Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(5), 998-1006
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.85114

Hans汉斯

A New Grüss Type Inequality

Xiaoxue Cui*, **Yongshun Liang, Wei Xiao**

Institute of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu
Email: *1884499489@163.com

Received: May 9th, 2019; accepted: May 24th, 2019; published: May 31st, 2019

Abstract

Based on the application of fractal analysis, this paper discusses the Grüss type inequalities including the Riemann-Liouville fractional integral and obtains an improved result. In the end, this paper also proves that Theorem 2 of [1] and Theorem 9 of [2] are a special form of the conclusion of this paper.

Keywords

Grüss Inequality, Riemann-Liouville Fractional Integral, Fractional Integral

一个新的Grüss型不等式

崔晓雪*，**梁永顺，肖　伟**

南京理工大学理学院，江苏　南京
Email: *1884499489@163.com

收稿日期：2019年5月9日；录用日期：2019年5月24日；发布日期：2019年5月31日

摘　要

基于分形分析应用需要，本文讨论了Riemann-Liouville分数阶积分的Grüss型不等式，得到了一个改进的结果。文章最后还证明了[1]中的定理2和[2]中的定理9是本文所得结论的特殊形式。

关键词

Grüss不等式，Riemann-Liouville分数阶积分，分数阶积分

*通讯作者。

文章引用: 崔晓雪, 梁永顺, 肖伟. 一个新的 Grüss 型不等式[J]. 应用数学进展, 2019, 8(5): 998-1006.
DOI: 10.12677/aam.2019.85114

1. 引言

积分不等式在研究积分与微分方程中起着非常重要的作用。本文讨论 Grüss 不等式。

1935 年，G. Grüss [3]提出了 Grüss 不等式：

命题 1.1 [3]：设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是 $[a,b]$ 上两个可积函数。若存在 $m,M,n,N\in\mathbb{R}$，使得当 $t\in[a,b]$ 时，有 $m\le f(t)\le M, n\le g(t)\le N$，则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{4}(M-m)(N-n). \tag{1.1}$$

Grüss 不等式在 1935 年提出后备受关注。学者们基于经典 Grüss 不等式(即 1.1 式)建立了大量的 Grüss 型不等式，并将其应用于一些分析问题中。

1993 年，Mitrinovic [4]考察了 Grüss 不等式的离散形式以及行列式形式，并将其用于估计集合 $A=\{f(t)|f(t)\in AC[a,b],f'(t)\in L_2[a,b]\}$ （$AC[a,b]$ 表示区间 $[a,b]$ 上的绝对连续函数)中元素的范数。1998 年，Dragomir [5]将经典 Grüss 不等式中的积分推广到加权积分，得到了一个 Grüss 型不等式。然后又讨论被积函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是否满足 Lipschitz 条件和 Hölder 条件，从而给出一系列 Grüss 型不等式。1999 年，Dragomir [6]将 Grüss 不等式应用于内积空间，从而得到了一个新的 Grüss 型不等式。2002 年，Dragomir [7]将 Grüss 型不等式[5]中的加权积分推广为 Riemann-Stieltjes 积分，并讨论被积函数的各种情形，从而得到一系列新的 Grüss 型不等式。2010 年，Moslehian [8]将 Grüss 不等式推广到了线性算子空间。

Grüss 不等式在发展初期，人们主要考虑在不同空间中的 Grüss 型不等式。而随着空间理论的成熟，人们开始将关注点转向 Grüss 不等式中积分(整数阶积分)的变化。例：1998 年，Dragomir [5]将经典 Grüss 不等式中的积分推广到加权积分；2002 年，Dragomir [7]将 Grüss 型不等式[5]中的加权积分推广为 Riemann-Stieltjes 积分等。随着积分理论的发展，一些学者开始考虑分数阶积分与不等式的结合，例[9] [10] [11]。Grüss 不等式主要考虑与 Riemann-Liouville 分数阶积分结合。

