Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(4), 650-656
Published Online April 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.84072

Boundedness in the Higher-Dimensional Chemotaxis-Growth System with Indirect Attractant Production

Qingquan Tang, Qiao Xin*

College of Mathematics and Statistics, Yili University, Yining Xinjiang
Email: 378540261@qq.com, *xinqiaoylsy@163.com

Received: Mar. 31st, 2019; accepted: Apr. 15th, 2019; published: Apr. 22nd, 2019

Abstract

This paper deals with the following Chemotaxis-growth system of the Mountain Pain Beetle with indirect attractant production:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla\cdot(u\nabla v) + \mu\left(u - u^2\right), & x\in\Omega, t>0, \\ v_t = \Delta v + w - v, & x\in\Omega, t>0, \\ \tau w_t + w = u, & x\in\Omega, t>0, \end{cases}$$

in a smoothly bounded domain $\Omega\subset\mathbb{R}^n\,(n\ge 3)$, τ is positive. The energy method and Moser iteration are used to prove that under any sufficiently smooth initial boundary conditions, when μ is large enough, the model has a unique global-in-time classical solution.

Keywords

Indirect Signal Production, Chemotaxis, Logistic Source, Boundedness

具有间接吸引信号产出的高维趋化增长系统解的有界性

唐清泉，辛　巧*

伊犁师范大学数学与统计分院，新疆 伊宁
Email: 378540261@qq.com, *xinqiaoylsy@163.com

收稿日期：2019年3月31日；录用日期：2019年4月15日；发布日期：2019年4月22日

*通讯作者。

文章引用：唐清泉，辛巧．具有间接吸引信号产出的高维趋化增长系统解的有界性[J]．应用数学进展，2019，8(4): 650-656. DOI: 10.12677/aam.2019.84072

摘　要

本文考虑一个具有间接信号产出的山松甲壳虫趋化增长系统：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla\cdot(u\nabla v) + \mu\left(u-u^2\right), & x\in\Omega, t>0, \\ v_t = \Delta v + w - v, & x\in\Omega, t>0, \\ \tau w_t + w = u, & x\in\Omega, t>0, \end{cases}$$

，其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n\ (n\ge 3)$ 是一个光滑有界区域，$\tau>0$。利用能量方法和Moser迭代证明了在任意充分光滑的初值边界条件下，当 μ 足够大，该模型有唯一的全局有界经典解。

关键词

间接信号产出，趋化性，Logistic源，有界性

1. 引言

本文考虑了具有间接信号产生的趋化增长模型：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla\cdot(u\nabla v) + \mu\left(u-u^2\right), & x\in\Omega, t>0, \\ v_t = \Delta v + w - v, & x\in\Omega, t>0, \\ \tau w_t + w = u, & x\in\Omega, t>0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), w(x,0)=w_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n\ (n\ge 3)$ 是一个光滑有界区域，$\tau>0$。$u=u(x,t)$ 表示飞行甲壳虫的密度，$v=v(x,t)$ 表示做窝甲壳虫释放的化学信号浓度，$w=w(x,t)$ 表示做窝甲壳虫的密度。山松甲壳虫的模型最早由 Strohm，Tyson 和 Powell [1]提出，该模型是为了研究山松甲壳虫的趋化行为。趋化行为是指由化学信号浓度梯度引起细胞的偏向运动，细胞偏向于朝化学信号浓度增加的地方移动[2] [3] [4]。著名的趋化模型是由 Keller-Segel 于 1970 年提出[5]，具体表示为：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla\cdot(u\nabla v), & x\in\Omega, t>0, \\ v_t = \Delta v - v + u, & x\in\Omega, t>0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个光滑有界区域，u 表示细胞密度；v 表示细胞产生的化学信号浓度。Keller-Segel 模型中的化学信号是由细胞直接产出的，不同于 Keller-Segel 模型的是模型(1.1)飞行的甲壳虫在松树上做窝产卵变为做窝的甲壳虫产出[6]。

