Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(5), 892-896**
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.85100

Hans 汉斯

Some Discussions of the Upper and Lower Limits

Jun Li, Jiangwei Zhang

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan
Email: 1453769169@qq.com, 2286693643@qq.com

Received: Apr. 25th, 2019; accepted: May 9th, 2019; published: May 16th, 2019

Abstract

The upper and lower limits play an important role in solving the problem. Whether it is solving the limit problem or the theorem of the series convergence and the real variable function, the concept of the upper and lower limits is used. Therefore, to understand the relationship between the upper and lower limits plays a key role in dealing with the problem.

Keywords

Upper Limit, Lower Limit, Series Convergence

对上下极限的一些讨论

李　军，张江卫

长沙理工大学，数学与统计学院，湖南　长沙
Email: 1453769169@qq.com, 2286693643@qq.com

收稿日期：2019年4月25日；录用日期：2019年5月9日；发布日期：2019年5月16日

摘　要

上下极限对于解决问题有着非常重要的作用，不管是在求解极限问题，还是在判断级数收敛以及实变函数中的定理，都运用着上下极限的概念，因此弄清楚上下极限之间关系，对处理问题起着关键作用。

关键词

上极限，下极限，级数收敛

文章引用: 李军, 张江卫. 对上下极限的一些讨论[J]. 应用数学进展, 2019, 8(5): 892-896.
DOI: 10.12677/aam.2019.85100

1. 引言

极限是我们在数学分析中至关重要的内容，但是我们一般对于极限的探讨是基于存在性和对其进行求解，而证其存在性一般用定义或者左右极限的方法，进而对其进行求解，很少利用上下极限去判断极限的存在性，但是往往有些问题我们必须要用到上下极限去解决，或者用上下极限去刻画，因此对上下极限的定义以及相应性质的了解就非常重要，还有一个特别重要的是，于极限而言，其可能不存在，但是其上下极限一定存在。本文将从上下极限的定义入手，通过对上下极限的性质的罗列进而证明各种相关性质之间的关系，这也会帮助我们进一步系统地了解上下极限，也会对解决其它问题提供一些全新的思路。

另外，上下极限在许多的数学课程以及研究领域中都有用到，所以，本文对上下极限在扩展学科里面涉及的概念亦会进行部分总结，以便于进行更好的理解。

2. 数列上下极限定义和定理

定义 2.1 [1]：对于一个有界数列$\{x_n\}$，将其最大聚点 M 和最小聚点 m 分别称为$\{x_n\}$的上极限和下极限，记为：

$$M=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,\quad m=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n$$

定义 2.2 [1]：对所有的$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n\succ N$时，有$X_N<m+\varepsilon$，又存在子列$\{x_{n_k}\}$，使得$x_{n_k}>M-\varepsilon\ (k\in N)$，则有$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\ (=M)$；对所有的$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n>N$时，有$x_n>m-\varepsilon$，又存在子列$\{x_{n_k}\}$，使得$x_{n_k}<m+\varepsilon\ (k\in N)$，则有$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=m$。

定义 2.3 [1]：称 M 为有界数列$\{x_n\}$的上极限，如果$M=\lim_{n\to\infty}\lim_{k\ge n}x_k=\inf_{n\ge1}\sup_{k\ge n}x_k$；称 m 有界数列$\{x_n\}$的下极限，如果$M=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n}x_k=\sup_{n\ge1}\inf_{k\ge n}x_k$。

定义 2.4 [1]：若存在$\delta>0$，使得数列$\{x_n\}$中有无穷多个项落在$U(a;\delta)$之外，则$\{x_n\}$一定不以 a 为极限。

定理 2.1：对任意的有界数列$\{x_n\}$，有$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\le\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n$。

证明：由定义 2.1，可设$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n$为最小聚点 m，则 m 的邻域内必含有$\{x_n\}$中的无穷多个点；同理，可设$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n$为最大聚点 M，则 M 邻域内亦必含有$\{x_n\}$中的无穷多个点；若$U(M;\delta)$与$U(m;\delta)$相交，且含有$\{x_n\}$中的无穷多个点，则“=”成立，否则，在数轴上$U(M;\delta)$必在$U(m;\delta)$的右侧，从而$M>m$；综上有$M\ge m$，证毕。

定理 2.2：$\lim_{n\to\infty}x_n=C$的充分必要条件为$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=C$。

证明：必要性，由于$\lim_{n\to\infty}x_n=C$，故有界数列$\{x_n\}$存在唯一的极限，所以只有$U(C;\delta)$才含有x_n中的无穷多个点；所以由定义 2.1，可知$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=C$。充分性，由定理 2.1 的证明可知，在整个有界数列$\{x_n\}$中，只有$U(C;\delta)$才含有$\{x_n\}$中的无穷多个点，即$\{x_n\}$中有无穷多个项落在$U(C;\delta)$之外，故由极限的定义 2.4 可知$\lim_{n\to\infty}x_n=C$。

