

Stability and Co-Dimension One Bifurcation Analysis of a Class of Lorenz-Type Chaotic System with Memristor

Jun Huang, Yuming Chen

School of Mathematics and Systems Science, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou
Guangdong
Email: blkhpz@126.com

Received: Apr. 7th, 2019; accepted: Apr. 22nd, 2019; published: Apr. 29th, 2019

Abstract

Based on the classical Lorenz system, this paper obtains a class of 3D memristive chaotic circuit system through feedback control, and analyzes the local dynamics of this system. Firstly, the local stability at the origin of this system is investigated through analyzing linearized system. Secondly, based on the center manifold theorem and Hopf bifurcation theory, the co-dimension one Pitchfork bifurcation and Hopf bifurcation at the origin of this system are investigated, and the results are verified by numerical simulation.

Keywords

Lorenz-Type System, Pitchfork Bifurcation, Hopf Bifurcation

一类具有忆阻器的 Lorenz 型混沌系统稳定性及余维一分岔分析

黄俊, 陈玉明

广东技术师范大学, 数学与系统科学学院, 广东 广州
Email: blkhpz@126.com

收稿日期: 2019 年 4 月 7 日; 录用日期: 2019 年 4 月 22 日; 发布日期: 2019 年 4 月 29 日

摘要

基于经典的 Lorenz 系统, 本文通过反馈控制的方式得到了一类具有忆阻器的三维混沌电路系统, 并对该系统的局部动力学行为进行了分析。首先, 通过分析线性化系统, 得到了原点平衡点的局部稳定性性质; 其次, 基于中心流形及 Hopf 分岔理论, 对原点平衡点处的余维一 Pitchfork 分岔及 Hopf 分岔进行了分析, 并通过数值仿真进行了验证。

关键词

Lorenz 系统, Pitchfork 分岔, Hopf 分岔

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 介绍

1963 年, Edward Lorenz 在实验中偶然发现混沌吸引子, 即 Lorenz 系统 [1]。自此以来, 人们对于混沌系统的认识和研究取得了极大的进步。现在人们不仅关注发现新的混沌系统, 更关注系统自身混沌和分岔特性的研究 [2-5]。

混沌系统, 曾经被著名的物理学家 Ford 誉为“20 世纪物理的第三次革命”, 混沌是非线性科学的一个重要分支, 混沌理论的研究及其在信息安全领域中的应用是当前科学界和工程领域的一个前沿课题, 但是, 直到目前对于混沌本质的认识及理论研究还远远不够 [6]。

忆阻器是一类具有记忆特性的非线性电子忆阻器混沌电路的硬件实现元器件, 其描述了磁通量与电荷之间的关系 [7]。忆阻器的非线性特性以及记忆特性, 使得其在混沌保密通讯、图像加密、非易失性阻抗存储器等领域均有研究意义 [7]。其输入输出的非线性关系, 使得忆阻器在混沌电路方面得到广泛应用。经典的 Lorenz 系统如下

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = cx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy. \end{cases} \quad (1.1)$$

对系统 (1.1) 作变量变换, 令 $y = Y/a + x$, 整理后再将字母 Y 换成字母 y , 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = (c - 1)ax - (1 + a)y - axz, \\ \frac{dz}{dt} = -bz + \frac{xy}{a} + x^2. \end{cases} \quad (1.2)$$

在系统 (1.2) 的第二个方程中加入一个忆阻器, 可得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = dx - (1 + a + \rho r)y - axz - 3\rho kx^2y, \\ \frac{dz}{dt} = -bz + \frac{xy}{a} + x^2. \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $d = (c - 1)a$, a, b, d, ρ, r, k 均为实数且满足 $a \neq 0, \rho > 0$ 。本文将对系统 (1.3) 的原点平衡点局部稳定性、Pitchfork 分支及 Hopf 分支进行讨论。

