Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(4), 731-746**
Published Online April 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.84083

Hans汉斯

Formation of Singularities for Quasilinear Hyperbolic Systems with Characteristic with Constant Multiplicity

Mengjie Zhang, Yumei Xu

School of Math Sciences, Qufu Normal University, Qufu Shandong
Email: 892557638@qq.com

Received: Apr. 3rd, 2019; accepted: Apr. 18th, 2019; published: Apr. 25th, 2019

Abstract

The problem which we research on is inhomogeneous quasilinear hyperbolic systems with characteristics with constant multiplicity, where the source term satisfied the corresponding matching condition. And we don't restrict the condition that the characteristics with multiplicity are weakly linearly degenerate. Next, we shall investigate the global existence or the blow-up phenomenon of C^1 solutions to the Cauchy problem with weaker decaying initial data and estimate the life-span of C^1 solutions.

Keywords

First Order Quasilinear Hyperbolic Equations, Cauchy Problem, Formation of Singularities, Matching Condition, Life-Span

具常重特征的拟线性双曲组的经典解的奇性形成

张孟洁，徐玉梅

曲阜师范大学数学科学学院，山东 曲阜
Email: 892557638@qq.com

收稿日期：2019年4月3日；录用日期：2019年4月18日；发布日期：2019年4月25日

摘 要

文章研究的是带有非齐次项的且具常重特征的拟线性双曲组，其中源项满足相应的匹配条件。不加重特

文章引用: 张孟洁, 徐玉梅. 具常重特征的拟线性双曲组的经典解的奇性形成[J]. 应用数学进展, 2019, 8(4): 731-746.
DOI: 10.12677/aam.2019.84083

征是线性退化的限制，考虑具有一定衰减性的初值Cauchy问题的C^1解的整体存在性及破裂现象并估计出解的生命跨度。

关键词

一阶拟线性双曲方程组，Cauchy问题，奇性形成，匹配条件，生命跨度

1. 引言及主要结果

考虑下面的一阶拟线性双曲组

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(u)\frac{\partial u}{\partial x}=F(u), \tag{1.1}$$

其中 $u=(u_1,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 是变量 (t,x) 的未知向量函数，而 $A(u)=(a_{ij}(u))(i,j=1,\cdots,n)$ 是元素适当光滑的 $n\times n$ 矩阵，非齐次项 $F(u)=(F_1(u),\cdots,F_n(u))^{\mathrm{T}}$ 是元素适当光滑的向量函数。由双曲性可知，对所考虑范围上任一给定的 u 值，$A(u)$ 有 n 个实的特征值 $\lambda_1(u),\cdots\lambda_n(u)$ 和一个完备的左(右)特征向量组。对于 $i=1,\cdots,n$，令 $l_i(u)=(l_{i1}(u),\cdots,l_{in}(u))$ (相应地，$r_i(u)=(r_{i1}(u),\cdots,r_{in}(u))^{\mathrm{T}}$)是对应于 $\lambda_i(u)$ 的左(相应地，右)特征向量：

$$l_i(u)A(u)=\lambda_i(u)l_i(u)\quad \left(\text{相应地}, A(u)r_i(u)=\lambda_i(u)r_i(u)\right)$$

有

$$\det\left|l_{ij}(u)\right|\neq 0\quad \left(\text{等价地}, \det\left|r_{ij}(u)\right|\neq 0\right).$$

不失一般性，假设在所考虑的范围上

$$l_i(u)r_j(u)\equiv\delta_{ij},\quad (i,j=1,\cdots,n), \tag{1.2}$$
$$r_i^{\mathrm{T}}(u)r_i(u)\equiv 1,\quad (i=1,\cdots,n),$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号。

在方程组是严格双曲的假设下，早期利用弱线性退化的概念，李大潜、周忆和孔德兴在[1] [2]中，对方程组(1.1)具一定衰减性的小 C^1 初值的 Cauchy 问题给出了 C^1 解的整体存在性和破裂现象的结果。之后，这些结果又被推广到具有常重特征的非严格双曲组的情况([3]及[4])，这里所有的常重特征均为或均假设为线性退化的。其后，王利彬在不加重特征是线性退化的限制下，对具有一定衰减性的小 C^1 初值的 Cauchy 问题解决了 C^1 解的破裂问题([5])。本文在王利彬的基础上，将齐次项改为非齐次项 $F(u)$，考虑当 $F(u)\in C^3$ 且满足匹配条件时，对上面的 Cauchy 问题，其 C^1 解在有限时间内的奇性形成问题。

在本文中，对于具常重特征的双曲组(1.1)恒假设所有 $\lambda_i(u),l_{ij}(u)$ 及 $r_{ij}(u)(i,j=1,\cdots,n)$ 均与 $a_{ij}(u)(i,j=1,\cdots,n)$ 有同样的正规性。

不失一般性，设在 $u=0$ 的某个邻域内成立

$$\lambda(u)=\lambda_1(u)\equiv\cdots\equiv\lambda_p(u)<\lambda_{p+1}(u)<\cdots<\lambda_n(u), \tag{1.3}$$

其中 $1\le p\le n$。当 $p=1$ 时，方程组(1.1)是严格双曲的；当 $p>1$ 时，方程组(1.1)是具常重特征 $p(>1)$ 的非

严格双曲组。

为了简练，本文不再赘述弱线性退化，标准坐标和匹配条件的概念(看[6])。

考虑方程组(1.1)具如下初值

$$u(0,x)=\varepsilon\psi(x) \tag{1.4}$$

的 Cauchy 问题，其中 $\varepsilon>0$ 是一个小参数。本文的主要结果是：

定理 1.1： 设方程组(1.1)是非严格双曲组，(1.3)式成立，且在 $u=0$ 的某个邻域中，A 是适当光滑的，进一步假设 $F\in C^3$ 满足匹配条件且系统(1.1)不是弱线性退化的，且

$$\alpha=\min\{\alpha_i \mid i\in J\}<+\infty,$$

其中 α_i 的定义见[2]。最后假设 $\psi\in C^1$ 且满足

$$\sup_{x\in R}\left\{(1+|x|)^{\mu}\left(|\psi(x)|+|\psi'(x)|\right)\right\}<+\infty, \tag{1.5}$$

其中 $\dfrac{\alpha^2+(2+\rho)\alpha+\rho+1}{\alpha^2+(2+\rho)\alpha+\rho+2\rho}<\mu<1$。$\rho\in(1,2)$ 是一个常数，令

$$J_1=\{i \mid i\in J,\alpha_i=\alpha\},$$

如果存在 $m\in J_1$，使得

$$l_m(0)\psi(x)\not\equiv 0,$$

那么一定存在适当小的 $\varepsilon_0>0$，使得对任意给定的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$，Cauchy 问题(1.1)和(1.4)的 C^1 解 $u=u(t,x)$ 的一阶偏导数 u_x 必在有限时间内破裂且生命跨度 $\tilde{T}(\varepsilon)$ 满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{1+\alpha}\tilde{T}(\varepsilon)=M_0,$$

