Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(4), 703-707
Published Online April 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.84080

Hans汉斯

Wiener Index of Transformation Graph G^{---}

Yanhua Zhao

College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang
Email: yhua030@163.com

Received: Apr. 3rd, 2019; accepted: Apr. 18th, 2019; published: Apr. 25th, 2019

Abstract

The transformation graph G^{---} of a graph G is the graph with vertex set $V(G)\cup E(G)$, in which two vertices u and v are joined by an edge if one of the following conditions holds: 1) $u,v\in V(G)$ and they are not adjacent in G, 2) $u,v\in E(G)$ and they are not adjacent in G, 3) one of u and v is in $V(G)$ while the other is in $E(G)$, and they are not incident in G. The Wiener index $W(G)$ of G is the sum of the distances between all pairs of vertices in G. In this note, for any graph G, we determine the Wiener index of G^{---}, when G^{---} is connected.

Keywords

Transformation Graph, Wiener Index

变换图G^{---}的Wiener指标

赵艳华

新疆大学，数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐
Email: yhua030@163.com

收稿日期：2019年4月3日；录用日期：2019年4月18日；发布日期：2019年4月25日

摘　要

图G的变换图G^{---}的顶点集为$V(G)\cup E(G)$，图G^{---}中任意两顶点$u,v\in V(G^{---})$只需满足下面任意一个条件便可以连边：1) $u,v\in V(G)$，它们在图G中不相邻，2) $u,v\in E(G)$，它们在图G中不相邻，3) $u\in V(G)$，$v\in E(G)$，它们在图G中不关联。图G的Wiener指标是图G中所有点对的距离之和。在本文中，我们确定了变换图G^{---}是连通图时的Wiener指标。

文章引用：赵艳华. 变换图 G^{---}的 Wiener 指标[J]. 应用数学进展, 2019, 8(4): 703-707.
DOI: 10.12677/aam.2019.84080

关键词

变换图，Wiener指标

1. 引言

本篇文章中所有的图都为无向的简单图。所用到的符号和术语参考文献[1]。设简单图 G 的顶点集为 $V(G)$，图 G 的边集为 $E(G)$。对于 $V(G)$ 中的任意顶点 v，我们记 $N_G(v)$ 为图 G 中所有和顶点 v 相邻的顶点的集合。称 $d_G(v)=|N_G(v)|$ 为顶点 v 的度数。

在一个连通图 G 中，用 $d_G(u,v)$ 表示 G 中任意两个顶点 u 和 v 之间的距离(两点之间最短路的长度)，图 G 的 Wiener 指标是指图 G 中所有顶点对的距离之和，即 $W(G)=\sum\limits_{u,v\in V(G)} d_G(u,v)$。在不引起歧义的情况下，我们把 $d_G(v)$，$d_G(u,v)$ 分别简记为 $d(v)$，$d(u,v)$。

这个概念最初是由 Harry Wiener 在 1947 年的文献[2]中提到的，之后作为一个重要的拓扑指标应用于化学研究中，用来研究分子的结构。后来 Entringer 等人在 1976 年文献[3]中首次引入到数学领域，引起许多数学家的兴趣。关于一些 Wiener 指标的化学应用和数学研究的调查可以参考文献[4]以及其中引用的参考资料。

吴和孟在文献[5]中给出了全变换图的基本性质。我们可以在文献[6] [7] [8]中查阅到变换图的更多结果。

在本文中，我们将根据吴和孟的结果确定连通的变换图 G^{---} 的 Wiener 指标。

2. 主要内容

2.1. 预备知识

在文献[5]中吴和孟给出了下面的结果。

定理 2.1.1：[5]如果图 G 既不是星图也不是三角形，则 $\operatorname{diam}(G^{---})\le 3$。

当图 G 是星图或者是三角形的时候，图 G^{---} 是不连通的。由定理 2.1.1 的证明过程可知，当 $u,v\in V(G)$ 时，$d(u,v)\le 3$；当 $u,v\in E(G)$ 时，$d(u,v)\le 2$；当 $u\in V(G),v\in E(G)$ 时，$d(u,v)\le 3$。而且当 $\operatorname{diam}(G^{---})=3$，我们有图 G 的结构(如图 1 所示)。