2. 局部稳定性分析

在这一节, 我们将会对系统 (1.3) 在原点平衡点处的局部稳定性进行分析。首先, 通过计算可以得到系统 (1.3) 的平衡点为

$$\begin{aligned} & E_0(0, 0, 0), \\ & E_{1,2}(\pm\sqrt{\frac{bd}{a}}, 0, \frac{d}{a}). \end{aligned}$$

系统 (1.3) 在 E_0 处的 Jacobi 矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d & -a - \rho r - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

对应的特征多项式为

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(a + b + \rho r + 1) + \lambda(ab + b\rho r + b - d) - bd, \quad (2.1)$$

计算得出 Jacobi 矩阵 A 的特征值为

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left(-1 - a - \rho r \pm \sqrt{(a + \rho r + 1)^2 + 4d} \right). \quad (2.2)$$

通过对 (2.2) 式中特征值的实部及虚部进行分析, 我们可以得到如下定理:

定理 1: 系统 (1.3) 在平衡点 E_0 处的稳定性有以下 6 种情况:

- 1) 当 $b < 0, d < 0, -1 - \rho r < a < -1 - \rho r + 2\sqrt{-d}$ 或 $b > 0, d < 0, -1 - \rho r - 2\sqrt{-d} < a < -1 - \rho r$ 时, 平衡点 E_0 是不稳定鞍焦点;
- 2) 当 $b > 0, d < 0, a < -1 - \rho r - 2\sqrt{-d}$ 或 $b < 0, d < 0, a > -1 - \rho r - 2\sqrt{-d}$ 或 $d > 0$ 时, 平衡点 E_0 是不稳定鞍结点;
- 3) 当 $b > 0, d < 0, -1 - \rho r < a < -1 - \rho r + 2\sqrt{-d}$ 时, 平衡点 E_0 是结焦点, 且局部渐近稳定;
- 4) 当 $b < 0, d < 0, -1 - \rho r - 2\sqrt{-d} < a < -1 - \rho r$ 时, 平衡点 E_0 是不稳定结焦点;
- 5) 当 $b < 0, d < 0, a < -1 - \rho r - 2\sqrt{-d}$ 时, 平衡点 E_0 是不稳定结点;
- 6) 当 $b > 0, d < 0, a > -1 - \rho r - 2\sqrt{-d}$ 时, 平衡点 E_0 是结点, 且局部渐近稳定。

3. Pitchfork 分岔

在本节中, 我们将利用含参中心流形定理, 对系统 (1.3) 在 E_0 处的 Pitchfork 分支进行研究。在系统 (1.3) 中令 $d = 0 + \bar{d}$, 得到下面的系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -(1 + a + \rho r)y - axz - 3\rho kx^2y + \bar{d}x, \\ \frac{dz}{dt} = -bz + \frac{xy}{a} + x^2. \end{cases} \quad (3.1)$$

其中“ $\bar{d}x$ ”在含参中心流形中为非线性项。从而可以得到系统 (3.1) 在 E_0 处的 Jacobian 矩阵为

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 - a - \rho r & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

其特征值为

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1 - a - \rho r, \quad \lambda_3 = -b,$$

对应的特征向量为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 + a + \rho r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

经过如下的坐标变换

$$(x, y, z)^T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)(u, v, w)^T,$$

系统 (3.1) 变换为

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - a - \rho r & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \end{pmatrix},$$

其中

$$R1 = -(u - v)(-\bar{d} + 3k\rho v(u - v)(a + \rho r + 1) + aw)(a + \rho r + 1)^{-1},$$

$$R2 = -(\bar{d}(v - u) + v(a + \rho r + 1)(a + \rho(3k(u - v)^2 + r) + 1) + aw(u - v))(a + \rho r + 1)^{-1},$$

$$R3 = (u - v)(au + \rho rv + v)a^{-1} - bw.$$

运用含参中心流形定理, 将三维流形限制在特征值为零所对应的中心流形上, 平衡点 E_0 的在 $\bar{d} = 0$ 附近的稳定性由最低阶项的系数的符号决定。通过计算, 可以得到含参中心流形为

$$\begin{cases} \dot{u} = U(u, \bar{d}) \\ = -\frac{au^3}{b(a + \rho r + 1)} - \frac{\bar{d}^2 u}{(a + \rho r + 1)^3} + \frac{\bar{d}u}{a + \rho r + 1} + O(\|(u, \bar{d})\|^4), \\ \dot{\bar{d}} = 0. \end{cases}$$