其中

$$M_0=\left\{\max_{i\in J_1}\sup_{x\in R}\left(-\frac{1}{\alpha!}\frac{\mathrm{d}^{\alpha+1}\lambda_i\left(u^{(i)}(s)\right)}{\mathrm{d}s^{\alpha+1}}\bigg|_{s=0}\left(l_i(0)\psi(x)\right)^{\alpha}l_i(0)\psi'(x)\right)\right\}^{-1}. \tag{1.6}$$

$u=u^{(i)}(s)$ 的定义见[2]。

2. 预备知识

令

$$w_i=l_i(u)u_x,\quad (i=1,\cdots,n). \tag{2.1}$$

由(1.2)易知

$$u_x=\sum_{k=1}^{n}w_k r_k(u). \tag{2.2}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_i t}=\frac{\partial}{\partial t}+\lambda_i(u)\frac{\partial}{\partial x}$$

表示沿第 i 特征关于 t 的方向导数，有(参见[6])

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}_i t}=\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_i\left(u\right)-\lambda_k\left(u\right)\right)w_k r_k+F\left(u\right)\quad\left(i=1,\cdots,n\right),$$

然后，在广义的标准坐标下，易得

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}_i t}=\sum_{j,k=1}^{n}\left(\rho_{ijk}\left(u\right)u_j w_k+f_{ijk}\left(u\right)u_j u_k\right)\quad\left(i=1,\cdots,n\right),\tag{2.3}$$

其中

$$\rho_{ijk}\left(u\right)=\left(\lambda_k\left(u\right)-\lambda_i\left(u\right)\right)\left(1-\delta_{jk}\right)\int_0^1\frac{\partial r_{ki}}{\partial u_j}\left(\tau u_1,\cdots,\tau u_{k-1},u_k,\tau u_{k+1},\cdots,\tau u_n\right)\mathrm{d}\tau,$$

$$f_{ijk}\left(u\right)=\left(1-\delta_{ij}\right)\int_0^1\theta_k\left(\tau\right)\int_0^1\frac{\partial^2 F_i\left(\sigma\tau u_1,\cdots,\sigma\tau u_{i-1},\sigma u_i,\sigma\tau u_{i+1},\cdots,\sigma\tau u_n\right)}{\partial u_j\partial u_k}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau,$$

$$\theta_k\left(\tau\right)=\begin{cases}\tau, & k\neq i,\\ 1, & k=i.\end{cases}$$

显然

$$\rho_{ijj}\left(u\right)\equiv 0,\quad\forall i,j,\tag{2.4}$$

$$\rho_{ijk}\left(u\right)\equiv 0,\quad\forall i,k\in\left\{1,\cdots,p\right\},\forall j,\tag{2.5}$$

$$f_{iik}\left(u\right)\equiv 0,\quad\forall i,k.\tag{2.6}$$

而且，由(2.2)和(2.3)，有

$$\mathrm{d}\left[u_i\left(\mathrm{d}x-\lambda_i\left(u\right)\mathrm{d}t\right)\right]=\sum_{j,k=1}^{n}\left(F_{ijk}\left(u\right)u_j w_k+f_{ijk}\left(u\right)u_j u_k\right)\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x,$$

其中

$$F_{ijk}\left(u\right)=\rho_{ijk}\left(u\right)+\nabla\lambda_j\left(u\right)r_k\left(u\right)\delta_{ij}.\tag{2.7}$$

另一方面，有

$$\frac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}_i t}=\sum_{j,k=1}^{n}\left(Q_{ijk}\left(u\right)u_k w_j+\gamma_{ijk}\left(u\right)w_j w_k\right)\quad\left(i=1,\cdots,n\right),\tag{2.8}$$

其中

$$Q_{ijk}\left(u\right)=\left(1-\delta_{jk}\right)\int_0^1\frac{\partial\tilde{v}_{ij}}{\partial u_k}\left(\tau u_1,\cdots,\tau u_{j-1},u_j,\tau u_{j+1},\cdots,\tau u_n\right)\mathrm{d}\tau,$$

$$\gamma_{ijk}\left(u\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(\lambda_j\left(u\right)-\lambda_k\left(u\right)\right)l_i\left(u\right)\nabla r_k\left(u\right)r_j\left(u\right)-\nabla\lambda_k\left(u\right)r_j\left(u\right)\delta_{ik}+\left(j\,|\,k\right)\right\},$$

其中$\left(j\,|\,k\right)$表示在前面各项中交换j与k后所得的项。

$$\tilde{v}_{ij}\left(u\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(-l_i\left(u\right)\nabla r_j\left(u\right)F\left(u\right)\right)+l_i\left(u\right)\nabla F\left(u\right)r_j\left(u\right).\tag{2.9}$$

因此，

$$Q_{ijj}\left(u\right)\equiv 0,\quad\forall i,j,\tag{2.10}$$

$$\gamma_{ijj}\left(u\right)\equiv 0,\quad\forall j\neq i\quad\left(i,j=1,\cdots,n\right),\tag{2.11}$$

$$\gamma_{ijk}(u) \equiv 0, \quad \forall j,k \in \{1,\cdots,p\}, i \in \{p+1,\cdots,n\}, \tag{2.12}$$

$$\gamma_{iii}(u) = -\nabla\lambda_i(u) r_i(u) \quad (i=1,\cdots,n). \tag{2.13}$$

而且，由(2.2)和(2.8)，有

$$\mathrm{d}\left[w_i\left(\mathrm{d}x - \lambda_i(u)\mathrm{d}t\right)\right] = \sum_{j,k=1}^{n}\left(Q_{ijk}(u)u_k w_j + \Gamma_{ijk}(u) w_j w_k\right)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x, \quad (i=1,\cdots,n),$$

其中

$$\Gamma_{ijk}(u) = \gamma_{ijk}(u) + \nabla\lambda_i(u) r_k(u)\delta_{ij}.$$

再由(1.3)有

$$\Gamma_{ijk}(u) \equiv 0, \quad \forall j,k \in \{1,\cdots,p\}, i \in \{p+1,\cdots,n\}.$$

在标准坐标下，初始条件(1.4)可以写作(参见[2])

$$u(0,x) = \varepsilon\Psi(x,\varepsilon), \tag{2.14}$$

其中

$$\Psi(x,\varepsilon) = L(0)\psi(x) + O(\varepsilon), \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial\Psi(x,\varepsilon)}{\partial x} = L(0)\psi'(x) + O(\varepsilon). \tag{2.16}$$

而且，根据[7]中的注 2.4.1 可以选取一个适当的标准坐标，使得

$$r_i(u_i e_i) \equiv e_i, \quad \forall |u_i| \text{小} \quad (i=1,\cdots,n).$$

因此，有

$$R(0) = L(0) = I.$$

接下来，将给出本文所要用到的两个重要引理(证明见[8]或[9])。

引理 2.1：假设 $w = w(t)$ 是常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = a_0(t)w^2 + a_1(t)w + a_2(t), \tag{2.17}$$

在区间 $[0,T]$ 上的 C^1 解，其中 T 是给定的正数，$a_i(i=0,1,2)$ 是 $[0,T]$ 上的连续函数，且

$$a_0(t) \ge 0, \quad \forall t \in [0,T],$$

令

$$K = \int_0^T |a_2(t)| \exp\left(-\int_0^t a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t. \tag{2.18}$$

如果

$$w_0 > K,$$

那么

$$\int_0^T a_0(t)\exp\left(\int_0^t a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t < (w_0 - K)^{-1}.$$