当 $n=3$，$\mu>0$ 时，Hu 和 Tao 在文献[7]中证明了模型解的全局有界性。本文证明了 $n\geq 3$，$\mu>\delta_2+C(p)(2\delta_1+\varepsilon)$ 时，模型(1.1)解的全局有界性，其中 δ_1，δ_2，$C(p)$ 满足(3.7)，(3.11)，(3.9)。当 $n\geq 2$ 时，Li 和 Tao [8]研究了 logistic 源为 $u-u^{\alpha}$ 时的情况，系数满足 $\alpha>n/2$ 时模型解的全局有界性，维数 $n\geq 4$ 时，显然 $\alpha>2$，而本文 $\alpha=2$ 优于其结果。在 Hu 和 Tao 研究的基础上，Qiu，Mu 和 Wang [9]将飞行甲壳虫的随机扩散项 Δu 用非线性函数 $D(u)$ 来描述，考虑扩散系数 $D(u)$ 对模型的影响，当 $n\geq 3$ 时，假设扩散系数 $D(u)>D_0u^{\theta}$ 得到 $\theta>1-4/n$ 时模型解的全局有界性。而当 $n\geq 4$ 时，本文 $\theta=0$ 优于其结果。当 $n\geq 1$ 时，Zheng 在文献[10]中假设扩散系数 $D(u)\geq C_D(u+1)^{m-1}$ 得到 $m>\begin{cases}1-\dfrac{\mu}{\chi\left[1+\lambda_0\|v_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}2^3\right]} & n\leq 2,\\ 1 & n\geq 3,\end{cases}$ 时模型解的全局有界性。但是本文 $n\geq 3$ 时 $m=1$ 是文献[10]的一个临界情况。

本文在证明解的全局有界性时，先建立 $\int_{\Omega}u^2(\cdot,t)\mathrm{d}x$ 和 $\|v(\cdot,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)}\leq C$ 一致先验估计，再建立飞行甲壳虫 u 的 $L^p(\Omega)$ 一致估计，再由 Moser 迭代推得 u 的 $L^{\infty}(\Omega)$ 一致有界性，进而根据抛物型方程 Neumann 边值问题的正则性理论推得 v 和 w 的一致有界性。具体地说，有以下结果。

定理 1： $n\geq 3$，假设 $u_0\in C^0(\bar{\Omega})$，$v_0\in C^1(\bar{\Omega})$，$w_0\in C^1(\bar{\Omega})$，$u_0\geq 0$，$v_0\geq 0$，$w_0\geq 0$ 和 $u_0\not\equiv 0$。存在唯一的非负函数 (u,v,w)：

$$
\begin{aligned}
&u\in C^0\left(\bar{\Omega}\times[0,T_{\max})\right)\cap C^{2,1}\left(\bar{\Omega}\times(0,T_{\max})\right),\\
&v\in C^0\left(\bar{\Omega}\times[0,T_{\max})\right)\cap C^{2,1}\left(\bar{\Omega}\times(0,T_{\max})\right),\\
&w\in C^{0,1}\left(\bar{\Omega}\times[0,T_{\max})\right),
\end{aligned}
$$

在 $\Omega\times(0,\infty)$ 是模型(1.1)的经典解。特别的，存在一个常数 $C>0$，使得

$$u(x,t)\leq C,\quad v(x,t)\leq C \text{ 和 } w(x,t)\leq C, x\in\Omega,\quad t>0。$$

2. 先验估计

为了证明定理 1 结果，首先介绍两个基本引理用于主要结论的证明。

引理 1： 假设 $n\geq 3$，$p>\max\left\{1,\dfrac{n-2}{2}\right\}$，则存在正常数 k_0 使得

$$\|\nabla v\|_{L^{2p+2}(\Omega)}^{2p+2}\leq k_0\left(\left\||\nabla v|^{p-1}D^2v\right\|_{L^2(\Omega)}^2+1\right)。$$

证明： 在文献[10]中的引理 2.7 中有详细的证明过程。

要证明模型(1.1)的解全局有界，关键要建立 $\int_{\Omega}u^2(\cdot,t)\mathrm{d}x$ 和 $\|v(\cdot,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)}\leq C$ 的一致先验估计。