此外, 因为

$$U(0, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial u} \right|_{u=0, \bar{d}=0} = 0,$$

所以我们需要验证横截条件

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U}{\partial \bar{d}} \right|_{u=0, \bar{d}=0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} \right|_{u=0, \bar{d}=0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 U}{\partial u \partial \bar{d}} \right|_{u=0, \bar{d}=0} &= \frac{1}{a + \rho r + 1} \neq 0, \\ \left. \frac{\partial^3 U}{\partial u^3} \right|_{u=0, \bar{d}=0} &= -\frac{6a}{b(a + \rho r + 1)} \neq 0. \end{aligned}$$

因此, 横截条件成立。综上分析, 可以得到如下定理成立:

定理 2: 当参数 d 经过临界值 $d_0 = 0$ 时, 系统 (1.3) 在 E_0 处会发生 Pitchfork 分支, 且有以下 4 种情况:

- 1) 当 $b > 0, 1 + a + \rho r < 0, a < 0$ 或 $1 + a + \rho r > 0, a < 0$ 时, 平衡点 E_0 是鞍点, 且有一维不稳定流形和二维稳定流形;
- 2) 当 $b > 0, 1 + a + \rho r > 0, a > 0$ 时, 平衡点 E_0 是结点, 且有三维稳定流形;
- 3) 当 $b < 0, 1 + a + \rho r > 0, a > 0$ 或 $1 + a + \rho r < 0, a > 0$ 时, 平衡点 E_0 是鞍点, 且有二维不稳定流形和一维稳定流形;
- 4) 当 $b < 0, 1 + a + \rho r < 0, a < 0$ 时, 平衡点 E_0 是结点, 且有三维不稳定流形。

4. Hopf 分岔

在这一节, 我们将讨论系统 (1.3) 在何参数条件下会发生 Hopf 分支, 以及分支的类型。令 $\mathbf{x} = (x, y, z) \in R^3, \eta = (a, b, d, \rho, r, k) \in R^6$, 设 $d < 0$, 则方程 (1.3) 的向量场可记为

$$f(\mathbf{x}, \eta) = (y, dx - (1 + a + \rho r)y - axz - 3\rho kx^2y, -bz + \frac{xy}{a} + x^2).$$

系统 (1.3) 在 E_0 处的特征方程以及特征值已经在 (2.1),(2.2) 中给出, 我们假设 (2.1) 式有一对纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, (\omega_0 > 0)$, 从而得

$$-d - \omega_0^2 \pm i\omega_0(a + \rho r + 1) = 0,$$

令上式的实部和虚部均为零, 得

$$a = a_0 = -\rho r - 1, \quad \omega_0 = \sqrt{-d} > 0.$$

在 $a = a_0$ 的参数条件下, 向量场 $f(x, \eta)$ 在 E_0 处的 Jacobi 矩阵为

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

特征值为

$$\lambda_1 = -b, \lambda_2 = i\omega_0, \lambda_3 = -i\omega_0.$$

通过计算, 我们得到满足

$$A_2 q = i\omega_0 q, \quad A_2^T p = -i\omega_0 p, \quad \langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^3 \bar{p}_i q_i = 1,$$

的两个向量

$$q = (i\omega_0, d, 0)^T, p = (d, -i\omega_0, 0)^T. \tag{4.2}$$

以及满足

$$B_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k,$$

$$C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{j,k,l=1}^3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k z_l,$$

的两个向量

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (0, (\rho r + 1)(x_3 y_1 + x_1 y_3), (-\rho r - 1)(x_2 y_1 + x_1 y_2))^T,$$

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (0, -3k\rho(x_2 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_1 + x_1 y_1 z_2), 0)^T. \tag{4.3}$$