2010 年，Dahmani [12]第一次将 Riemann-Liouville 分数阶积分与 Grüss 不等式结合在一起得到了分数阶积分不等式：

命题 1.2：(见[12]的定理 3.1)设 $f(t)$，$g(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上两个可积函数。若存在常数 m,M,n,N，使得 $f(t)$ 和 $g(t)$ 满足 $m\le f(t)\le M, n\le g(t)\le N, t\in[0,\infty)$。那么当 $t>0,\alpha>0$ 时，有

$$\left|\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\alpha f(t)g(t)-J^\alpha f(t)J^\alpha g(t)\right|\le\left(\frac{t^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}\right)^2(M-m)(N-n), \tag{1.2}$$

这里 $J^\alpha f(t)$ 是 $f(t)$ 的 Riemann-Liouville 分数阶积分(将在第二部分给出它的定义)。2016 年，Erden [1]建立一个新的分数阶积分，并得到一个与此积分有关的 Grüss 型不等式：

命题 1.3：(见[1]的定理 2)设 $h(t):[0,\infty)\to(0,\infty)$ 是 $[0,\infty)$ 上的单调增函数并在 $(0,\infty)$ 上有连续导函数 $h'(t)$。若 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上两个可积函数并且满足

$$m\le f(t)\le M, n\le g(t)\le N; m,M,n,N\in\mathbb{R}, t\in[0,\infty).$$

那么当 $\alpha>0$ 时，有

$$\left|\frac{\left(h(t)-h\right)(0)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}f(t)g(t)-J_h^{\alpha}f(t)J_h^{\alpha}g(t)\right|\le\left(\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+1)}\right)^2(M-m)(N-n), \tag{1.3}$$

这里 $J_h^{\alpha}f(t)$ 是 $f(t)$ 推广的 Riemann-Liouville 分数阶积分(将在第二部分给出其定义)。

在过去的几年中，人们只考虑 Grüss 型不等式中被积函数的限制条件是常数的情况。而近些年，人们开始关注其限制条件是可积函数的情形。2014 年，Tariboon [2]将[12]中被积函数 $f(t),g(t)$ 的四个常边界 m,M,n,N 用四个可积函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\psi_1(t),\psi_2(t)$ 取代，从而得到新的 Grüss 型不等式：

命题 1.4：(见[2]的定理 9)设 $f(t),g(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上两个可积函数。若

(C_1) 在 $[0,\infty)$ 上存在两个可积函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 且满足

$$\varphi_1(t)\le f(t)\le\varphi_2(t),t\in[0,\infty). \tag{1.4}$$

(C_2) 在 $[0,\infty)$ 上存在两个可积函数 $\psi_1(t),\psi_2(t)$ 且满足

$$\psi_1(t)\le g(t)\le\psi_2(t),t\in[0,\infty). \tag{1.5}$$

那么当 $t>0,\alpha>0$ 时，有

$$\left|\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}f(t)g(t)-J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t)\right|\le\sqrt{S(f,\varphi_1,\varphi_2)S(g,\psi_1,\psi_2)}, \tag{1.6}$$

这里

$$\begin{aligned}S(x,y,z)=&\left(J^{\alpha}z(t)-J^{\alpha}x(t)\right)\left(J^{\alpha}x(t)-J^{\alpha}y(t)\right)\\&+\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}y(t)x(t)-J^{\alpha}y(t)J^{\alpha}x(t)\\&+\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}z(t)x(t)-J^{\alpha}z(t)J^{\alpha}x(t)\\&-\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}y(t)z(t)+J^{\alpha}y(t)J^{\alpha}z(t)\end{aligned} \tag{1.7}$$

从 Grüss 不等式的发展历程来看，我们可从两个方面来研究它。一方面，我们考虑在 Grüss 不等式中使用何种类型的分数阶积分。另一方面，考虑不等式中被积函数的限制条件。由于 Rieamm-Liouville 分数阶积分在分形分析和相关理论中有着广泛的应用，例[13] [14]。因此本文讨论有关推广的 Riemann-Liouville 分数阶积分 J_h^{α} 的 Grüss 型不等式。而从命题 1.3 和命题 1.4 中，我们又可以将被积函数的限制条件推广到函数的情形。以上就是本文研究的主要内容。