定理 2.3 [1]：(保不等式性)设有界数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$满足：存在$N_0>0$，当$n>N_0$时有$x_n\le y_n$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n;$$

特别若 α， β 为常数，又存在 $N_0>0$，当 $n>N_0$ 时有 $\alpha\le x_n\le\beta$，则

$$\alpha \le \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n x_n \le \beta。$$

推论 4： 设 $\{x_n\}$ 为有界数列，则

1) m 是 $\{x_n\}$ 的最小聚点；

2) m 是 $\{x_n\}$ 的子列的最小值；

3) $m=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\ge n} x_k=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$；

4) $m=\sup\limits_{n\ge1}\inf\limits_{k\ge n} x_n$；

5)对 $\forall\varepsilon>0$， $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $x_n>m-\varepsilon$，又存在子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k}<m+\varepsilon\ (k\in N)$；相互等价。

证明：

1) $\Rightarrow$ 2)：由于 m 是 $\{x_n\}$ 的聚点，则当且仅当 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 m，故可知 $\{x_n\}$ 的最小聚点即为 $\{x_{n_k}\}$ 极限的最小值。

2) $\Rightarrow$ 3)：由 2)可知，存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 m，因为

$$x_{n_k}\ge y_{n_k},$$

于是由数列极限的保号性可知

$$m=\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\ge \lim_{k\to\infty} y_{n_k},$$

而该不等式中只能取等号，否则 $m'=\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}<m$，则由 $y_{n_k}\to m'$，必存在 n_{k_1}，使得

$$m'-1<y_{n_{k_1}}<m'+1,$$

据 $y_{n_{k_1}}$ 的定义，必 $\exists n_{k_1'}>n_{k_1}$， s.t.

$$m'-1<y_{n_{k_1'}}<m'+1;$$

由 $y_{n_k}\to m'$，又必 $\exists n_{k_2}>n_{k_1'}$， s.t.

$$m'-\frac{1}{2}<y_{n_{k_2}}<m'+\frac{1}{2},$$

据 $y_{n_{k_2}}$ 的定义，必 $\exists n_{k_2'}>n_{k_2}$， s.t.

$$m'-\frac{1}{2}<y_{n_{k_2'}}<m'+\frac{1}{2};$$

以此类推，我们就可以得到： $y_{n_k}\to m'$，必 $\exists n_{k_N}>n_{k_{N-1}'}$， s.t. $m'-\frac{1}{N}<y_{n_{k_N}}<m'+\frac{1}{N}$，据 y_{n_k} 的定义，必 $\exists n_{k_N'}>n_{k_N}$， s.t. $m'-\frac{1}{N}<y_{n_{k_N'}}<m'+\frac{1}{N}$；

故令 $N\to\infty$，可知 m' 亦为 $\{x_n\}$ 的最小极限，这与 m 为 $\{x_n\}$ 的最小极限矛盾，从而有 $m=\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$；又因为 $\{y_n\}$ 单调递增且有上界，故 $\{y_n\}$ 必收敛，所以 $\{y_n\}$ 与其子列有相同的极限，进而有 $m'=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\ge n} x_k$。

3) $\Rightarrow$ 4)：由于 $\{x_n\}$ 非空，且其存在上界，故 $\{y_n\}$ 亦非空有上界；从而 $\{y_n\}$ 上确界存在，记为

$m'=\sup\limits_{n\geq1}y_n$，于是 $m'\geq y_n$，并且对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，有 $y_N>m'-\varepsilon$；又因为 $\{y_n\}$ 单调递增，s.t.当 $n>N$ 时，必有 $y_n\geq y_N$，从而 $m'-\varepsilon<y_N\leq y_n<m'+\varepsilon$；由此可以得到 $y_n\to m'$，而由 3)已知 $y_n\to m$，从而 $m=m'$，即：$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\sup\limits_{n\geq1}y_n$，亦即：$\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geq n}x_k=\sup\limits_{n\geq1}\inf\limits_{k\geq n}x_n$。

4) $\Rightarrow$ 5)：先证明对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $x_n>m-\varepsilon$；由 $m=\sup\limits_{n\geq1}y_n$，依据上确界定义注意到 $\{y_n\}$ 单调递增，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$y_n>m-\varepsilon$ 成立；又 $y_n=\inf\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$，则当 $n>N$ 时，均有 $x_n\geq y_n>m-\varepsilon$。

再证明存在子列 $\{x_{n_k}\}$，s.t. $x_{n_k}<m+\varepsilon\ (k\in N)$；已知 $m=\sup\limits_{n\geq1}y_n=\sup\limits_{n\geq1}\inf\limits_{k\geq n}x_n$，可反设对 $\forall N>0$，当 $n>N$ 时，$x_n\geq m+\varepsilon$，取 $\varepsilon=1$，则 $m+1$ 便是从第 n 项起以后项的下界，从而得到 $y_n=\inf\limits_{k\geq n}x_k\geq a+1\ \Rightarrow$ $\sup\limits_{n\geq1}y_n=\sup\limits_{n\geq1}\inf\limits_{k\geq n}x_k\geq a+1\ \Rightarrow\ a\geq a+1$，矛盾。