通过 (4.1)-(4.3), 可得

$$B(q, q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i\omega_0^3(\rho r + 1) \end{pmatrix},$$

$$B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} \end{pmatrix},$$

$$(2i\omega_0 I - A_2)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2i}{3\omega_0} & \frac{1}{3d} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2i}{3\omega_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b+2i\omega_0} \end{pmatrix},$$

从而有

$$u_{11} = -A_2^{-1} B(q, \bar{q}) = (0, 0, 0)^T,$$

$$u_{20} = (2i\omega_0 I - A_2)^{-1} B(q, q)$$

$$= (0, 0, -\frac{2i\omega_0^3(\rho r + 1)}{b + 2i\omega_0})^T,$$

进一步可得

$$\langle p, B(q, -u_{11}) \rangle = 0,$$

$$\langle p, B(\bar{q}, u_{20}) \rangle = -\frac{d(\rho r + 1)^2}{b + 2i\omega_0}, \tag{4.4}$$

$$\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle = 3ik\rho\omega_0^5.$$

第一 Lyapunov 系数可以通过 (4.4) 式得到

$$\begin{aligned} l_1(a_0) &= (2\omega_0)^{-1} \operatorname{Re}[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2\langle p, B(q, -u_{11}) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, u_{20}) \rangle] \\ &= -\frac{b(\rho r + 1)^2}{2\omega_0(b^2 + 4\omega_0^2)}. \end{aligned}$$

接下来验证横截条件, 考虑 (2.2) 式中的一对复特征值的实部, 即

$$\mu(a) = \left(-\frac{1+a+\rho r}{2}\right),$$

在 $a = a_0$ 的参数条件下, 我们验证

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial a} \right|_{a=a_0} = \left. \frac{\partial}{\partial a} \left(-\frac{1+a+\rho r}{2}\right) \right|_{a=a_0} = -\frac{1}{2} < 0,$$

因此, 横截条件成立。

综合上述分析, 可得如下定理成立:

定理 3: 在 $d < 0$ 的条件下, 系统 (1.3) 会发生 Hopf 分支, 且

- 1) 当 $b > 0$ 时, $l_1(a_0) < 0$, Hopf 分支在 E_0 处是次临界的;
- 2) 当 $b < 0$ 时, $l_1(a_0) > 0$, Hopf 分支在 E_0 处是超临界的。

为了验证上述对系统 (1.3) 在 E_0 处 Hopf 分支的正确性, 我们选择一组参数: $(b, d, \rho, r, k) = (0.5, -0.8, 0.6, 0.6, 0.6)$, 则临界值 $a_0 = -1.36$, 很容易看出, 参数组满足发生 Hopf 分支的条件, 当 $a < a_0$ 时, 轨线如图 1(a) 所示; 当 $a > a_0$ 时, 轨线如图 1(b) 所示。

