Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(5), 977-983
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.85111

Existence of Solution for One Class of Singular p-Laplacian Problem

Lei Li

Department of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin Guangxi
Email: 986389480@qq.com

Received: May 9th, 2019; accepted: May 24th, 2019; published: May 31st, 2019

Abstract

In this paper, we study the existence of weak solutions for the Dirichlet problems for one class of singular p-Laplacian equations. Our proof combines the presense of sub and supersolution theory.

Keywords

Sub and Super Solution, Singular, p-Laplacian Equations

一类奇异p-Laplace方程解的存在性问题

李 磊

广西师范大学数学与统计学院，广西 桂林
Email: 986389480@qq.com

收稿日期：2019年5月9日；录用日期：2019年5月24日；发布日期：2019年5月31日

摘 要

本文利用上下解方法讨论一类奇异p-Laplace方程的边值问题解的存在性。

文章引用: 李磊. 一类奇异p-Laplace方程解的存在性问题[J]. 应用数学进展, 2019, 8(5): 977-983.
DOI: 10.12677/aam.2019.85111

关键词

上下解，奇异，p-Laplace

1. 引言

因为含有奇异p-Laplace算子$\triangle_p(\triangle_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u))$ 的微分方程的边值问题在核物理、气体动力学、流体力学、边层理论以及非线性光学等领域有着广泛的应用，所以对此类问题的研究吸引了很多学者的目光。

本文考虑一类含有奇异p-Laplace方程的边值问题：

$$\begin{cases} -a(\int|u|^q)div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = u^{-\alpha}f(\int|u|^m) + u^{\beta}g(\int|u|^r), & x\in\Omega, \\ u>0, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性。该方程满足下列假设：
$(H_1)\Omega\subset R^N$，是一个有界的区域且边界光滑。
$(H_2)q,m,r\in[1,+\infty),\alpha\in[0,1),\beta\in[0,+\infty)$。
$(H_3)a,f,g:[0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty)$ 是连续的函数且$f,g\in L^{\infty}([0,+\infty))$。
$(H_4)\ \inf\limits_{t\in[0,+\infty)}a(t),\ \inf\limits_{t\in[0,+\infty)}f(t),\ \inf\limits_{t\in[0,+\infty)}g(t)\geqslant a_0>0$。

解的存在性问题一直是偏微分方程研究中的重要课题，注意到$p=2$时，方程(1)化为一类含有奇异Laplace方程的边值问题：

$$\begin{cases} -a(\int|u|^q)\Delta u = u^{-\alpha}f(\int|u|^m) + u^{\beta}g(\int|u|^r), & x\in\Omega, \\ u>0, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

文 [1]在满足$H_1\sim H_4$的假设条件下，使用上下解方法证明方程(2)至少存在一个解。另外，方程(2) 中$a,f,g=1$的特殊情况可参考文献 [2] [3]。

在偏微分方程理论中，解的存在性与不存在性都与所选取的函数空间有关，本文所选取的函

数空间是依赖于参数p的，其中$p \geq 2$。之所以这样做是为了使结果具有一般性。需要强调的是，方程(1)，方程(2)所选取的函数空间是不同的。由文 [1]知，方程(2)选取的函数空间是$H_0^1(\Omega)$ 并且证明了解存在且解$u \in H_0^1(\Omega)$。本文选取的函数空间是$W_0^{1,p}(\Omega)$, 本文的目的在于使用上下解方法证明方程(1)的解存在且解$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$。

此外，由于p-Laplace算子的非线性性，对比于$p=2$的特殊情形解的存在性结果的建立需要更精细的讨论。本文将得到与文 [1] $p=2$情形相一致的结果(本文规定$\int u = \int_\Omega u dx$)。

本文所得的结果是：

定理1： 在满足$(H_1)\sim(H_4)$的假设下，方程(1)至少存在一个非负弱解。

2. 预备知识

为证明定理1我们先做一些必要准备。

定理2.1：(见文献 [4] [5])在$W_0^{1,p}(\Omega)$ 中非负函数$\underline{u},\overline{u}$称为方程(1) 的弱下解和弱上解是指，对任意试验函数$v \in W_0^{1,p}(\Omega)$,$v \geq 0$，满足

$$a(\int |\underline{u}|^q)\int |\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\nabla v \leq f(\int |\underline{u}|^m)\int(\underline{u})^{-\alpha}v + g(\int |\underline{u}|^r)\int(\underline{u})^{\beta}v,$$
$$a(\int |\overline{u}|^q)\int |\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\nabla v \geq f(\int |\overline{u}|^m)\int(\overline{u})^{-\alpha}v + g(\int |\overline{u}|^r)\int(\overline{u})^{\beta}v.$$