如图 1(1)中，在其变换图中距离是 3 的顶点对为 u,v；如图 1(2)中，在其变换图中距离是 3 的顶点对为 u,v、u,w、u,uv 及 u,uw；如图 1(3)中，在其变换图中距离是 3 的顶点对为 u,v、u,uv；如图 1(4)中，在其变换图中距离是 3 的顶点对为 u,v、u,uv 及 v,vu。

在本文，我们主要根据上面直径求变换图 G^{---} 的 Wiener 指标。

2.2. 直径小于等于 2

当顶点 u 和边 e 关联时，我们记为 $m_{ue}=1$，当边 e,f 相邻时记为 $m_{ef}=1$。否则，我们分别记为 $m_{uv}=0$，$m_{ef}=0$。

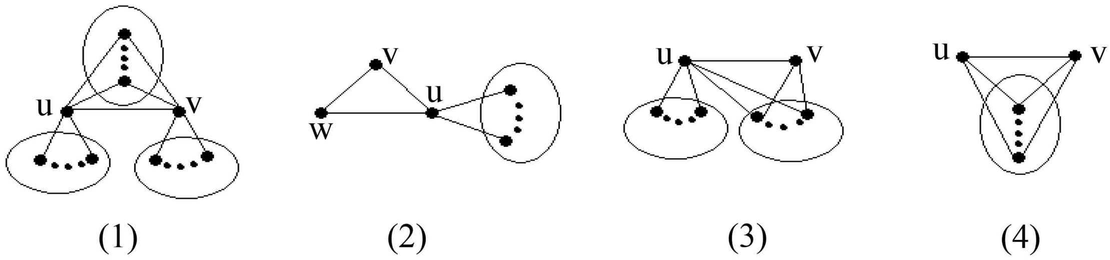

Figure 1. $\mathrm{diam}\left(G^{---}\right)=3$

图 1. $\mathrm{diam}\left(G^{---}\right)=3$

定理 2.2.1：如果图 G 的顶点的阶数为 n，边的阶数为 m，且 $\mathrm{diam}\left(G^{---}\right)\le 2$，则

$$W\left(G^{---}\right)=\frac{1}{2}\left(m^2+n^2+\sum_{v\in V(G)} d_G^2(v)\right)+mn+\frac{3}{2}m-\frac{1}{2}n.$$

证明：记 u,v 为图 G 中任意两个顶点，e,f 为图 G 中任意两条边，$V\left(G^{---}\right)=\{u_1,u_2,\cdots u_{m+n}\}$。在图 G 相邻边的个数为 $\sum_{v\in V(G)}\binom{d_G(v)}{2}$，又因为 $\mathrm{diam}\left(G^{---}\right)\le 2$，所以对于任意的点 $u_1,u_2\in V\left(G^{---}\right)$，$u_1$ 和 u_2 之间的距离为 1 或 2。因此，由 Wiener 指标的定义可知：

$$\begin{aligned}
W\left(G^{---}\right)&=\sum_{u,v} d_{G^{---}}(u,v)+\sum_{u,e} d_{G^{---}}(u,e)+\sum_{e,f} d_{G^{---}}(e,f)\\
&=\left(\sum_{uv\notin E(G)} d_{G^{---}}(u,v)+\sum_{uv\in E(G)} d_{G^{---}}(u,v)\right)+\left(\sum_{m_{ue}=0} d_{G^{---}}(u,e)+\sum_{m_{ue}=1} d_{G^{---}}(u,e)\right)\\
&\quad+\left(\sum_{m_{ef}=0} d_{G^{---}}(e,f)+\sum_{m_{ef}=1} d_{G^{---}}(e,f)\right)\\
&=\left(\binom{n}{2}-m+2m\right)+(mn-2m+4m)+\left(\binom{m}{2}-\sum_{v\in V(G)}\binom{d_G(v)}{2}+2\sum_{v\in V(G)}\binom{d_G(v)}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(m^2+n^2+\sum_{v\in V(G)} d_G^2(v)\right)+mn+\frac{3}{2}m-\frac{1}{2}n.
\end{aligned}$$