我们将在第二部分给出本文必要的定义及引理，在第三部分给出本文结论。最后可以看出本文结论是新的。并且本文结论可以用于无界函数(将在例子中展出)。

2. 定义和引理

定义 2.1 [1]：设 $f(t)\in L_1(0,\infty)$，则 $f(t)$ 的 $\alpha\ge 0$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分是

$$J^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s,t>0, \tag{2.1}$$

这里 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}u^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$。

定义 2.2 [1]：设 $h(t):[0,\infty)\to(0,\infty)$ 是 $[0,\infty)$ 上的单调增函数并在 $[0,\infty)$ 上有连续导函数 $h'(t)$。若

$f(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上可积函数，则 $f(t)$ 的 $\alpha\ge 0$ 阶推广的 Riemann-Liouville 分数阶积分是

$$J_h^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{h'(s)}{\left(h(t)-h(s)\right)^{1-\alpha}}f(s)\mathrm{d}s,t>0, \tag{2.2}$$

这里 $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty u^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$。

下面给出一个基本引理，以便后面的应用。

引理 2.3: 设 $h(t):[0,\infty)\to(0,\infty)$ 是 $[0,\infty)$ 上的单调增函数并在 $(0,\infty)$ 上有连续导函数 $h'(t)$。若 $f(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上可积函数并满足条件(C_1)。那么当 $t>0,\alpha>0$ 时，有

$$\begin{aligned}&\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^\alpha f^2(t)-\left(J_h^\alpha f(t)\right)^2=\left(J_h^\alpha\varphi_2(t)-J_h^\alpha f(t)\right)\left(J_h^\alpha f(t)-J_h^\alpha\varphi_1(t)\right)\\&-\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^\alpha\left(\varphi_2(t)-f(t)\right)\left(f(t)-\varphi_1(t)\right)+\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^\alpha\left(\varphi_1(t)f(t)\right)-J_h^\alpha\varphi_1(t)J_h^\alpha f(t)\\&+\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^\alpha\left(\varphi_2(t)f(t)\right)-J_h^\alpha\varphi_2(t)J_h^\alpha f(t)-\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^\alpha\left(\varphi_1(t)\varphi_2(t)\right)+J_h^\alpha\varphi_1(t)J_h^\alpha\varphi_2(t)\end{aligned} \tag{2.3}$$

证： 当 $x>0,y>0$ 时，有

$$\begin{aligned}&\left(\varphi_2(y)-f(y)\right)\left(f(x)-\varphi_1(x)\right)+\left(\varphi_2(x)-f(x)\right)\left(f(y)-\varphi_1(y)\right)\\&-\left(\varphi_2(x)-f(x)\right)\left(f(x)-\varphi_1(x)\right)-\left(\varphi_2(y)-f(y)\right)\left(f(y)-\varphi_1(y)\right)\\&=f^2(x)+f^2(y)-2f(x)f(y)+f(x)\varphi_2(y)+\varphi_1(x)f(y)-\varphi_1(x)\varphi_2(y)\\&\quad+\varphi_2(x)f(y)+f(x)\varphi_1(y)-\varphi_2(x)\varphi_1(y)-\varphi_2(x)f(x)+\varphi_1(x)\varphi_2(x)\\&\quad-\varphi_1(x)f(x)-\varphi_2(y)f(y)-\varphi_1(y)f(y)+\varphi_1(y)\varphi_2(y)\end{aligned}$$