定理2.2：(见文献 [6])当$1 \leq s \leq \infty$时，$L^s(\Omega)$是Banach空间。

定理2.3：(见文献 [7])当$1 < p < \infty$时，$W_0^{1,p}(\Omega)$是自反的Banach空间。

定义2.4：(见文献 [8])设X是一个B^*空间，$\{x_n\} \subset X, x \in X$。称$\{x_n\}$弱收敛到$x$，记做$x_n \rightharpoonup x$，是指：对于$\forall f \in X^*$都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$。这时$x$称做点列$\{x_n\}$的弱极限。

定理2.5：(见文献 [8])(Eberlein-Smulian定理)自反空间的单位(闭)球是弱(自)列紧的。

引理2.6：(见文献 [8])在自反的Banach空间X中，集合的弱列紧性与有界性是等价的。

定理2.7：在满足$(H_1)\sim(H_4)$的假设下取$\delta \in (0,1]$，下述方程存在解。

$$\begin{cases} -a(\int |u|^q)\Delta_p u = (|u|^2+\delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f(\int |u|^m) + u^\beta g(\int |u|^r), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

证明：第一步，构造方程(3)的弱上解：

假设$R>0$足够大使得：$\Omega \subset B_R(0)$，并假设$e \in C^2(\overline{\Omega})$是下面的方程的解：

$$\begin{cases} -\Delta_p e = M^\beta, & x \in B_R(0), \\ e = 0, & x \in \partial B_R(0). \end{cases} \tag{4}$$

那么，存在足够大的$M>0$使得：

$$\begin{cases} -\Delta_p(Me)=M^{p-1+\beta}\geq \frac{1}{a_0}((Me)^{-\alpha}\|f\|_\infty+(Me)^\beta\|g\|_\infty), & x\in\ \Omega, \\ \quad Me>0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

令：$\overline{u}=Me$，再取$v\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且$v\geq 0$为试验函数对(5)式进行分步积分可得：

$$\begin{aligned} \int|\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\nabla v &\geq \frac{1}{a_0}\int((\overline{u})^{-\alpha}v\|f\|_\infty+(\overline{u})^\beta v\|g\|_\infty) \\ &\geq \frac{1}{a_0}\int((|\overline{u}|^2+\delta)^{-\alpha}v\|f\|_\infty+(\overline{u})^\beta v\|g\|_\infty) \\ &\geq \frac{1}{a(\int|\overline{u}|^q)}(\int(|\overline{u}|^2+\delta)^{-\alpha}vf(\int|\overline{u}|^m)+(\overline{u})^\beta vg(\int|\overline{u}|^r) \end{aligned} \tag{6}$$

两边同乘以$a(\int|\overline{u}|^q)$得：

$$\begin{aligned} &a(\int|\overline{u}|^q)\int|\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\nabla v \\ &\geq f(\int|\overline{u}|^m)\int(|\overline{u}|^2+\delta)^{-\alpha}v+g(\int|\overline{u}|^r)\int(\overline{u})^\beta v. \end{aligned} \tag{7}$$

由定义2.1知$\overline{u}=Me$是我们想要构造的弱上解。

第二步，构造方程(3)的弱下解：

设λ_1是下列方程：

$$\begin{cases} -\Delta_p\phi_1=\lambda_1\phi_1^{p-1}, & x\in\Omega, \\ \ \phi_1>0, & x\in\Omega, \\ \phi_1=0, \frac{\partial\phi_1}{\partial\nu}<0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

的第一特征值，ν是外法向单位向量，且$\phi_1\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$。

令$\underline{u}=\varepsilon\phi_1$，再设$v\in W_0^{1,p}(\Omega)$且$v\geq 0$为试验函数，由(8) 式得：

$$\begin{aligned} \int|\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\nabla v &= \varepsilon^{p-1}\int|\nabla\phi_1|^{p-2}\nabla\phi_1\nabla v \\ &= \varepsilon^{p-1}\int[|\nabla\phi_1|^{p-2}\nabla\phi_1\nabla(\phi_1 v)-|\nabla\phi_1|^p]v \\ &= \varepsilon^{p-1}\int(\lambda_1\phi_1^p-|\nabla\phi_1|^p)v \end{aligned} \tag{9}$$