引理 2.2：假设 $a_i(i=0,1,2)$ 是 $[0,T]$ 上的连续函数，令

$$a_0^{\pm}(t)=\max\{\pm a_0(t),0\},$$

且 K 如(2.18)所定义。如果

$$w_0\ge 0,$$

且有

$$\int_0^T a_0^+(t)\exp\left(\int_0^t a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t<(w_0+K)^{-1},$$

$$\int_0^T a_0^-(t)\exp\left(\int_0^t a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t<K^{-1},$$

那么(2.17)连同初值 $w(0)=w_0$ 在 $[0,T]$ 上有唯一的解 $w=w(t)$。

且如果 $w(T)>0$，则

$$(w(T))^{-1}\ge(w_0+K)^{-1}-\int_0^T a_0^+(t)\exp\left(\int_0^t a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t.$$

如果 $w(T)<0$，则

$$|w(T)|^{-1}\ge K^{-1}-\int_0^T a_0^-(t)\exp\left(\int_0^t a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t.$$

3. 定理 1.1 的证明

不失一般性，定理 1.1 的证明将在标准化坐标下进行，且与[2]中类似，可以假设

$$0<\lambda(0)=\lambda_1(0)=\cdots=\lambda_p(0)<\lambda_{p+1}(0)<\cdots<\lambda_n(0). \tag{3.1}$$

由(1.3)知，存在适当小的正常数 δ 及 δ_0，使得

$$\lambda_{p+1}(u)-\lambda_i(v)\ge 4\delta_0,\quad \forall|u|,|v|\le\delta,\quad (i=1,\cdots,p), \tag{3.2}$$

$$\lambda_{j+1}(u)-\lambda_j(v)\ge 4\delta_0,\quad \forall|u|,|v|\le\delta,\quad (j=p+1,\cdots,n-1), \tag{3.3}$$

$$|\lambda_i(u)-\lambda_i(v)|\le\frac{\delta_0}{2},\quad \forall|u|,|v|\le\delta,\quad (i=1,\cdots,n). \tag{3.4}$$

先假设在 C^1 解 $u=u(t,x)$ 的任一存在域上，恒成立

$$|u(t,x)|\le\delta. \tag{3.5}$$

在引理 3.3 的证明最后，将解释此假设的合理性。对任意给定的 $T>0$，令

$$D_+^T=\{(t,x)\,|\,0\le t\le T,x\ge(\lambda_n(0)+\delta_0)t\},$$

$$D_-^T=\{(t,x)\,|\,0\le t\le T,x\le -t\},$$

$$D_0^T=\{(t,x)\,|\,0\le t\le T,-t\le x\le(\lambda(0)-\delta)t\},$$

$$D^T=\{(t,x)\,|\,0\le t\le T,(\lambda(0)-\delta_0)t\le x\le(\lambda_n(0)+\delta_0)t\}.$$

对 $i=1,\cdots,n$，令

$$D_i^T=\{(t,x)\,|\,0\le t\le T,-[\delta_0+\eta(\lambda_i(0)-\lambda(0))]t\le x-\lambda_i(0)t\le[\delta_0+\eta(\lambda_n(0)-\lambda_i(0))]t\}.$$

由(3.1)~(3.3)，当 $\eta>0$ 适当小时，有

$$D_1^T=D_2^T=\cdots=D_p^T,$$

$$D_i^T \cap D_j^T = \varnothing, \quad \forall i, j \in \{1, p+1, \cdots, n\},$$

$$D_1^T \cup \bigcup_{i=p+1}^{n} D_i^T \subset D^T.$$

令

$$U\left(D_\pm^T\right) = \max_{i=1,\cdots,n} \left\| (1+|x|)^\mu u_i(t,x) \right\|_{L^\infty\left(D_\pm^T\right)},$$

$$U\left(D_0^T\right) = \max_{i=1,\cdots,n} \left\| (1+|t|)^\mu u_i(t,x) \right\|_{L^\infty\left(D_0^T\right)},$$

$$W\left(D_\pm^T\right) = \max_{i=1,\cdots,n} \left\| (1+|x|)^\mu w_i(t,x) \right\|_{L^\infty\left(D_\pm^T\right)},$$

$$W\left(D_0^T\right) = \max_{i=1,\cdots,n} \left\| (1+|t|)^\mu w_i(t,x) \right\|_{L^\infty\left(D_0^T\right)},$$

$$U_\infty^c(T) = \max_{i=1,\cdots,n} \sup_{(t,x)\in D^T \setminus D_i^T} \left\{ \left(1+\left|x-\lambda_i(0)t\right|\right)^\mu \left|u_i(t,x)\right| \right\},$$

$$W_\infty^c(T) = \max_{i=1,\cdots,n} \sup_{(t,x)\in D^T \setminus D_i^T} \left\{ \left(1+\left|x-\lambda_i(0)t\right|\right)^\mu \left|w_i(t,x)\right| \right\},$$

$$U_1(T) = \max_{i=1,\cdots,n} \sup_{0\le t\le T} \int_{D_i^T(t)} \left|u_i(t,x)\right| \mathrm{d}x,$$

$$W_1(T) = \max_{i=1,\cdots,n} \sup_{0\le t\le T} \int_{D_i^T(t)} \left|w_i(t,x)\right| \mathrm{d}x,$$

其中

$$D_i^T(t) = \left\{ (\tau,x) \mid \tau = t, (\tau,x) \in D_i^T \right\}.$$

$$\tilde{U}_1(T) = \max\left\{ \max_{i=1,\cdots,p} \max_{j\in\{p+1,\cdots,n\}} \sup_{\tilde{C}_j} \int_{\tilde{C}_j} \left|u_i(t,x)\right| \mathrm{d}t, \max_{i=p+1,\cdots,n} \max_{j\ne i} \sup_{\tilde{C}_j} \int_{\tilde{C}_j} \left|u_i(t,x)\right| \mathrm{d}t \right\},$$

$$\tilde{W}_1(T) = \max\left\{ \max_{i=1,\cdots,p} \max_{j\in\{p+1,\cdots,n\}} \sup_{\tilde{C}_j} \int_{\tilde{C}_j} \left|w_i(t,x)\right| \mathrm{d}t, \max_{i=p+1,\cdots,n} \max_{j\ne i} \sup_{\tilde{C}_j} \int_{\tilde{C}_j} \left|w_i(t,x)\right| \mathrm{d}t \right\},$$

其中 $\tilde{C}_j$ 表示在 D_i^T 上的任一第 j 特征。

$$U_\infty(T) = \max_{i=1,\cdots,n} \sup_{\substack{0\le t\le T \\ x\in R}} \left|u_i(t,x)\right|,$$

$$W_\infty(T) = \max_{i=1,\cdots,n} \sup_{\substack{0\le t\le T \\ x\in R}} \left|w_i(t,x)\right|.$$