上式两边同乘以

$$\frac{h'(x)}{\Gamma(\alpha)\left(h(t)-h(x)\right)^{1-\alpha}},x\in(0,t),t>0$$

并对等式两边关于 x 在 $(0,t)$ 上积分，得到

$$\begin{aligned}&\left(\varphi_2(y)-f(y)\right)\left(J_h^\alpha f(t)-J_h^\alpha\varphi_1(t)\right)+\left(J_h^\alpha\varphi_2(t)-J_h^\alpha f(t)\right)\left(f(y)-\varphi_1(y)\right)\\&-\left(J_h^\alpha\varphi_2(t)-f(t)\right)\left(f(t)-\varphi_1(t)\right)-\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\varphi_2(y)-f(y)\right)\left(f(y)-\varphi_1(y)\right)\\&=J_h^\alpha f^2(t)+\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f^2(y)-2f(y)J_h^\alpha f(t)+\varphi_2(y)J_h^\alpha f(t)-\varphi_2(y)J_h^\alpha\varphi_1(t)\\&\quad+f(y)J_h^\alpha\varphi_2(t)+f(y)J_h^\alpha\varphi_1(t)+\varphi_1(y)J_h^\alpha f(t)-\varphi_1(y)J_h^\alpha\varphi_2(t)-J_h^\alpha\left(\varphi_2(t)f(t)\right)\\&\quad+J_h^\alpha\left(\varphi_1(t)\varphi_2(t)\right)-J_h^\alpha\left(\varphi_1(t)f(t)\right)-\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\varphi_2(y)f(y)\\&\quad+\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\varphi_1(y)\varphi_2(y)-\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\varphi_1(y)f(y)\end{aligned}$$

再对上式两边同乘上 $h'(y)\Big/\left(\Gamma(\alpha)\left(h(t)-h(y)\right)^{1-\alpha}\right),y\in(0,t),t>0$，并对 y 在 $(0,t)$ 上积分就可以得到(2.3)。

3. 定理及证明

现给出有关推广的 Riemann-Liouville 分数阶积分 J_h^{α} 的 Grüss 型不等式。

定理 3.1： 设 $h(t):[0,\infty)\to(0,\infty)$ 是 $[0,\infty)$ 上的单调增函数并在 $(0,\infty)$ 上有连续导函数 $h'(t)$。若 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上两个可积函数并满足条件(C_1)和(C_2)。那么当 $t>0,\alpha>0$ 时，可以得到

$$\left|\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}f(t)g(t)-J_h^{\alpha}f(t)J_h^{\alpha}g(t)\right|\le\sqrt{S^*\left(f,\varphi_1,\varphi_2\right)S^*\left(g,\psi_1,\psi_2\right)},\tag{3.1}$$

这里

$$\begin{aligned}S^*(x,y,z)=&\left(J_h^{\alpha}z(t)-J_h^{\alpha}x(t)\right)\left(J_h^{\alpha}x(t)-J_h^{\alpha}y(t)\right)\\&+\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}y(t)x(t)-J_h^{\alpha}y(t)J_h^{\alpha}x(t)\\&+\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}z(t)x(t)-J_h^{\alpha}z(t)J_h^{\alpha}x(t)\\&-\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}y(t)z(t)+J_h^{\alpha}y(t)J_h^{\alpha}z(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

证： 令

$$\begin{aligned}T(x,y)&=\left(f(x)-f(y)\right)\left(g(x)-g(y)\right)\\&=f(x)g(x)+f(y)g(y)-f(x)g(y)-f(y)g(x),x,y\in(0,t),t>0\end{aligned}\tag{3.3}$$

对上式两边同乘以

$$\frac{h'(x)h'(y)}{2\Gamma^2(\alpha)\left(h(t)-h(x)\right)^{1-\alpha}\left(h(t)-h(y)\right)^{1-\alpha}}$$

并分别对 x 和 y 在 $(0,t)$ 上积分，有

$$\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t\int_0^t\frac{h'(x)h'(y)}{\left(h(t)-h(x)\right)^{1-\alpha}\left(h(t)-h(y)\right)^{1-\alpha}}T(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}f(t)g(t)-J_h^{\alpha}f(t)J_h^{\alpha}g(t)\tag{3.4}$$