引理 2： 假设 $n\geq 3$，对于任意 $t\in(0,T_{\max})$，存在正常数 $C>0$，使得模型(1.1)的解 (u,v,w) 满足

$$\int_{\Omega}u(\cdot,t)\mathrm{d}x\leq C,\quad \|v(\cdot,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)}\leq C \text{ 和 } \int_{\Omega}u^2(\cdot,t)\mathrm{d}x\leq C。$$

证明： Hu 和 Tao 在文献[7]中的引理 2.2 和引理 4.4 中证明了 $\int_{\Omega}u(\cdot,t)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{\Omega}u^2(\cdot,t)\mathrm{d}x$ 的有界性。由 $\int_{\Omega}u^2(\cdot,t)\mathrm{d}x$ 的有界性可以得到 $\int_{\Omega}w^2(\cdot,t)\mathrm{d}x\leq C$，从而利用 Horstmann 和 Winkler 在文献[11]中的引理 4.1 得到 $\|v(\cdot,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)}\leq C$，其中 $q<\dfrac{2n}{n-2}$。

3. 主要结论的证明

根据引理 2 中的先验估计，我们下面利用引理 1 和 Young 不等式来估计 u 的 $L^p(\Omega)$，∇v 的 $L^{2p}(\Omega)$ 和

w 的 $L^{p+1}(\Omega)$ 的有界性。

引理 3： 设 $p>\max\left\{1,\frac{n-2}{2}\right\}$，若 μ 足够大，则对于任意的 $t\in(0,T_{\max})$，存在正常数 $C:=C(p,|\Omega|,\mu)$ 使得趋化模型(1.1)的解 (u,v,w) 满足

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p\le C,\quad \|\nabla v\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p}\le C \text{ 和 } \|w\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1}\le C。$$

证明：第一步： 对于任意的 $t\in(0,T_{\max})$，利用 $\nabla v\cdot\nabla(\Delta v)=\frac{1}{2}\Delta|\nabla v|^2-|D^2v|^2$ 和趋化模型(1.1)的第二个方程，经过简单的直接计算可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla v\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p}&=\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}\nabla v\cdot\nabla v_t\mathrm{d}x=\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}\nabla v\cdot\nabla(\Delta v-v+w)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}\Delta|\nabla v|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}|D^2v|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega|\nabla v|^{2p}\mathrm{d}x-\int_\Omega w\nabla\cdot\left(|\nabla v|^{2p-2}\nabla v\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{2(p-1)}{p^2}\int_\Omega\left|\nabla|\nabla v|^p\right|^2\mathrm{d}x+\underbrace{\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla v|^{2p-2}\frac{\partial|\nabla v|^2}{\partial n}\mathrm{d}x}_{I}-\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}|D^2v|^2\mathrm{d}x\\&\quad-\int_\Omega|\nabla v|^{2p}\mathrm{d}x-\underbrace{\int_\Omega w\nabla v\cdot\nabla\left(|\nabla v|^{2p-2}\right)\mathrm{d}x}_{II}-\underbrace{\int_\Omega w|\nabla v|^{2p-2}\Delta v\mathrm{d}x}_{III}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

对于等式(3.1)中的 I 项，取 $r\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，则由 $W^{r+\frac{1}{2},2}(\Omega)$ 紧嵌入在 $L^2(\partial\Omega)$ 可得

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla v|^{2p-2}\frac{\partial|\nabla v|^2}{\partial n}\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}C_\Omega\left\||\nabla v|^p\right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2\le C_1\left\||\nabla v|^p\right\|_{W^{r+\frac{1}{2},2}(\Omega)}^2,\tag{3.2}$$

进一步，通过 Gagliardo-Nirenberg 不等式和 $|\nabla v|^2$ 的有界性，则存在 $a\in(0,1)$ 使得

$$\left\||\nabla v|^p\right\|_{W^{r+\frac{1}{2},2}(\Omega)}^2\le C_2\left\||\nabla v|^p\right\|_{L^2(\Omega)}^a+C_3\le\frac{p-1}{C_1p^2}\int_\Omega\left|\nabla|\nabla v|^p\right|^2\mathrm{d}x+C_4,$$