由 D_i^T 及 D^T 的定义容易得到(参见[2])。

引理 3.1：对于 $i = 1,\cdots,n$，在区域 $D^T \setminus D_i^T$ 上成立

$$ct \le \left|x-\lambda_i(0)t\right| \le Ct,$$

$$cx \le \left|x-\lambda_i(0)t\right| \le Cx,$$

其中 c 和 C 是不依赖于 T 的正常数。

引理 3.2：假设(3.1)成立，$\psi \in C^1$，满足(1.5)，且在 $u = 0$ 的一个邻域内，$A \in C^2$。那么一定存在适

当小的 $\varepsilon_0>0$，使得对于任意给定的 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$，对于 Cauchy 问题(1.1)及(1.4)的 C^1 解 $u=u(t,x)$，在其任一给定的存在区域 $0\le t\le T$ (其中 $T\varepsilon^{2+\alpha}\le 1$)上，存在不依赖于 ε 及 T 的正常数 κ_1 和 κ_2 使得下面的一致先验估计式成立：

$$U\left(D_{\pm}^T\right),W\left(D_{\pm}^T\right)\le\kappa_1\varepsilon,$$

$$U\left(D_0^T\right),W\left(D_0^T\right)\le\kappa_2\varepsilon.$$

引理 3.3：在定理 1.1 的假设下，在标准坐标下，一定存在适当小的 $\varepsilon_0>0$，使得对于任意给定的 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$，对 Cauchy 问题(1.1)和(1.4)的 C^1 解 $u=u(t,x)$，在其任一给定的存在区域 $0\le t\le T$ 上，存在不依赖于 ε 及 T 的正常数 $\kappa_i\ (i=3,4,5,6,7,8)$ 使得下面的一致先验估计式成立：

$$W_\infty^c(T)\le\kappa_3\varepsilon, \tag{3.6}$$

$$\tilde{W}_1(T),W_1(T)\le\kappa_4\varepsilon^\gamma, \tag{3.7}$$

$$U_\infty^c(T)\le\kappa_5\varepsilon, \tag{3.8}$$

$$U_\infty(T)\le\kappa_6\varepsilon^\gamma, \tag{3.9}$$

$$\tilde{U}_1(T),U_1(T)\le\kappa_7\varepsilon^\tau+\kappa_8\varepsilon^{\gamma(2+\alpha)}T, \tag{3.10}$$

其中

$$\gamma=(2+\alpha)\mu-(1+\alpha)>0,$$

$$\tau=1+\gamma(\rho+\alpha)(\mu-1),\quad \rho\in(1,2),$$

而且

$$T\varepsilon^{\gamma(1+\alpha)}\le 1, \tag{3.11}$$

$$W_\infty(T)\le\kappa_9\varepsilon. \tag{3.12}$$

证明：先估计 $\tilde{W}_1(T)$。在 D_i^T 上任作一条第 j 特征 $\tilde{C}_j: x=x_j(t)$ 交 D_i^T 的边界于点 P_1 与点 P_2 (当 $i\in\{1,\cdots,p\}$ 时，$j\in\{p+1,\cdots,n\}$；当 $i\in\{p+1,\cdots,n\}$ 时，$j\ne i$)。过原点作第 i 特征交 $\tilde{C}_j$ 于点 P_0。设点 P_1,P_2 及 P_0 的 t 坐标分别为 t_1,t_2 及 $t_0\ (0\le t_1,t_0,t_2\le T)$。过 P_1 作第 i 特征交直线 $x=(\lambda(0)-\delta_0)t$ 于点 $A_1(\bar{t}_1,\bar{y}_1)$，过 P_2 作第 i 特征交直线 $x=(\lambda_n(0)+\delta_0)t$ 于点 $A_2(\bar{t}_2,\bar{y}_2)$。有

$$\int_{\tilde{C}_j}\left|w_i(t,x)\right|\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_0}\left|w_i\left(t,x_j(t)\right)\right|\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_2}\left|w_i\left(t,x_j(t)\right)\right|\mathrm{d}t.$$

为了估计 $\int_{t_1}^{t_0}\left|w_i\left(t,x_j(t)\right)\right|\mathrm{d}t$，在区域 $\mathrm{P_1A_1OP_0}$ 上用 Stokes 公式，就得到

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_0}\left|w_i\left(t,x_j(t)\right)\left(\lambda_j\left(u\left(t,x_j(t)\right)\right)-\lambda_i\left(u\left(t,x_j(t)\right)\right)\right)\right|\mathrm{d}t\\&\le\int_0^{\bar{t}_1}\left|w_i\left(t,(\lambda(0)-\delta_0)t\right)\left(\lambda(0)-\delta_0-\lambda_i\left(u\left(t,(\lambda(0)-\delta_0)t\right)\right)\right)\right|\mathrm{d}t\\&\quad+\iint_{P_1A_1OP_0}\left|\sum_{j,k=1}^n Q_{ijk}(u)u_kw_j+\Gamma_{ijk}(u)w_jw_k\right|\mathrm{d}t\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{3.13}$$

由(3.2)~(3.3)及(3.5)，并注意到(2.9)~(2.12)及引理 3.1~3.2，可得

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_0}\left|w_i\left(t,x_j(t)\right)\right|\mathrm{d}t\le c\Big\{&W\left(D_0^T\right)+U_\infty^c(T)W_1(T)+W_\infty^c(T)U_1(T)+W_\infty^c(T)W_1(T)\\&+\left[W_\infty^c(T)U_\infty^c(T)+\left(W_\infty^c(T)\right)^2\right](1+T)^{1-\mu}\Big\}(1+T)^{1-\mu},\end{aligned}$$

今后 c 是不依赖于 ε 和 T 的正常数。同时，对 $\int_{t_0}^{t_2}\left|w_i\left(t,x_j\left(t\right)\right)\right|\mathrm{d}t$ 有类似的估计式。这样得到

$$\tilde{W}_1\left(T\right)\le c\Big\{\varepsilon+U_\infty^c\left(T\right)W_1\left(T\right)+W_\infty^c\left(T\right)U_1\left(T\right)+W_\infty^c\left(T\right)W_1\left(T\right)$$
$$+\left[W_\infty^c\left(T\right)U_\infty^c\left(T\right)+\left(W_\infty^c\left(T\right)\right)^2\right]\left(1+T\right)^{1-\mu}\Big\}\left(1+T\right)^{1-\mu}.$$

类似的，有

$$W_1\left(T\right)\le c\Big\{\varepsilon+U_\infty^c\left(T\right)W_1\left(T\right)+W_\infty^c\left(T\right)U_1\left(T\right)+W_\infty^c\left(T\right)W_1\left(T\right)$$
$$+\left[W_\infty^c\left(T\right)U_\infty^c\left(T\right)+\left(W_\infty^c\left(T\right)\right)^2\right]\left(1+T\right)^{1-\mu}\Big\}\left(1+T\right)^{1-\mu}.$$

下面估计 $W_\infty^c\left(T\right)$。当 $i\in\left\{1,\cdots,p\right\}$ 时，过任意给定的点 $\left(t,x\right)\in D^T\setminus D_1^T$ 作第 i 特征交直线 $x=\left(\lambda_n\left(0\right)+\delta_0\right)t$ 于点 $D\left(t_0,y\right)$，沿该特征从 t_0 到 t 积分(2.8)，得

$$w_i\left(t,x\right)=w_i\left(t_0,y\right)+\int_{t_0}^{t}\sum_{j,k=1}^{n}\left[Q_{ijk}\left(u\right)u_kw_j+\gamma_{ijk}\left(u\right)w_jw_k\right]\mathrm{d}s. \tag{3.14}$$