现在将(3.3)式中的 $T(x,y)$ 代入(3.4)的左边，从而由 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t\int_0^t\frac{h'(x)h'(y)}{\left(h(t)-h(x)\right)^{1-\alpha}\left(h(t)-h(y)\right)^{1-\alpha}}T(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2\\&\le\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t\int_0^t\frac{h'(x)h'(y)}{\left(h(t)-h(x)\right)^{1-\alpha}\left(h(t)-h(y)\right)^{1-\alpha}}\left(f(x)-f(y)\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad\times\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t\int_0^t\frac{h'(x)h'(y)}{\left(h(t)-h(x)\right)^{1-\alpha}\left(h(t)-h(y)\right)^{1-\alpha}}\left(g(x)-g(y)\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}f^2(t)-\left(J_h^{\alpha}f(t)\right)^2\right)\left(\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}g^2(t)-\left(J_h^{\alpha}g(t)\right)^2\right)\end{aligned}\tag{3.5}$$

再将(3.4)式代入(3.5)有

$$\left(\frac{(h(t)-h(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}f(t)g(t)-J_h^{\alpha}f(t)J_h^{\alpha}g(t)\right)^2 \\ \le\left(\frac{(h(t)-h(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}f^2(t)-\left(J_h^{\alpha}f(t)\right)^2\right)\times\left(\frac{(h(t)-h(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}g^2(t)-\left(J_h^{\alpha}g(t)\right)^2\right) \tag{3.6}$$

因为 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是两个在 $[0,\infty)$ 上满足条件(C_1)和(C_2)的可积函数，
所以有

$$(\psi_2(t)-g(t))(g(t)-\psi_1(t))\ge 0, t\ge 0$$

和

$$(\varphi_2(t)-f(t))(f(t)-\varphi_1(t))\ge 0, t\ge 0$$

从而

$$\frac{(h(t)-h(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}(\psi_2(t)-g(t))(g(t)-\psi_1(t))\ge 0$$

且

$$\frac{(h(t)-h(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}(\varphi_2(t)-f(t))(f(t)-\varphi_1(t))\ge 0$$

因此由引理 2.3，有

$$\begin{aligned}\frac{(h(t)-h(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}g^2(t)-\left(J_h^{\alpha}g(t)\right)^2 &\le\left(J_h^{\alpha}\psi_2(t)-J_h^{\alpha}f(t)\right)\left(J_h^{\alpha}f(t)-J_h^{\alpha}\psi_1(t)\right)\\ &+\frac{(h(t)-h(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}(\psi_1(t)f(t))-J_h^{\alpha}\psi_1(t)J_h^{\alpha}f(t)\\ &+\frac{(h(t)-h(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}(\psi_2(t)f(t))-J_h^{\alpha}\psi_2(t)J_h^{\alpha}f(t)\\ &-\frac{(h(t)-h(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}(\psi_1(t)\psi_2(t))+J_h^{\alpha}\psi_1(t)J_h^{\alpha}\psi_2(t)\\ &=S^*(g,\psi_1,\psi_2)\end{aligned} \tag{3.7}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{(h(t)-h(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}f^2(t)-\left(J_h^{\alpha}f(t)\right)^2 &=\left(J_h^{\alpha}\varphi_2(t)-J_h^{\alpha}f(t)\right)\left(J_h^{\alpha}f(t)-J_h^{\alpha}\varphi_1(t)\right)\\ &+\frac{(h(t)-h(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}(\varphi_1(t)f(t))-J_h^{\alpha}\varphi_1(t)J_h^{\alpha}f(t)\\ &+\frac{(h(t)-h(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}(\varphi_2(t)f(t))-J_h^{\alpha}\varphi_2(t)J_h^{\alpha}f(t)\\ &-\frac{(h(t)-h(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^{\alpha}(\varphi_1(t)\varphi_2(t))+J_h^{\alpha}\varphi_1(t)J_h^{\alpha}\varphi_2(t)\\ &=S^*(f,\varphi_1,\varphi_2)\end{aligned} \tag{3.8}$$