联合不等式(3.2)可得

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla v|^{2p-2}\frac{\partial|\nabla v|^2}{\partial n}\mathrm{d}x\le\frac{p-1}{p^2}\int_\Omega\left|\nabla|\nabla v|^p\right|^2\mathrm{d}x+C。\tag{3.3}$$

此外，对于等式(3.1)中的 II 项，利用 Young 不等式可知

$$\begin{aligned}-\int_\Omega w\nabla v\cdot\nabla\left(|\nabla v|^{2p-2}\right)\mathrm{d}x&=-(p-1)\int_\Omega w|\nabla v|^{2(p-2)}\nabla v\cdot\nabla|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\\&\le\frac{p-1}{4}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}\left|\nabla|\nabla v|^2\right|^2dx+(p-1)\int_\Omega w^2|\nabla v|^{2p-2}\mathrm{d}x\\&\le\frac{p-1}{p^2}\int_\Omega\left|\nabla|\nabla v|^p\right|^2\mathrm{d}x+(p-1)\int_\Omega w^2|\nabla v|^{2p-2}\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{3.4}$$

另一方面，对于等式(3.1)中的 III 项，利用估计 $|\Delta v|\le\sqrt{n}|D^2v|$ 和 Young 不等式可得

$$-\int_\Omega w|\nabla v|^{2p-2}\Delta v\mathrm{d}x\le\sqrt{n}\int_\Omega w|\nabla v|^{2p-2}|D^2v|\mathrm{d}x\le\frac{1}{4}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}|D^2v|^2\mathrm{d}x+n\int_\Omega w^2|\nabla v|^{2p-2}\mathrm{d}x。\tag{3.5}$$

最后，利用 Young 不等式和引理 1 可得

$$\int_\Omega w^2|\nabla v|^{2p-2}\mathrm{d}x \le \frac{1}{4(n+p-1)k_0}\int_\Omega|\nabla v|^{2p+2}\mathrm{d}x+\frac{2}{p+1}\left(\frac{4(n+p-1)(p-1)k_0}{p+1}\right)^{\frac{p-1}{2}}\int_\Omega w^{p+1}\mathrm{d}x$$
$$\le \frac{1}{4(n+p-1)}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}\left|D^2v\right|^2\mathrm{d}x+\delta_1\int_\Omega w^{p+1}\mathrm{d}x+C, \tag{3.6}$$

联合不等式(3.1)和(3.3)~(3.6)可得

$$\frac{1}{2p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla v\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p}+\int_\Omega|\nabla v|^{2p}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}\left|D^2v\right|^2\mathrm{d}x\le\delta_1\int_\Omega w^{p+1}\mathrm{d}x+C, \tag{3.7}$$

其中 $\delta_1=2^pk_0^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{n+p-1}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{2}}$。

第二步：为了处理不等式(3.7)右端的项 $\delta_1\int_\Omega w^{p+1}\mathrm{d}x$，对趋化模型(1.1)的第三个方程乘以 w^p 并在 Ω 上进行积分并利用 Young 不等式可得

$$\frac{\tau}{p+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1}+\int_\Omega w^{p+1}\mathrm{d}x=\int_\Omega uw^p\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\int_\Omega w^{p+1}\mathrm{d}x+C(p)\int_\Omega u^{p+1}\mathrm{d}x\text{，} \tag{3.8}$$

即

$$\frac{\tau}{p+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1}+\frac{1}{2}\int_\Omega w^{p+1}\mathrm{d}x\le C(p)\int_\Omega u^{p+1}\mathrm{d}x\text{。} \tag{3.9}$$

其中 $C(p)=\frac{1}{p+1}\left(\frac{p+1}{2p}\right)^{-p}$。

第三步：为了处理不等式(3.9)右端的项 $\int_\Omega u^{p+1}\mathrm{d}x$，对趋化模型(1.1)的第一个方程乘 u^{p-1} 并在 Ω 上进行积分可得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^p(\Omega)}^p+(p-1)\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x=-\int_\Omega\nabla\cdot(u\nabla v)u^{p-1}\mathrm{d}x+\mu\int_\Omega u^p\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega u^{p+1}\mathrm{d}x. \tag{3.10}$$