由引理 3.2，有

$$\left|w_i\left(t_0,y\right)\right|\le\left(1+y\right)^{-\mu}W\left(D_+^T\right)\le c\varepsilon\left(1+t_0\right)^{-\mu}. \tag{3.15}$$

另一方面，由(2.10)和(3.5)，并利用引理 3.1，有

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}\left|\sum_{j,k=1}^{n}\left[Q_{ijk}\left(u\right)u_kw_j+\gamma_{ijk}\left(u\right)w_jw_k\right]\right|\mathrm{d}s\\&\le c\Big\{W_\infty^c\left(T\right)\tilde{U}_1\left(T\right)+U_\infty^c\left(T\right)\tilde{W}_1\left(T\right)+W_\infty^c\left(T\right)\tilde{W}_1\left(T\right)\\&\quad+\left[W_\infty^c\left(T\right)U_\infty^c\left(T\right)+\left(W_\infty^c\left(T\right)\right)^2\right]\left(1+T\right)^{1-\mu}\Big\}\left(1+t_0\right)^{-\mu}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

由(3.4)，有

$$x-\left(\lambda\left(0\right)+\frac{\delta_0}{2}\right)t\le y-\left(\lambda\left(0\right)+\frac{\delta_0}{2}\right)t_0,$$

再由 D_1^T 的定义并注意到 $y=\left(\lambda_n\left(0\right)+\delta_0\right)t_0$，易得

$$\eta t\le t_0\le t.$$

于是从(3.14)~(3.16)，并应用引理 3.1，就得到

$$\begin{aligned}&\left(1+\left|x-\lambda\left(0\right)t\right|\right)^{\mu}\left|w_i\left(t,x\right)\right|\\&\le c\Big\{\varepsilon+W_\infty^c\left(T\right)\tilde{U}_1\left(T\right)+U_\infty^c\left(T\right)\tilde{W}_1\left(T\right)+W_\infty^c\left(T\right)\tilde{W}_1\left(T\right)\\&\quad+\left[W_\infty^c\left(T\right)U_\infty^c\left(T\right)+\left(W_\infty^c\left(T\right)\right)^2\right]\left(1+T\right)^{1-\mu}\Big\}.\end{aligned}$$

当 $i\in\left\{p+1,\cdots,n\right\}$ 时，由(2.10)，类似地可得

$$\begin{aligned}&\left(1+\left|x-\lambda_i\left(0\right)t\right|\right)^{\mu}\left|w_i\left(t,x\right)\right|\\&\le c\Big\{\varepsilon+W_\infty^c\left(T\right)\tilde{U}_1\left(T\right)+U_\infty^c\left(T\right)\tilde{W}_1\left(T\right)+W_\infty^c\left(T\right)\tilde{W}_1\left(T\right)\\&\quad+\left[W_\infty^c\left(T\right)U_\infty^c\left(T\right)+\left(W_\infty^c\left(T\right)\right)^2\right]\left(1+T\right)^{1-\mu}\Big\},\end{aligned}$$

然后得到

$$W_\infty^c(T)\le c\left\{\varepsilon+W_\infty^c(T)\tilde U_1(T)+U_\infty^c(T)\tilde W_1(T)+W_\infty^c(T)\tilde W_1(T)\right.$$
$$\left.+\left[W_\infty^c(T)U_\infty^c(T)+\left(W_\infty^c(T)\right)^2\right](1+T)^{1-\mu}\right\}.$$

类似地，有

$$U_\infty^c(T)\le c\left\{\varepsilon+U_\infty^c(T)\tilde U_1(T)+W_\infty^c(T)\tilde U_1(T)+\left[W_\infty^c(T)U_\infty^c(T)+\left(U_\infty^c(T)\right)^2\right](1+T)^{1-\mu}\right\}.$$

现在来估计 $\tilde U_1(T)$ 和 $U_1(T)$。类似于(3.13)，由(2.4)~(2.7)我们有

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_0}\left|u_i\left(t,x_j(t)\right)\left(\lambda_j\left(u\left(t,x_j(t)\right)\right)-\lambda_i\left(u\left(t,x_j(t)\right)\right)\right)\right|\mathrm{d}t\\&\le\int_0^{\bar t_1}\left|u_i\left(t,\left(\lambda(0)-\delta_0\right)t\right)\left(\lambda(0)-\delta_0-\lambda_i\left(u\left(t,\left(\lambda(0)-\delta_0\right)t\right)\right)\right)\right|\mathrm{d}t\\&\quad+\iint_{P_1A_1OP_0}\left|\sum_{j,k=1}^{n}F_{ijk}(u)u_jw_k+f_{ijk}(u)u_ju_k\right|\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\&\le c\left\{\left[\varepsilon+W_\infty^c(T)U_\infty^c(T)(1+T)^{1-\mu}+\left(U_\infty^c(T)\right)^2(1+T)^{1-\mu}+U_\infty^c(T)U_1(T)\right](1+T)^{1-\mu}\right\}.\end{aligned}$$

类似地可以估计 $\int_{t_0}^{t_2}\left|u_i\left(t,x_j(t)\right)\right|\mathrm{d}t$，因此得到

$$\tilde U_1(T)\le c\left\{\left[\varepsilon+W_\infty^c(T)U_\infty^c(T)(1+T)^{1-\mu}+\left(U_\infty^c(T)\right)^2(1+T)^{1-\mu}+U_\infty^c(T)U_1(T)\right](1+T)^{1-\mu}\right\}.$$

类似地，有

$$U_1(T)\le c\left\{\left[\varepsilon+W_\infty^c(T)U_\infty^c(T)(1+T)^{1-\mu}+\left(U_\infty^c(T)\right)^2(1+T)^{1-\mu}+U_\infty^c(T)U_1(T)\right](1+T)^{1-\mu}\right\}.$$

而且，对于任意给定的点 $(t,x)\in D^T$，有

$$u(t,x)=u(t,x_0)+\int_{x_0}^{x}u_\xi(t,\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其中 (t,x_0) 位于直线 $x=\left(\lambda(0)-\delta_0\right)t$ 上。于是，由(3.5)和引理 3.1，并利用引理 3.2 易得：当 $(t,x)\in D^T$ 时，成立

$$|u(t,x)|\le c\left\{U\left(D_0^T\right)+W_\infty^c(T)(1+T)^{1-\mu}+W_1(T)\right\}.$$

因此，得到

$$U_\infty(T)\le c\left\{U\left(D_0^T\right)+W_\infty^c(T)(1+T)^{1-\mu}+W_1(T)\right\}.$$

由 $U_\infty(T)\le\kappa_6\varepsilon^\gamma$。对于适当小的 $\delta_0>0$，恒成立

$$|u(t,x)|\le\kappa_6\varepsilon_0^\gamma\le\frac{1}{2}\delta.$$

这说明了假设(3.5)的合理性。利用连续归纳假设即证(3.6)~(3.10)。

最后，证明 $W_\infty(T)\le\kappa_9\varepsilon$。过任意给定的点 $(t,x)\in D_i^T$，作第 i 特征 $\xi=x_i(s;t,x)$ 交 D^T 的边界之一于点 $D(t_0,y)$。沿该特征从 t_0 到 t 积分(2.8)，得到

$$w_i\left(t,x\right)=w_i\left(t_0,y\right)+\int_{t_0}^{t}\sum_{j,k=1}^{n}\left[Q_{ijk}\left(u\right)u_k w_j+\gamma_{ijk}\left(u\right)w_j w_k\right]\left(s,x_i\left(s;t,x\right)\right)\mathrm{d}s.$$