由(3.6)，(3.7)和(3.8)，(3.1)得证。

由下面给出的推论得到命题 1.3 和命题 1.4 是本文的一个特例。

推论 3.2： 若 $S^*(f,\varphi_1,\varphi_2)=S^*(f,m,M)$ 且 $S^*(g,\psi_1,\psi_2)=S^*(g,n,N)$，那么有

$$\left|\frac{(h(t)-h(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^\alpha f(t)g(t)-J_h^\alpha f(t)J_h^\alpha g(t)\right|\le\left(\frac{(h(t)-h(0))^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}\right)^2(M-m)(N-n). \tag{3.9}$$

这里的推论 3.2 就是命题 1.3。

推论 3.3： 若 $h(t)=t$ (即 $J_h^\alpha=J^\alpha$)，那么有

$$\left|\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\alpha f(t)g(t)-J^\alpha f(t)J^\alpha g(t)\right|\le\sqrt{S(f,\varphi_1,\varphi_2)S(g,\psi_1,\psi_2)}. \tag{3.10}$$

这里的推论 3.3 就是命题 1.4。

对于一个无界函数来说，无法用常数来限制其边界但是可以用两个函数来限制其边界。因而积分不等式(1.2)和(1.3)对于无界函数不成立，但在一定的条件下积分不等式(3.1)对于无界函数是成立的。

例 3.3： 设 $h(t):[0,\infty)\to(0,\infty)$ 是 $[0,\infty)$ 上的单调增函数并在 $(0,\infty)$ 上有连续导函数 $h'(t)$。若 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上两个可积函数并满足 $h(t)-1\le f(t)\le h(t)$ 和 $h(t)\le g(t)\le h(t)+1$。那么当 $t>0,\alpha>0$ 时，有

$$\left|\frac{(h(t)-h(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^\alpha f(t)g(t)-J_h^\alpha f(t)J_h^\alpha g(t)\right|\le\sqrt{S^*(f,h(t)-1,h(t))S^*(g,h(t),h(t)+1)},$$

这里

$$\begin{aligned}
&S^*(f,h-1,h)\\
&=\frac{(h(t)-h(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^\alpha(h(t)-1)f(t)-\left(\frac{(h(t)-h(0))^\alpha(h(t)+\alpha h(0))}{\Gamma(\alpha+2)}-\frac{(h(t)-h(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)J_h^\alpha f(t)\\
&\quad-\left(\frac{(h(t)-h(0))^\alpha(h(t)+\alpha h(0))^2+h^2(t)+\alpha h^2(0)}{\Gamma(\alpha+3)}-\frac{(h(t)-h(0))^\alpha(h(t)+\alpha h(0))}{\Gamma(\alpha+2)}\right)\\
&\quad\times\frac{(h(t)-h(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(h(t)-h(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J_h^\alpha h(t)f(t)-\frac{(h(t)-h(0))^\alpha(h(t)+\alpha h(0))}{\Gamma(\alpha+2)}J_h^\alpha f(t)\\
&\quad+\left(\frac{(h(t)-h(0))^\alpha(h(t)+\alpha h(0))}{\Gamma(\alpha+2)}-\frac{(h(t)-h(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\frac{(h(t)-h(0))^\alpha(h(t)+\alpha h(0))}{\Gamma(\alpha+2)}\\
&\quad+\left(J_h^\alpha f(t)-\frac{(h(t)-h(0))^\alpha(h(t)+\alpha h(0))}{\Gamma(\alpha+2)}+\frac{(h(t)-h(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\\
&\quad\times\left(\frac{(h(t)-h(0))^\alpha(h(t)+\alpha h(0))}{\Gamma(\alpha+2)}-J_h^\alpha f(t)\right)
\end{aligned}$$

