 则，我们可得

$$V(x)>V^{\hat{L}}(x)=E_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1}e^{-\delta s}l(x,\mathrm{d}s)+e^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(R_{t\wedge\tau_1}^{l}\right)\right].\tag{5}$$

综合(4)和(5)式，结论得证。证毕。

整理(5)式，可知

$$\begin{aligned}0&\geq E_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1}e^{-\delta s}l(x,\mathrm{d}s)+e^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(R_{t\wedge\tau_1}^{l}\right)\right]-V(x)\\&=e^{-\lambda t}\int_0^t e^{-\delta s}l(x,\mathrm{d}s)+e^{-(\lambda+\delta)t}V(\phi^{l}(x,t))-V(x)\\&\quad+\int_0^t\lambda e^{-\lambda s}\int_0^s e^{-\delta u}l(x,\mathrm{d}u)\mathrm{d}s\\&\quad+\int_0^t\lambda e^{-(\lambda+\delta)s}\int_{\left(0,\phi^{l}(x,s)+\frac{p}{\beta}\right)}V(\phi^{l}(x,s)-y)\mathrm{d}G(y)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}e^{-\lambda t}\int_0^t e^{-\delta s}l(x,\mathrm{d}s)&=\int_0^t\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}l(x,\mathrm{d}s)\\&\quad-\int_0^t\lambda e^{-\lambda s}\int_0^s e^{-\delta u}l(x,du)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

$$e^{-(\lambda+\delta)t}V\left(t^{l}\left(x,t\right)\right)-V\left(x\right)=\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\mathrm{d}V\left(\phi^{l}\left(x,s\right)\right)$$
$$-\left(\lambda+\delta\right)\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}V\left(\phi^{l}\left(x,s\right)\right)\mathrm{d}s.$$

则可得

$$0\geq\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}l\left(x,\mathrm{d}s\right)-\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\left[\left(\lambda+\delta\right)V\left(\phi^{l}\left(x,s\right)\right)+\lambda\int_{\left(0,\varphi^{l}(x,s)+\frac{p}{\beta}\right)}V\left(\phi^{l}\left(x,s\right)-y\right)\mathrm{d}G\left(y\right)\right]\mathrm{d}s$$
$$+\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\mathrm{d}V\left(\phi^{l}\left(x,s\right)\right). \tag{6}$$

令

$$H^{l}V\left(x,t\right):=l\left(x,t\right)-\int_{0}^{t}\left[\left(\lambda+\delta\right)V\left(\phi^{l}\left(x,s\right)\right)+\int_{\left(0,\varphi^{l}(x,s)+\frac{p}{\beta}\right)}V\left(\phi^{l}\left(x,s\right)-y\right)\mathrm{d}G\left(y\right)\right]\mathrm{d}s+\int_{0}^{t}\mathrm{d}V\left(\phi^{l}\left(x,s\right)\right).$$

对任意 $t>s\geq0$，则(6)式可被写为：

$$\begin{aligned}0&\geq\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}H^{l}V\left(x,\mathrm{d}s\right)\\&=\int_{0}^{s}\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)u}H^{l}V\left(x,\mathrm{d}s\right)+\int_{s}^{t}\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)u}H^{l}V\left(x,\mathrm{d}u\right)\end{aligned} \tag{7}$$

由于 $\phi^{l}\left(x,s+t\right)=\phi^{l}\left(x,s\right)+\phi^{l}\left(\phi^{l}\left(x,s\right),t\right)$ 和(7)式知

$$\int_{s}^{t}\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)u}H^{l}V\left(x,\mathrm{d}u\right)=\int_{0}^{t-s}e^{-(\lambda+\delta)(u+s)}H^{l}V\left(\phi^{l}\left(x,s\right)\mathrm{d}u\right)\leq0.$$

因此，上式左边这个函数关于 t 是非增的，又由于 $\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t}\geq0$， $t\geq0$。所以

$$H^{l}V\left(x,t\right)\leq0,\quad t\geq0,\quad x>-\frac{p}{\beta.}$$

另一方面，我们假定存在最优平稳马氏策略 L^{*}，其与函数 $l^{*}\in U$ 相对应。在(4)上运用相同的方法，可得

$$\sup_{l\in U}\left\{H^{l}V\left(x,t\right)\right\}=0,\quad t\geq0,\quad x>-\frac{p}{\beta.} \tag{8}$$

因此，综合上述两个式子，我们可知

$$\sup_{\alpha_{x}\in S_{x}}\left\{H^{\alpha}V\left(x,t\right)\right\}=0,\quad t\geq0,\quad x>-\frac{p}{\beta}. \tag{9}$$

这意味着

$$0=\sup_{\alpha_{x}\in S_{x}}\left\{\alpha_{x}\left(t\right)-\delta\int_{0}^{t}V\left(\phi^{\alpha}\left(x,s\right)\right)\mathrm{d}s+A^{\alpha}V\left(x,t\right)\right\}, \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}A^{\alpha}V\left(x,t\right)&=V\left(\phi^{\alpha}\left(x,t\right)\right)-V\left(x\right)-\lambda\int_{0}^{t}V\left(\phi^{\alpha}\left(x,s\right)\right)\mathrm{d}s\\&+\lambda\int_{0}^{t}\int_{\left(0,\varphi^{\alpha}(x,s)+\frac{p}{\beta}\right)}V\left(\phi^{\alpha}\left(x,s\right)-y\right)\mathrm{d}G\left(y\right)\mathrm{d}s\end{aligned}\text{。} \tag{11}$$

等式(10)为动态规划方程。

参考文献

[1] De Finetti, B. (1957) Su Unimpostazione alternative dell teoria collettiva del rischio. *Transactions of the XVth Interna-*

tional Congress of Actuaries, **2**, 433-443.

[2] Gerber, H.U. (1969) Entscheidungskriterien für den zusammengesetzten Poisson-Prozess. *Schweiz.Verein. Versicherungsmath. Mitt*, **69**, 185-228.

[3] Albrecher, H. and Thonhauser, S. (2008) Optimal Dividend Strategies for a Risk Process under Force of Interest. *Insurance Mathematics and Economics*, **43**, 134-149. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.03.012

[4] Albrecher, H. and Thonhauser, S. (2009) Optimality Results for Dividend Problems in Insurance. *RACSAM-Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas*, *Fisicas y Naturales*. *Serie A*. *Matematicas*, **103**, 295-320. https://doi.org/10.1007/BF03191909

[5] Avanzi B. (2009) Strategies for Dividend Distribution: A Review. *North American Actuarial Journal*, **13**, 217-251. https://doi.org/10.1080/10920277.2009.10597549

[6] Azcue, P. and Muler, N. (2005) Optimal Reinsurance and Dividend Distribution Policies in the Cramér-Lundberg Model. *Mathematical Finance*, **15**, 261-308. https://doi.org/10.1111/j.0960-1627.2005.00220.x

[7] Zhu, J. (2013) Optimal Dividend Control for a Generalized Risk Model with Investment Incomes and Debit Interest. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2013**, 140-162. https://doi.org/10.1080/03461238.2011.585771

[8] Jacod, J. and Skorokhod, A.V. (1996) Jumping Markov Processes, Annales. *De. L. Institut. Henri. Poincar. Probabilits. Et. Statistiques.*, **32**, 11-67.

[9] Liu, Z., Jiao, Y. and Liu, G. (2017) Measure-Valued Generators of General Piecewise Deterministic Markov Processes. arXiv:1704.00938