2.3. 直径等于 3

定理 2.3.1：如果图 G 的边数为 m，顶点数为 n，当 $\mathrm{diam}\left(G^{---}\right)=3$ 时，则具有图 1 四类图中的某一种结构，且对应的 Wiener 指标分别为

1) $W\left(G^{---}\right)=\frac{1}{2}\left(m^2+n^2+\sum_{v\in V(G)} d_G^2(v)\right)+mn+\frac{3}{2}m-\frac{1}{2}n+1$

2) $W\left(G^{---}\right)=\frac{1}{2}\left(m^2+n^2+\sum_{v\in V(G)} d_G^2(v)\right)+mn+\frac{3}{2}m-\frac{1}{2}n+4$

3) $W\left(G^{---}\right)=\frac{1}{2}\left(m^2+n^2+\sum_{v\in V(G)} d_G^2(v)\right)+mn+\frac{3}{2}m-\frac{1}{2}n+2$

4) $W\left(G^{---}\right)=\frac{1}{2}\left(m^2+n^2+\sum_{v\in V(G)} d_G^2(v)\right)+mn+\frac{3}{2}m-\frac{1}{2}n+3$

证明：首先由定理 2.1.1 的证明可以知道，直径可以达到 3 的变换图 G^{---} 的原图 G 的结构只有图 1 中四种结构。下面分别给出它们的 Wiener 指标。

对于图 1(1)，容易看出图 G^{---} 中距离是 3 的点对只有 u,v。从而

$$\begin{aligned}
W\left(G^{---}\right) &= \sum_{u,v} d_{G^{---}}(u,v) + \sum_{u,e} d_{G^{---}}(u,e) + \sum_{e,f} d_{G^{---}}(e,f) \\
&= \left(\sum_{uv\notin E(G)} d_{G^{---}}(u,v) + \sum_{uv\in E(G)} d_{G^{---}}(u,v)\right) + \left(\sum_{m_{ue}=0} d_{G^{---}}(u,e) + \sum_{m_{ue}=1} d_{G^{---}}(u,e)\right) \\
&\quad + \left(\sum_{m_{ef}=0} d_{G^{---}}(e,f) + \sum_{m_{ef}=1} d_{G^{---}}(e,f)\right) \\
&= \left(\binom{n}{2} - m + 2(m-1) + 3\right) + (mn - 2m + 4m) + \left(\binom{m}{2} - \sum_{v\in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} + 2\sum_{v\in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(m^2 + n^2 + \sum_{v\in V(G)} d_G^2(v)\right) + mn + \frac{3}{2}m - \frac{1}{2}n + 1.
\end{aligned}$$

对于图 1(2)，容易看出图 G^{---} 中距离是 3 的顶点对为 u,v； u,w； u,uv 及 u,uw。从而

$$\begin{aligned}
W\left(G^{---}\right) &= \sum_{u,v} d_{G^{---}}(u,v) + \sum_{u,e} d_{G^{---}}(u,e) + \sum_{e,f} d_{G^{---}}(e,f) = \left(\sum_{uv\notin E(G)} d_{G^{---}}(u,v) + \sum_{uv\in E(G)} d_{G^{---}}(u,v)\right) \\
&\quad + \left(\sum_{m_{ue}=0} d_{G^{---}}(u,e) + \sum_{m_{ue}=1} d_{G^{---}}(u,e)\right) + \left(\sum_{m_{ef}=0} d_{G^{---}}(e,f) + \sum_{m_{ef}=1} d_{G^{---}}(e,f)\right) \\
&= \left(\binom{n}{2} - m + 2(m-2) + 3\times 2\right) + \left(mn - 2m + 2(2m-2) + 3\times 2\right) \\
&\quad + \left(\binom{m}{2} - \sum_{v\in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} + 2\sum_{v\in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(m^2 + n^2 + \sum_{v\in V(G)} d_G^2(v)\right) + mn + \frac{3}{2}m - \frac{1}{2}n + 4.
\end{aligned}$$