和

$$
\begin{aligned}
&S^{*}(g,h,h+1)\\
&=\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{h}^{\alpha}\left(h(t)+1\right)g(t)-\left(\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}\left(h(t)+\alpha h(0)\right)}{\Gamma(\alpha+2)}-\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)J_{h}^{\alpha}g(t)\\
&-\left(\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}\left(h(t)+\alpha h(0)\right)^{2}+h^{2}(t)+\alpha h^{2}(0)}{\Gamma(\alpha+3)}+\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}\left(h(t)+\alpha h(0)\right)}{\Gamma(\alpha+2)}\right)\\
&\times\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{h}^{\alpha}h(t)g(t)-\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}\left(h(t)+\alpha h(0)\right)}{\Gamma(\alpha+2)}J_{h}^{\alpha}g(t)\\
&+\left(\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}\left(h(t)+\alpha h(0)\right)}{\Gamma(\alpha+2)}+\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}\left(h(t)+\alpha h(0)\right)}{\Gamma(\alpha+2)}\\
&+\left(\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}\left(h(t)+\alpha h(0)\right)}{\Gamma(\alpha+2)}+\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{h}^{\alpha}g(t)\right)\\
&\times\left(J_{h}^{\alpha}g(t)-\frac{\left(h(t)-h(0)\right)^{\alpha}\left(h(t)+\alpha h(0)\right)}{\Gamma(\alpha+2)}\right)
\end{aligned}
$$

4. 结论

本文主要是命题 1.3 和命题 1.4 的推广。从积分形式上看，本文是将命题 1.4 中的 Riemann-Liouville 分数阶积分 J^{α} 推广为 Riemann-Liouville 型分数阶积分 J_{h}^{α}。而从被积函数的限制条件上看，本文是将命题 1.3 中被积函数的常数边界推广到函数边界的情形。

参考文献

[1] Erden, S., Sarikaya, M.Z. and Budak, H. (2016) Grüss Type Inequalities for Generalized Fractional Integrals. *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics*, **1726**, 1-5. https://doi.org/10.1063/1.4945887

[2] Tariboon, J., Ntouyas, S.K. and Sudsutad, W. (2014) Some New Riemann-Liouville Fractional Integral Inequalities. *International Journal of Matheatics and Mathematics Sciences*, **2014**, Article ID 869434. https://doi.org/10.1155/2014/869434

[3] Grüss, G. (1935) Über das maximum des absoluten Betrages von $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. *Mathematische Zeitschrift*, **39**, 215-226. https://doi.org/10.1007/BF01201355

[4] Mitrinovic, D.S., Pecaric, J.E. and Fink, A.M. (1993) Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic, Netherland, 295-308. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1043-5

[5] Dragomir, S.S. (1998) Some Integral Inequalities of Grüss Type. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **31**, 397-416.

[6] Dragomir, S.S. (1999) A Generalization of Grüss's Inequality Inner Product Spaces and Applications. *Journal Mathematical Analysis and Applications*, **237**, 74-82. https://doi.org/10.1006/jmaa.1999.6452

[7] Dragomir, S.S. (2003) New Inequalities of Grüss Type for the Stieltjes Integral and Application. arXiv:math/0303381v1 [math.CA] 30 Mar 2003

[8] Moslehian, M.S. and Rajic, R. (2010) A Grüss Inequality for N-Positive Linear Maps. *Linear Algebra and Applications*, **433**, 1555-1560. https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.06.006

[9] Anastassiou, G.A. (2004) Opial Type Inequalities Involving Fractiional Derivatives of Two Functions and Applications. *Mathematical and Computer*, **48**, 1701-1731. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2003.08.013

[10] Belarbi, S. and Dahmani, Z. (2009) On Some New Fractional Inequalities. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **10**, Article ID 86.

[11] Dahmani, Z. (2010) New Inequalities in Fractional Integral Inequalities. *International Journal of Nonlinear Science*, **9**, 493-497.

[12] Dahmani, Z., Tabharit, L. and Taf, S. (2010) New Generalisations of Grüss Inequality Using Riemann-Liouville Fractional Integrals. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, **2**, 93-99.

[13] Liang, Y.S. (2010) Box Dimensions of Riemann-Liouville Fractional Integrals of Continuous Functions of Bounded Variation. *Nonlinear Analysis*, **72**, 4304-4306. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.02.007

[14] Liang, Y.S. and Su, W.Y. (2007) The Relationship between the Fractal Dimensions of a Type of Fractal Functions and the Order of Their Fractional Calculus. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **34**, 682-689. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.01.124