由于在$\partial\Omega$上：$\frac{\partial\phi_1}{\partial\nu}<0,\phi_1=0$。因此存在$\eta>0$使得在$\overline{\Omega}_\eta=\{x\in\Omega:dist(x,\partial\Omega)\leq\eta\}$上满足：

$$\lambda_1\phi_1^p-|\nabla\phi_1|^p\leq 0.$$

从而，

$$\begin{aligned}\varepsilon^{p-1}\int_{\overline{\Omega}_\eta}(\lambda_1\phi_1^p-|\nabla\phi_1|^p)vdx\le 0\le\frac{a_0}{\Gamma}\int_{\overline{\Omega}_\eta}\{\frac{1}{[(\varepsilon\phi_1)^2+\delta]^{\frac{\alpha}{2}}}v+(\varepsilon\phi_1)^\beta v\}dx\\ \le\frac{1}{a(\int|\varepsilon\phi_1|^q)}\{f(\int|\varepsilon\phi_1|^m)\int_{\overline{\Omega}_\eta}(|\varepsilon\phi_1|^2+\delta)^{\frac{-\alpha}{2}}vdx\\ +g(\int|\varepsilon\phi_1|^r)\int_{\overline{\Omega}_\eta}(\varepsilon\phi_1)^\beta vdx\}\end{aligned}\tag{10}$$

其中：

$$\Gamma=max(a(t):t\in[0,\|\overline{u}\|_\infty^q|\Omega|]).\tag{11}$$

再在$\Omega_0=\Omega\setminus\overline{\Omega}_\eta$中取$\varepsilon$足够小使得满足下列不等式：

$$\varepsilon^{p-1}\lambda_1\phi_1^{p-1}\le\frac{a_0}{\Gamma}[\frac{1}{[(\varepsilon\phi_1)^2+\delta]^{\frac{\alpha}{2}}}+(\varepsilon\phi_1)^\beta]$$

再结合(9)式知：

$$\begin{aligned}\varepsilon^{p-1}\int_{\Omega_0}(\lambda_1\phi_1^p-|\nabla\phi_1|^p)vdx\le\frac{a_0}{\Gamma}\int_{\Omega_0}\{\frac{1}{[(\varepsilon\phi_1)^2+\delta]^{\frac{\alpha}{2}}}v+(\varepsilon\phi_1)^\beta v\}dx\\ \le\frac{1}{a(\int|\varepsilon\phi_1|^q)}\{f(\int|\varepsilon\phi_1|^m)\int_{\Omega_0}(|\varepsilon\phi_1|^2+\delta)^{\frac{-\alpha}{2}}vdx\\ +g(\int|\varepsilon\phi_1|^r)\int_{\Omega_0}(\varepsilon\phi_1)^\beta vdx\}\end{aligned}\tag{12}$$

令$\underline{u}=\varepsilon\phi_1$再结合(9)，(10) 和(12)可得：

$$\begin{aligned}&a(\int|\underline{u}|^q)\int|\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\nabla v\\ &\le f(\int|\underline{u}|^m)\int(|\underline{u}|^2+\delta)^{-\alpha}v+g(\int|\underline{u}|^r)\int(\underline{u})^\beta v\end{aligned}\tag{13}$$

由定义2.1知：$\underline{u}=\varepsilon\phi_1$就是我们要找的弱下解。

第三步，证明方程(3)存在非负弱解：

对于充分大的M，充分小的ε，总有$\varepsilon\phi_1\le Me$由(7)和(13)式知：(3) 式至少存在一个非负弱解u_δ且满足$\varepsilon\phi_1\le u_\delta\le Me.\square$

推论2.8 当$n\in N$时,根据定理2.7知，下述方程：

$$\begin{cases}-a(\int|u_n|^q)\Delta_p u_n=(|u_n|^2+\frac{1}{n})^{-\frac{\alpha}{2}}f(\int|u_n|^m)+u_n^\beta g(\int|u_n|^r), & x\in\Omega,\\ u_n=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{14}$$

至少存在一个非负弱解，且满足$0\le\underline{u}\le u_n\le\overline{u}$”

3. 定理1的证明

证明：第一步，当$s \in [1, +\infty)$时,证明方程(13)中的u_n在$W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^s(\Omega)$ 中有界：