对于图 1(3)，容易看出图 G^{---} 中距离是 3 的顶点对为 u,v 和 u,uv。从而

$$\begin{aligned}
W\left(G^{---}\right) &= \sum_{u,v} d_{G^{---}}(u,v) + \sum_{u,e} d_{G^{---}}(u,e) + \sum_{e,f} d_{G^{---}}(e,f) \\
&= \left(\sum_{uv\notin E(G)} d_{G^{---}}(u,v) + \sum_{uv\in E(G)} d_{G^{---}}(u,v)\right) \\
&\quad + \left(\sum_{m_{ue}=0} d_{G^{---}}(u,e) + \sum_{m_{ue}=1} d_{G^{---}}(u,e)\right) + \left(\sum_{m_{ef}=0} d_{G^{---}}(e,f) + \sum_{m_{ef}=1} d_{G^{---}}(e,f)\right) \\
&= \left(\binom{n}{2} - m + 2(m-1) + 3\right) + \left(mn - 2m + 2(2m-1) + 3\right) + \left(\binom{m}{2} - \sum_{v\in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} + 2\sum_{v\in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(m^2 + n^2 + \sum_{v\in V(G)} d_G^2(v)\right) + mn + \frac{3}{2}m - \frac{1}{2}n + 2.
\end{aligned}$$

对于图 1(4)，容易看出图 G^{---} 中距离是 3 的顶点对为 u,v； u,uv 及 v,vu。从而

$$
\begin{aligned}
W\left(G^{---}\right) &= \sum_{u,v} d_{G^{---}}(u,v) + \sum_{u,e} d_{G^{---}}(u,e) + \sum_{e,f} d_{G^{---}}(e,f) \\
&= \left(\sum_{uv \notin E(G)} d_{G^{---}}(u,v) + \sum_{uv \in E(G)} d_{G^{---}}(u,v) \right) + \left(\sum_{m_{ue}=0} d_{G^{---}}(u,e) + \sum_{m_{ue}=1} d_{G^{---}}(u,e) \right) \\
&\quad + \left(\sum_{m_{ef}=0} d_{G^{---}}(e,f) + \sum_{m_{ef}=1} d_{G^{---}}(e,f) \right) \\
&= \left(\binom{n}{2} - m + 2(m-1) + 3 \right) + \left(mn - 2m + 2(2m-2) + 3 \times 2 \right) + \left(\binom{m}{2} - \sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} + 2 \sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(m^2 + n^2 + \sum_{v \in V(G)} d_G^2(v) \right) + mn + \frac{3}{2}m - \frac{1}{2}n + 3.
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. American Elsevier, New York, Macmillan, London.

[2] Wiener, H. (1947) Structural Determination of Paraffin Boiling Point. *Journal of the American Chemical Society*, **69**, 17-20. https://doi.org/10.1021/ja01193a005

[3] Entringer, R.C., Jackson, D.E. and Snyder, D.A. (1976) Distance in Graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **26**, 283-296.

[4] Dobrynin, A., Entringer, R. and Gutman, I. (2001) Wiener Index of Trees: Theory and Applications. *Acta Applicandae Mathematica*, **66**, 211-249. https://doi.org/10.1023/A:1010767517079

[5] Wu, B. and Meng, J. (2001) Basic Properties of Total Transformation Graphs. *Journal of Mathematical Study*, **34**, 109-116.

[6] Wu, B., Zhang, L. and Zhang, Z. (2005) The Transformation Graph G^{xyz} When $xyz = -++$. *Discrete Mathematics*, **296**, 263-270.

[7] Chen, J. (2006) Super Edge-Connectivity of Two Classes of Transformation Graphs. Doctoral Thesis, Xinjiang University, Urumchi.

[8] Xu, L. and Wu, B. (2008) Transformation Graph G^{-+-}. *Discrete Mathematics*, **308**, 5144-5148.