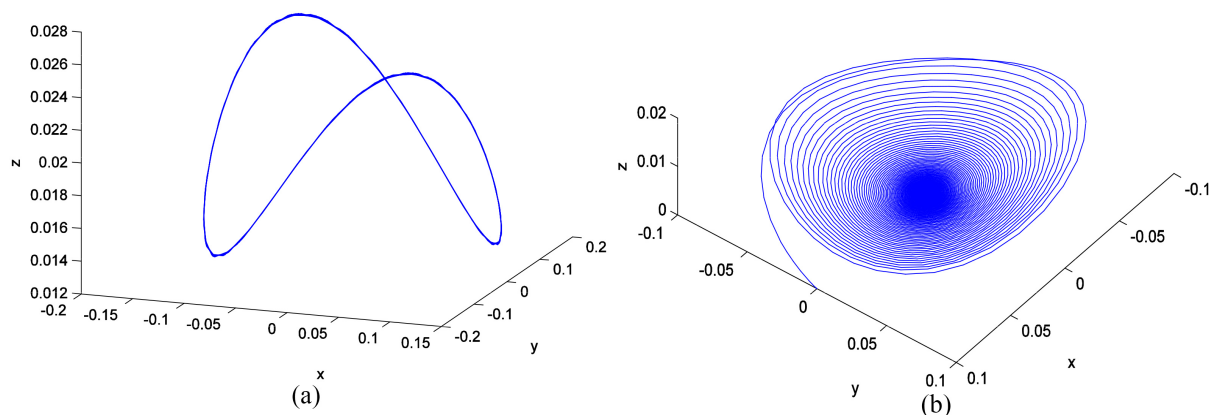


Figure 1. Phase diagrams of system (1.3): $b = 0.5$, $d = -0.8$, $\rho = 0.6$, $r = 0.6$, $k = 0.6$: (a) $a = -1.37$, (b) $a = -1.35$

图 1. 系统 (1.3) 的相图: $b = 0.5$, $d = -0.8$, $\rho = 0.6$, $r = 0.6$, $k = 0.6$: (a) $a = -1.37$, (b) $a = -1.35$

由图可见, 当 $a < a_0$ 时, 轨线会趋向于一个稳定的周期解; 当 $a > a_0$ 时, 平衡点 E_0 是稳定的。

5. 总结

通过对经典 Lorenz 方程施加反馈控制方法, 本文得到了一类三维混沌电路方程, 并对该混沌系统的局部动力学行为进行了研究。首先, 研究了原点平衡点的局部稳定性, 得到了原点平衡点的六种类型。其次, 研究了该系统在原点平衡点处发生的 Pitchfork 分岔行为, 得到了发生 Pitchfork 分岔的临界条件, 并且列举出四种情况。最后, 研究了该系统在原点平衡点发生的 Hopf 分岔行为, 得到了在原点发生 Hopf 分岔的参数条件, 证明了周期轨的存在性, 并通过数值仿真的方式进行了验证。

基金项目

国家自然科学基金 (11701104); 广东省普通高校特色创新项目 (2016KTSCX076)。

参考文献

- [1] Lorenz, E. (1963) Deterministic Non-Periodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)
- [2] Hirsh, M.W., Smale, S. and Devaney, R.L. (2007) *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier Academic Press, New York.
- [3] Shilnikov, L.P., Shilnikov, A.L., Turaev, D.V., *et al.* (2001) *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics*. World Scientific, Singapore. <https://doi.org/10.1142/4221>
- [4] Wiggins, S. (1990) *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4067-7>
- [5] Hastings, S. and Troy, W. (1996) A Shooting Approach to Chaos in the Lorenz Equations. *Journal of Differential Equations*, **127**, 41-53. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0060>
- [6] Chen, A.M., Lu, J.A., Lu, J.H. and Yu, S.M. (2006) Generating Hyperchaotic Lü Attractor via State Feedback Control. *Physica A*, **364**, 103-110. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.09.039>
- [7] Zhong, L., Rahman, M.F., Hu, Y.W., Lim, K.W. and Rahman, M.A. (1999) A Direct Torque Controller for Permanent Magnet Synchronous Motor Drives. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, **14**, 637-642. <https://doi.org/10.1109/60.790928>
- [8] Chen, Y.M. and Yang, Q.G. (2014) Complex Dynamics in the Unified Lorenz-Type System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **24**, Article ID: 1450055.
- [9] 陈玉明, 陈春涛. 一类 Lorenz 型超混沌系统的 Zero-Zero-Hopf 分岔及共存吸引子研究 [J]. *动力学与控制学报*, 2018, 16(3): 227-232.
- [10] 张锦炎, 冯贝叶. *常微分方程几何理论与分支问题* [M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.

- [11] 马知恩, 周义仓, 李承志. 常微分方程定性方法与稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [12] Llibre, J. and Zhang, X. (2002) Invariant Algebraic Surfaces of the Lorenz System. *Journal of Mathematical Physics*, **43**, 1622-1645. <https://doi.org/10.1063/1.1435078>

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面<http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页<http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: aam@hanspub.org