注意到引理(3.1)~(3.2)，和

$$\left|\gamma_{iii}\left(u_i e_i\right)\right|\le c\left|u_i\right|^{\alpha},$$

对任意固定的点$\left(t,x\right)\in D_i^T$，有

$$\begin{aligned}\left|w_i\left(t,x\right)\right|\le c\Big\{&W\left(D_0^T\right)+W\left(D_+^T\right)+U_\infty^c\left(T\right)W_\infty^c\left(T\right)+\left(W_\infty^c\left(T\right)\right)^2\\&+\left[W_\infty^c\left(T\right)\left(U_\infty\left(T\right)+W_\infty\left(T\right)\right)+U_\infty^c\left(T\right)\left(W_\infty\left(T\right)+\left(W_\infty\left(T\right)\right)^2\right)\right]\left(1+T\right)^{1-\mu}\\&+\left(U_\infty\left(T\right)\right)^{\alpha}\left(W_\infty\left(T\right)\right)^2 T\Big\},\end{aligned}$$

由引理 3.2 和(3.11)，并应用连续归纳假设，就能立即得到(3.12)。引理 3.3 得证。

注 3.1：由(3.9)和(3.12)，当$\varepsilon_0>0$适当小时，Cauchy 问题(1.1)和(1.4)在$\left[0,T\right]$上存在唯一的C^1解$u=u\left(t,x\right)$，其中T满足(3.11)。因此我们得到了C^1解$u=u\left(t,x\right)$的生命跨度的下界

$$\tilde{T}\ge\varepsilon^{-\gamma(1+\alpha)}.$$

下面证明定理 1.1。

显然，为了证明定理 1.1，只要证明

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to0^+}}\left\{\varepsilon^{1+\alpha}\tilde{T}\left(\varepsilon\right)\right\}\le M_0,\tag{3.17}$$

及

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to0^+}}\left\{\varepsilon^{1+\alpha}\tilde{T}\left(\varepsilon\right)\right\}\ge M_0.\tag{3.18}$$

其中M_0由(1.6)定义。

接下来，将在标准坐标下考虑问题，并且假设$\varepsilon_0>0$是适当小的。

先来证明(3.17)。由注 3.1，对于任意固定的$\varepsilon\in\left(0,\varepsilon_0\right]$，Cauchy 问题(1.1)和(1.4)在区域$\left[0,T_1\right]$上存在唯一的$C^1$解$u=u\left(t,x\right)$，其中

$$T_1=\varepsilon^{-(\rho+\alpha)}\le\tilde{T}\left(\varepsilon\right)-1=\overline{T},\tag{3.19}$$

$$\rho=\gamma\left(1+\alpha\right)-\alpha=\left(\alpha^2+3\alpha+2\right)\mu-\left(\alpha^2+3\alpha+1\right)>0.$$

先假设成立

$$\tilde{T}\left(\varepsilon\right)\le\varepsilon^{-\gamma(\rho+\alpha)},\tag{3.20}$$

并将在证明的最后说明此假设的合理性。

由(1.5)和(1.6)知，存在$i\in J_1$和$x_0\in\mathbb{R}$使得

$$M_0=\left\{-\frac{1}{\alpha!}\frac{\mathrm{d}^{\alpha+1}\lambda_i\left(u^{(i)}\left(s\right)\right)}{\mathrm{d}s^{\alpha+1}}\bigg|_{s=0}\left(l_i\left(0\right)\psi\left(x_0\right)\right)^{\alpha}l_i\left(0\right)\psi'\left(x_0\right)\right\}^{-1},$$

令

$$a=-\frac{1}{\alpha!}\frac{\mathrm{d}^{\alpha+1}\lambda_i\left(u^{(i)}\left(s\right)\right)}{\mathrm{d}s^{\alpha+1}}\bigg|_{s=0}.$$

不妨设 $i=m\in J_1$，且

$$a\left(l_m(0)\psi(x_0)\right)^{\alpha}>0,\quad l_m(0)\psi'(x_0)>0,\quad x_0>0.$$

过 $(0,x_0)$ 作第 m 特征 $x=x_m(t,x_0)$。由 D_m^T 的定义知，该特征一定在有限时间 $t_0>0$ 进入 D_m^T 并从此落在其中(参见[2])。在 C^1 解的存在区域上，由(2.8)沿该特征有

$$\frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}_m t}=a_0(t)w_m^2+a_1(t)w_m+a_2(t), \tag{3.21}$$

其中

$$\begin{cases} a_0(t)=\gamma_{mmm}(u), \\ a_1(t)=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n}\left[Q_{mmj}(u)u_j+2\gamma_{mmj}(u)w_j\right], \\ a_2(t)=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}Q_{mjk}(u)w_ju_k+\sum\limits_{\substack{j,k=1\\ \lambda_j\neq\lambda_k\\ j,k\neq m}}^{n}\gamma_{mjk}(u)w_jw_k, \end{cases} \tag{3.22}$$

由(3.19)，得到

$$t_0<T_0=\varepsilon^{-\alpha}<T_1. \tag{3.23}$$

由(2.4)~(2.6)，并应用引理 3.1~3.3，沿 $x=x_m(t,x_0)$ 积分(2.3)

$$\begin{aligned} &\left|u_m(t,x_m(t,x_0))-u_m(0,x_0)\right| \\ &\leq\left|\int_0^t\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\rho_{mjk}(u)u_kw_j+f_{mjk}(u)u_ju_k\right](s,x_m(s,x_0))\mathrm{d}s\right| \\ &\leq c\left\{\left[U(D_+^t)+W(D_+^t)\right]U(D_+^t)+U_\infty^c(t)U_\infty(t)(1+t)^{1-\mu}+\left[U_\infty^c(t)+W_\infty^c(t)\right]U_\infty^c(t)\right\} \\ &\leq c\varepsilon^{1+\gamma-\gamma(\rho+\alpha)(1-\mu)},\quad\forall t\in\left[0,\bar{T}\right] \end{aligned} \tag{3.24}$$

由(2.14)~(2.15)，得到

$$\left|u_m(t,x_m(t,x_0))-\varepsilon l_m(0)\psi(x_0)\right|\leq c\varepsilon^{1+\gamma-\gamma(\rho+\alpha)(1-\mu)},\quad\forall t\in\left[0,\bar{T}\right] \tag{3.25}$$

另一方面，在 C^1 解 $u=u(t,x)$ 的存在域 $D^T\cap\left\{(t,x)\,|\,T_0\leq t\leq\bar{T}\right\}$ 上，由 Hadamard 公式和引理 3.3，沿着 $x=x_m(t,x_0)$，有

$$\left|\gamma_{mmm}(u)-\gamma_{mmm}(u_me_m)\right|\leq cU_\infty^c(\bar{T})(1+t)^{-\mu}\leq c\varepsilon^{1+\alpha\mu},\quad\forall t\in\left[T_0,\bar{T}\right] \tag{3.26}$$