取任意$v \in W_0^{1,p}(\Omega)$为试验函数再对方程(14)分步积分得：

$$a(\int |u_n|^q) \int |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v = \int \frac{f(\int |u_n|^m)}{(|u_n|^2 + \frac{1}{n})^{\frac{\alpha}{2}}} v + \int g(\int |u_n|^r) u_n^{\beta} v \tag{15}$$

令$\Gamma_1 = max(f(t) : t \in [0, \|\overline{u}\|_\infty^m |\Omega|]), \Gamma_2 = max(g(t) : t \in [0, \|\overline{u}\|_\infty^r |\Omega|])$，再令：$C = max\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$，在(15)式中取$v = u_n$利用上述条件可得下述不等式：

$$a_0 \int |\nabla u_n|^p \leq C \int (u_n^{1-\alpha} + u_n^{1+\beta}) \leq C \int (\overline{u}^{1-\alpha} + \overline{u}^{1+\beta}) \leq C(K^{1-\alpha} + K^{1+\beta})|\Omega| \tag{16}$$

由(16)式知，u_n在$W_0^{1,p}(\Omega)$中有界。

对任意$s \geq 1$，取$K = max(\overline{u}(x), x \in \overline{\Omega})$，那么有：

$$(\int |u_n|^s)^{\frac{1}{s}} \leq (\int |\overline{u}|^s)^{\frac{1}{s}} \leq K|\Omega|^{\frac{1}{s}}, \tag{17}$$

由(17)式，知$u_n \in L^s(\Omega)$且在$L^s(\Omega)$ 中有界。

第二步，证明存在$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$，使得$u_n \rightharpoonup u$。

由定义2.3知$W_0^{1,p}(\Omega)$是自反的Banach空间。再结合(16)式,由定理2.5，引理2.6知存在子列仍记为$\{u_n\}$ 使得$u_n \rightharpoonup u$。

对于任意$v \in W_0^{1,p}(\Omega)$已知$u_n \rightharpoonup u$在$W_0^{1,p}(\Omega)$ 中，根据定义2.4知：

$$\int |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v \to \int |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v. \tag{18}$$

第三步，证明对于任意$s \in [1, +\infty)$存在$u_n \to u$在$L^s(\Omega)$ 中：

取第二步子列$\{u_n\}$的一个子列仍记为$\{u_n\}$，因为$\{u_n\}$满足$0 \leq \underline{u} \leq u_n \leq \overline{u}$，因此存在$\{u_n\}$ 的子列仍记为$\{u_n\}$，使得在Ω中几乎处处有$u_n \to u$"

再根据定义2.1知$L^s(\Omega)$是Banach空间，因此,$u_n \to u$ 在$L^s(\Omega)$ 中。第四步，综合第三步的结果，以及条件$H_2 H_3$我们可以得到：

$$\begin{aligned} a(\int |u_n|^q) &\to a(\int |u|^q), \\ f(\int |u_n|^m) &\to f(\int |u|^m), \\ g(\int |u_n|^r) &\to g(\int |u|^r). \end{aligned} \tag{19}$$

第五步：证明方程(1)存在解：

由(18)，(19)式知，在方程(14)中令$n \to \infty$ 可得方程(1)。由前面证明可知对任意$n \geq 1$ 方程(14) 存在非负弱解，因此方程(1)存在非负弱解。

因此，定理1得证。□

基金项目

国家自然科学基金(11771103)。

参考文献

[1] Alves, C.O. and Covei, D.P. (2015) Existence of Solution for a Class of Nonlocal Elliptic Problem via Sub-Supersolution Method. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **23**, 1-8. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.11.003

[2] Coclite, M.M. and Palmieri, G. (1989) On a Singular Nonlinear Dirichlet Problem. *Communications in Partial Differential Equations*, **14**, 1315-1327. https://doi.org/10.1080/03605308908820656

[3] Zhang, Z. and Yu, J. (2000) On a Singular Nonlinear Dirichlet Problem with a Convection Term. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **32**, 916-927. https://doi.org/10.1137/S0036141097332165

[4] Dravek, P. and Hernandez, J. (2001) Existence and Uniqueness of Positive Solutions for Some Quasilinear Elliptic Problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, **44**, 189-204. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00258-8

[5] Evans, L.C. (1998) Partial Differential Equations. American Mathematical Society, New York.

[6] 王明新. 索伯列夫空间[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[7] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. (1977) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-96379-7

[8] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1987.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org