对于等式(3.10)右端的第一项，应用 Young 不等式和引理 1 可得

$$-\int_\Omega\nabla\cdot(u\nabla v)u^{p-1}\mathrm{d}x=(p-1)\int_\Omega u^{p-1}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\le(p-1)\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{(p-1)}{4}\int_\Omega u^p|\nabla v|^2\mathrm{d}x$$
$$\le(p-1)\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2k_0}\int_\Omega|\nabla v|^{2p+2}\mathrm{d}x+\delta_2\int_\Omega u^{p+1}\mathrm{d}x$$
$$\le(p-1)\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}\left|D^2v\right|^2\mathrm{d}x+\delta_2\int_\Omega u^{p+1}\mathrm{d}x+C,$$

其中 $\delta_2=\frac{pk_0^p(p-1)^{p+1}}{2^{p+2}(p+1)^{p+1}}$。进而可得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^p(\Omega)}^p+\frac{1}{p}\|u\|_{L^p(\Omega)}^p\le\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}\left|D^2v\right|^2\mathrm{d}x+\left(\mu+\frac{1}{p}\right)\int_\Omega u^p\mathrm{d}x-(\mu-\delta_2)\int_\Omega u^{p+1}\mathrm{d}x+C. \tag{3.11}$$

现在，由(3.7) + (3.9) $\times(2\delta_1+\varepsilon)$ + (3.11)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2p}\|\nabla v\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p}+\frac{\tau(2\delta_1+\varepsilon)}{p+1}\|w\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1}+\frac{1}{p}\|u\|_{L^p(\Omega)}^p\right]+\int_\Omega|\nabla v|^{2p}\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega w^{p+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{p}\|u\|_{L^p(\Omega)}^p$$
$$\le\left(\mu+\frac{1}{p}\right)\int_\Omega u^p\mathrm{d}x-\left[\mu-\delta_2-C(p)(2\delta_1+\varepsilon)\right]\int_\Omega u^{p+1}\mathrm{d}x+C,$$

其中 ε 是任意给定的小常数。若 $\mu-\delta_2-C(p)(2\delta_1+\varepsilon)>0$，则利用 Young 不等式和 Gronwall 不等式可得

$$\|\nabla v\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p}\le C，\ \|w\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1}\le C \text{ 和 } \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p}\le C。$$

事实上，若引理 3 中的 $p\ge n-1$，则由抛物型方程 Neumann 边值问题的正则性理论[12]可得如下结论。

引理 4： 设 (u,v,w) 是趋化模型(1.1)的解，若 μ 足够大，那么对于任意的 $t\in(0,T_{\max})$，都存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C。$$

在引理 3 和引理 4 的基础上，我们有如下的结论。

引理 5： 若 $u_0\in C^0(\bar{\Omega})$，$v_0\in C^1(\bar{\Omega})$ 和 $w_0\in L_\infty(\bar{\Omega})$ 是非负的，若 μ 足够大，那么对于任意的存在 $t\in(0,\infty]$，存在常数 $C>0$，使得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C \text{ 和 } \|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C。$$

证明： 对于任意的 $p>1$，对趋化模型(1.1)的第一个方程两边同时乘 u^{p-1} 并在 Ω 进行积分，然后借助于 Young 不等式和引理 4，容易得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^p(\Omega)}^p+(p-1)\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x &\le (p-1)\int_\Omega u^{p-1}|\nabla u||\nabla v|\mathrm{d}x+\mu\int_\Omega u^{p-1}(u-u^2)\mathrm{d}x\\
&\le C\int_\Omega u^{p-1}|\nabla u|\mathrm{d}x+\mu\int_\Omega u^{p-1}(u-u^2)\mathrm{d}x\le\frac{p-1}{4}\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\\
&\quad +C\int_\Omega u^p\mathrm{d}x+\mu\int_\Omega u^{p-1}(u-u^2)\mathrm{d}x\\
&\le\frac{p-1}{4}\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+C\int_\Omega u^p\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega u^{p+1}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