而且，由(2.13)并由 α 及 J_1 的定义，有

$$\gamma_{mmm}(u_me_m)=a\left(\varepsilon l_m(0)\psi(x_0)\right)^{\alpha}+a\left[\left(u_m(t,x_m(t,x_0))\right)^{\alpha}-\left(\varepsilon l_m(0)\psi(x_0)\right)^{\alpha}\right]+O\left(\left|u_m\right|^{1+\alpha}\right). \tag{3.27}$$

然后，应用(3.9)，并由(3.25)~(3.26)得到

$$a_0(t)=\gamma_{mmm}(u)=a\left(\varepsilon l_m(0)\psi(x_0)\right)^{\alpha}+O\left(\varepsilon^{\varpi}\right),\quad\forall t\in\left[T_0,\bar{T}\right] \tag{3.28}$$

其中 $\varpi=\min\left\{\gamma(1+\alpha),1+\alpha\gamma-\gamma(\rho+\alpha)(1-\mu)\right\}$。

因此，对于适当小的 $\varepsilon_0>0$，有

$$a_0(t) \ge \frac{1}{2} a\left(\varepsilon l_m(0)\psi(x_0)\right)^\alpha > 0, \quad \forall t \in \left[T_0, \bar{T}\right]$$

应用 Hadamard 公式和引理 3.3，得到

$$\left|\frac{\partial u_m(t,x)}{\partial x} - w_m(t,x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} w_k \left(r_k(u) - r_k(u_k e_k)\right)^T e_m\right| \le c\varepsilon^{1+\gamma}, \quad \forall t \in [0, T_0] \tag{3.29}$$

与(3.24)类似，应用引理 3.2~3.3，并且由(3.23)，有

$$\left|w_m(t, x_m(t, x_0)) - w_m(0, x_0)\right| \le c\varepsilon^{\min\{1+\gamma-\alpha(1-\mu), 2+\alpha(\gamma-1)\}}, \quad \forall t \in [0, T_0] \tag{3.30}$$

注意到(2.16)，由(3.29)~(3.30)，得

$$w_m(T_0, x_m(T_0, x_0)) = \varepsilon l_m(0)\psi'(x_0) + O\left(\varepsilon^{\min\{1+\gamma-\alpha(1-\mu), 2+\alpha(\gamma-1)\}}\right). \tag{3.31}$$

对于适当小的 $\varepsilon_0 > 0$，有

$$w_m(T_0, x_m(T_0, x_0)) \ge \frac{1}{2}\varepsilon l_m(0)\psi'(x_0).$$

应用引理 3.3，易得

$$\int_{T_0}^{\bar{T}} |a_1(t)| \mathrm{d}t \le c\left(U_\infty^c(\bar{T}) + W_\infty^c(\bar{T})\right)\left(1+\bar{T}\right)^{1-\mu} \le c\varepsilon^{1-\gamma(\rho+\alpha)(1-\mu)}. \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}\int_{T_0}^{\bar{T}} |a_2(t)| \mathrm{d}t &\le c\left\{W_\infty^c(\bar{T}) U_\infty(\bar{T})\left(1+\bar{T}\right)^{1-\mu} + W_\infty^c(\bar{T}) U_\infty^c(\bar{T}) + \left(W_\infty^c(\bar{T})\right)^2\right\} \\ &\le c\varepsilon^{1+\gamma-\gamma(\rho+\alpha)(1-\mu)}.\end{aligned}$$

然后，有

$$\begin{aligned}K &= \int_{T_0}^{\bar{T}} |a_2(t)| \exp\left(-\int_{T_0}^{t} a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \\ &\le \int_{T_0}^{\bar{T}} |a_2(t)| \mathrm{d}t \exp\left(\int_{T_0}^{\bar{T}} |a_1(s)| \mathrm{d}s\right) \le c\varepsilon^{1+\gamma-\gamma(\rho+\alpha)(1-\mu)},\end{aligned} \tag{3.33}$$

则

$$w_m(T_0, x_m(T_0, x_0)) > \frac{1}{2}\varepsilon l_m(0)\psi'(x_0) > K. \tag{3.34}$$

对常微分方程(3.21)具初值

$$t = T_0 : w_m = w_m(T_0, x_m(T_0, x_0))$$

的 Cauchy 问题应用引理 2.1，得到

$$\begin{aligned}\int_{T_0}^{\bar{T}} a_0(t) \exp\left(-\int_{T_0}^{\bar{T}} a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t &\le \int_{T_0}^{\bar{T}} a_0(t) \exp\left(\int_{T_0}^{t} a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \\ &\le \left(w_m(T_0, x_m(T_0, x_0)) - K\right)^{-1}.\end{aligned}$$

因此，由(3.28)，(3.31)~(3.34)，易得，存在不依赖于 ε 和 T 的正常数 $\bar{C}$，使得

$$\tilde{T}(\varepsilon) \le \bar{C}\varepsilon^{-(1+\alpha)},$$

其中

$$\bar{C} > \left[a\left(l_m(0)\psi(x_0)\right)^\alpha l_m(0)\psi'(x_0)\right]^{-1}.$$

因此，当 $\varepsilon_0 > 0$ 适当小时，成立

$$\tilde{T}(\varepsilon)\varepsilon^{\gamma(\rho+\alpha)} \le \bar{C}\varepsilon^{\gamma(\rho+\alpha)-(1+\alpha)} \le 1,$$

这就说明了假设(3.20)的合理性。

现在来证明(3.18)。只需证明对于任意给定的正常数 $M < M_0$，成立

$$\tilde{T}(\varepsilon) > M\varepsilon^{-(1+\alpha)}. \tag{3.35}$$

为了证明这个，只需在任意给定的区域 D^T 上建立有关 Cauchy 问题(1.1)和(1.4)的解的 C^1 范数的一致先验估计：

$$0 < T \le M\varepsilon^{-(1+\alpha)}. \tag{3.36}$$

由引理 3.2~3.3，有

$$\|u(t,x)\|_{C^0(D^T)} \le c\varepsilon^{\gamma},$$

$$\|w_i(t,x)\|_{C^0(D^T\setminus D_i^T)} \le c\varepsilon, \quad (i=1,\cdots,n)$$

因此，下面估计 $\|w_i(t,x)\|_{C^0(D_i^T)}(i=1,\cdots,n)$，仅估计 $\|w_m(t,x)\|_{C^0(D_m^T)}$，其他的情况可类似地估计出来。

沿着穿过 x-轴上任意固定的点 $(0,y)$ 的 m 阶特征 $x = x_m(t,y)$，仍然有(3.21)成立，其中 $u = u(t,x_m(t,y))$。可假设

$$w_m(0,y) \ge 0.$$

(否则，用 $-w_1$ 代替 w_1)。

下面首先估计 $w_m(0,y)\int_0^T a_0^+(t)\mathrm{d}t$，其中 T 满足(3.36)。应用(3.27)并注意到(3.9)和(3.25)，由(3.22)得

$$a_0(t) = a(\varepsilon l_m(0)\psi(y))^{\alpha} + (\gamma_{mmm}(u) - \gamma_{mmm}(u_m e_m)) + O(\varepsilon^{\varpi}).$$