5) $\Rightarrow$ 1)：由 1)可知，对 $\forall\varepsilon>0$，必有无穷多个 n，s.t. $x_n\in(m-\varepsilon,m+\varepsilon)$，故 m 为 $\{x_n\}$ 的聚点，下证 $\{x_n\}$ 再无小于 m 的聚点，否则，m' 为小于 m 的聚点，取 $\varepsilon=\dfrac{m'-m}{2}\Rightarrow m+\varepsilon<m'-\varepsilon$，由假设 m' 为聚点，则对于 $\{x_n\}$，必有 $m+\varepsilon<m'-\varepsilon<x_n$，这与存在子列 $\{x_{n_k}\}$，s.t. $x_{n_k}<m+\varepsilon$ 矛盾；证毕。

以上推论 4 对关于下极限的几个定义的等价性进行了证明，而关于上极限定义的等价性证明可见文献[2]。

3. 集列上下极限定义和定理

定义 3.1 [3]：设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为任意集列，

1) 由该集列中无限多个集合的对应元素的全体组成的集合称为该集列的上限集或者上极限，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n}x_k$；用集合表示即为：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x|对\forall N>0,\exists n>N,\text{s.t. }x\in A_n\}\text{ 或 }\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x|\exists无穷多个A_n,\text{s.t. }x\in A_n\}$$

2) 除有限个下标外，属于集列中每个集合的元素的全体组成的集合称为下限集或者下极限，记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geq n}x_k$；用集合表示即为：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x|\exists N>0,对\forall n>N,\text{s.t. }x\notin A_n\}\text{ 或 }\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x|当n充分大以后都有x\in A_n\}$$

定义 3.2 [3]：如果集合 $\{A_n\}$ 有极限，当且仅当 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$。

定理 3.1 [3]：设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为任意集列，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$；且 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$。

推论 3.2 [3]：对于单调集列，$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，如果 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增；$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，如果 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减。

4. 上下极限的应用

4.1. 依据上下极限判断级数的收敛性

定理 4.1.1：设 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=l$，则若 $l<1$，级数收敛；若 $l>1$，级数发散。

证明：由定义 2.2 可知，当取 $\varepsilon=|1-l|$ 时，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\sqrt[n]{u_n}<l+\varepsilon\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{u_n}<l+|1-l|$，所以若 $l<1$，则 $\sqrt[n]{u_n}<1$，从而 $\sum u_n$ 收敛；而又存在 $\{\sqrt[n]{u_n}\}$ 的子列 $\{\sqrt[n_k]{u_{n_k}}\}$，使得 $\sqrt[n_k]{u_{n_k}}>l-\varepsilon\ (k\in N)\ \Rightarrow$

$\sqrt[n_k]{u_{n_k}} > l - |1-l|$，所以若 $l > 1$，则 $\sqrt[n_k]{u_{n_k}} > 1$，故由于有一个子列所在的级数不收敛，所以级数 $\sum u_n$ 发散，证毕。

定理 4.1.2：设 $\sum u_n$ 为正项级数，可得 1) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n} = q < 1$，则级数收敛；2) 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n} = q > 1$，则级数发散。

证明：1) 由定义 2.2 可知，当取 $\varepsilon = \frac{|1-q|}{2}$ 时，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q + \varepsilon$，故当 $q < 1$ 时，$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 + \varepsilon = 1 + \frac{|1-q|}{2} = \frac{1+q}{2} < 1$，所以由比式判别法可知，$\sum u_n$ 收敛；又存在 $\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}$ 的子列 $\left\{\frac{u_{n_k+1}}{u_{n_k}}\right\}$，使得 $\frac{u_{n_k+1}}{u_{n_k}} > q - \varepsilon \ (k \in N)$，故当 $q > 1$ 时，$\frac{u_{n_k+1}}{u_{n_k}} > q - \frac{|1-q|}{2} = \frac{1+q}{2} > 1$，故由比式判别法可知，有一个子列所在的级数不收敛，所以级数 $\sum u_n$ 发散，证毕。

4.2. 上下极限在实变函数中的应用

定理 4.2 [3]：设 $E \subseteq R^q$ 为可测集，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上的一列非负可测函数，且 $f_n(x) \to f(x)$ 在集合 E 上几乎处处成立，则

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \le \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x$$

以上定理 4.3 称为 Fatou 引理，以上也隐含着即使左端被积函数 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在，但是右边积分的 $\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$ 的极限不一定存在，因此以下极限来代替。而 Fatou 引理对于实变函数中单调收敛定理，勒贝格收敛定理的证明都起着非常重要的作用，由此也说明了上下极限对于我们处理问题时的关键性。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析上册[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 165-175.

[2] 黄世国. 关于上(下)极限几种定义的等价性证明[J]. 桂林市教育学院学报(综合版), 1997, 31(1): 70-72.

[3] 程其襄, 张奠宙, 等. 实变函数与泛函分析基础[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2010.