这样利用 Young 不等式可得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^p(\Omega)}^p+\frac{1}{p}\int_\Omega u^p\mathrm{d}x+\frac{p-1}{p^2}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{p}{2}}\right|^2\mathrm{d}x\le C，$$

进一步利用 Gronwall 不等式可得证

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}\le C。$$

那么在引理 4 和引理 5 的基础上，运用标准的 Alikakos-Moser 迭代[13]可得证

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C。$$

最后利用趋化模型(1.1)第三个一阶线性常微分方程的解，显然可得

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C。$$

从而定理 1 得证。

注 1： 本文在 μ 足够大的条件下证明了方程解的全局有界性，事实上，若 Logistic 源项变为 $\mu u-\mu u^\alpha$，从引理 3 的证明可以看出，当 $\alpha>2$ 时，对任意 $\mu>0$ 趋化模型的解全局存在，证明过程只需要简单修改即可。

基金项目

自治区青年科技创新人才培养项目“偏微分方程理论及其在图像处理中的应用”(2017Q081)。

参考文献

[1] Strohm, S., Tyson, R.C. and Powell, J.A. (2013) Pattern Formation in a Model for Mountain Pine Beetle Dispersal: Linking Model Predictions to Data. *Bulletin of Mathematical Biology*, **75**, 1778-1797. https://doi.org/10.1007/s11538-013-9868-8

[2] Calvez, V. and Perthame, B. (2006) A Lyapunov Function for a Two-Chemical Species Version of the Chemotaxis Model. *BIT Numerical Mathematics*, **46**, 85-97. https://doi.org/10.1007/s10543-006-0086-8

[3] Dillon, R., Maini, P.K. and Othmer, H.G. (1994) Pattern Formation in Generalised Turing systems I. Steady-State Patterns in Systerms with Mixed Boundary Conditions. *Journal of Mathematical Biology*, **32**, 345-393. https://doi.org/10.1007/BF00160165

[4] Tuval, I., Cisneros, L., Dombrowski, C., Wolgemuth, C.W., Kessler, J.O. and Goldstein, R.E. (2005) Bacterial Swimming and Oxygen Transport near Contact Lines. *Proceedings of National Academy of Science of the United States of America*, **102**, 2277-2282. https://doi.org/10.1073/pnas.0406724102

[5] Keller, E.F. and Segel, L.A. (1970) Initation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability. *Journal of Theoretical Biology*, **26**, 399-415. https://doi.org/10.1016/0022-5193(70)90092-5

[6] Parnter, K.J. (2009) Continuous Models for Cell Migration in Tissues and Applications to Cell Sorting via Differential Chemotaxis. *Bulletin of Mathematical Biology*, **71**, 1117-1147. https://doi.org/10.1007/s11538-009-9396-8

[7] Hu, B.R. and Tao, Y.S. (2016) To the Exclusion of Blow-Up in a Three-Dimensional Chemotaxis-Growth Model with Indirect Attraction Production. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **26**, 2111-2128. https://doi.org/10.1142/S0218202516400091

[8] Li, H.Y. and Tao, Y.S. (2017) Boundedness in a Chemotaxis System with Indirect Singal Production and Generalized Logistic Source. *Applied Mathematics Letters*, **77**, 108-113. https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.10.006

[9] Qiu, S.Y., Mu, C.L. and Wang, L.C. (2018) Boundedness in the Higher-Dimensional Quasilinear Chemotaxis-Growth System with Indirect Attractant Production. *Computers & Mathematics with Applications*, **75**, 3213-3223. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.01.042

[10] Zheng, J. (2018) Global Solvability and Boundedness in the N-Dimensional Quasilinear Chemotaxis Model with Logistic Source and Consumption of Chemoattractant.

[11] Dirk, H. and Winkler, M. (2005) Boundedness vs. Blow-Up in a Chemotaxis System. *Journal of Differential Equations*, **215**, 52-107. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.10.022

[12] Ladyzenskaja, O.A. (1968) Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. In: *Translations of Mathematical Monographs*, 23.

[13] Alikakos, N.D. (1979) L^p Bounds of Solutions of Reaction-Diffusion Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, **4**, 827-868. https://doi.org/10.1080/03605307908820113