那么，由(2.1)，(2.14)，(2.16)，得到

$$\begin{aligned} w_m(0,y)\int_0^T a_0^+(t)\mathrm{d}t \le \left((l_m(0)\psi'(y))^+\varepsilon + c\varepsilon^2\right)\int_0^T\Big[&\left(a(l_m(0)\psi(y))^{\alpha}\right)^+\varepsilon^{\alpha} \\ &+ |\gamma_{mmm}(u) - \gamma_{mmm}(u_m e_m)| + c\varepsilon^{\varpi}\Big]\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.37}$$

而且，正如上面指出的，$x = x_m(t,y)$ 一定在一个独立于 ε 的有限时间 $t_0 > 0$ 时进入 D_m^T 并在这之后就在其中。那么，对于适当小的 $\varepsilon > 0$，由(3.36)并应用 Hadamard 公式和引理 3.2~3.3，有

$$\begin{aligned} w_m(0,y)\int_0^T a_0^+(t)\mathrm{d}t &\le \left(a(l_m(0)\psi(y))^{\alpha} l_m(0)\psi'(y)\right)^+ M + c\varepsilon^{\varpi-\alpha} \\ &\quad + c\varepsilon\left\{\left[U(D_{\pm}^T) + U(D_0^T) + U_{\infty}^c(T)\right](1+T)^{1-\mu} + \tilde{U}_1(T)\right\} \\ &\le \left(a(l_m(0)\psi(y))^{\alpha} l_m(0)\psi'(y)\right)^+ M + c\varepsilon^{\varpi-\alpha}. \end{aligned}$$

而且，有

$$\begin{aligned} \int_0^T |a_1(t)|\mathrm{d}t &\le c\Big\{\Big[U(D_{\pm}^T) + U(D_0^T) + W(D_{\pm}^T) + W(D_0^T) \\ &\qquad + U_{\infty}^c(T) + W_{\infty}^c(T)\Big](1+T)^{1-\mu} + \tilde{U}_1(T) + \tilde{W}_1(T)\Big\} \\ &\le c\varepsilon^{\gamma(2+\alpha)-(1+\alpha)}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T |a_2(t)|\mathrm{d}t \le c\Big\{&U(D_\pm^T)W(D_\pm^T)+U(D_0^T)W(D_0^T)+W(D_\pm^T)^2+W(D_0^T)^2\\&+W_\infty^c(T)U_\infty^c(T)+W_\infty^c(T)U_\infty(T)(1+T)^{1-\mu}\\&+(W_\infty^c(T))^2+U_\infty^c(T)\tilde{W}_1(T)+\tilde{U}_1(T)W_\infty^c(T)\Big\}\\ \le{}& c\varepsilon^{\gamma(2+\alpha)-\alpha},\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$K=\int_0^T |a_2(t)|\exp\left(-\int_0^t a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \le c\varepsilon^{\gamma(2+\alpha)-\alpha}, \tag{3.40}$$

及

$$\int_0^T |a_0(t)|\mathrm{d}t \le c\varepsilon^{-1}. \tag{3.41}$$

因此，由M_0的定义及(3.37)并应用(3.40)~(3.41)，对于适当小的$\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}(w_m(0,y)+K)\int_0^T a_0^+(t)\mathrm{d}t &\le \frac{M}{M_0}+c\varepsilon^{\varpi-\alpha}+K\int_0^T|a_0(t)|\mathrm{d}t\\&\le \frac{M}{M_0}+c\varepsilon^{\min\{\varpi-\alpha,\gamma(2+\alpha)-(1+\alpha)\}}\le 1.\end{aligned} \tag{3.42}$$

因此，由(3.38)~(3.42)，应用引理 2.2，可以得到

$$|w_m(t,x_m(t,y))| \le c\varepsilon, \quad \forall t\in[0,T]$$

因为y是任意的，于是有

$$|w_m(t,x)| \le c\varepsilon, \quad \forall (t,x)\in D^T$$

那些$i=1,\cdots,m-1,m+1,\cdots,n$的情形可以被类似的证明。

那么，注意到(2.2)，最终得到

$$\|u_x(t,x)\|_{c^0(D^T)} \le c\varepsilon.$$

因此，对于任意正常数$M<M_0$，Cauchy 问题(1.1)和(1.4)在区域$D^t\left(0\le t\le M\varepsilon^{-(1+\alpha)}\right)$上存在唯一解。这意味着当$\varepsilon>0$适当小时，(3.35)成立，这就证明了(3.18)。定理 1.1 证毕。

致　谢

本文是在导师徐玉梅副教授的悉心指导下完成的，徐老师不仅传授知识，悉心指导论文需要注意的地方，对本篇论文的推导提供了很多的帮助，而且其对学术的不懈追求激励着我不断进取。

同时，作者衷心地感谢李傅山、王培合等各位老师的精心指导和帮助，在课上，两位老师传授了很多偏微分方向的知识，拓宽了自己的知识面，掌握了解决问题的一些基本方法。

最后，还要感谢同专业的同学对我的帮助，在我感到迷茫的时候，经过反复的讨论交流，给了我很多的启发。

参考文献

[1] Li, T.-T., Zhou, Y. and Kong, D.-X. (1994) Weak Linear Degeneracy and the Global Classical Solutions for Quasilinear Hyperbolic Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, **19**, 1263-1317. https://doi.org/10.1080/03605309408821055

[2] Li, T.-T., Zhou, Y. and Kong, D.-X. (1997) Global Classical Solutions for General Quasilinear Hyperbolic Systems with Decay Initial Data. *Nonlinear Analysis*, *Theory*, *Method Applications*, **28**, 1299-1332.

https://doi.org/10.1016/0362-546X(95)00228-N

[3] Li, T.-T., Kong, D.-X. and Zhou, Y. (1996) Global Classical Solutions for General Quasilinear Non-Strictly Hyperbolic Equations with Decay Initial Data. *Nonlinear Studies*, **3**, 203-229.

[4] Li, T.-T. and Kong, D.-X. (1997) Initial Value Problem for General Quasilinear Hyperbolic Equations with Characteristics with Constant Multiplicity. *Journal of Partial Differential Equations*, **10**, 299-322.

[5] Wang, L.B. (2003) Formation of Singularities for Quasilinear Hyperbolic Systems with Characteristic with Constant Multiplicity. *Journal of Partial Differential Equations*, **16**, 240-254.

[6] Xu, Y.M. and Wang, L.B. (2015) Breakdown of Classical Solutions to Cauchy Problem for Inhomogeneous Quasilinear Hyperbolic Systems. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **46**, 827-851. https://doi.org/10.1007/s13226-015-0156-1

[7] Li, T.T. and Wang, L.B. (2009) Global Propagation of Regular Nonlinear Hyperbolic Waves. In: *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, Vol. 76, Birkhüser Boston, Inc., Boston, MA.

[8] Li, T.T. and Kong, D.X. (2000) Breakdown of Classical Solutions to Quasilinear Hyperbolic Systems. *Nonlinear Analysis*, *Theory*, *Methods & Applications*, **40**, 407-437. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(00)85025-7

[9] Hörmander, L. (1987) The Lifespan of Classical Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations. *Lecture Notes in Mathematics*, **1256**, 214-280. https://doi.org/10.1007/BFb0077745