

# Mathematical Model Analysis of Heat Conduction in Clothing for High Temperature Operation

Yichen Gai, Xiaohan Liang, Chenhao Geng, Lijuan Gu\*

School of Basic Sciences for Aviation, NAU, Yantai Shandong  
Email: \*728236332@qq.com

Received: Jun. 11<sup>th</sup>, 2019; accepted: Jun. 21<sup>st</sup>, 2019; published: Jun. 28<sup>th</sup>, 2019

---

## Abstract

In this paper, aiming at the problem of clothing design for high temperature operation, the model of temperature heat conduction is established based on law of conservation of heat and Fourier's law. First heat exchange method and temperature distribution are discussed and found. Secondly, when the thickness of the second layer is uncertain, the optimal thickness is calculated by dichotomy combined with the established heat conduction equation. Finally, the optimum thickness of Layer II and Layer IV is obtained by synthesizing two variables, and using dichotomy method. The results show that the model is reasonable and good.

## Keywords

Heat Conduction Equation, Dichotomy, Special Clothing for High Temperature Operation, Optimum Thickness

---

## 高温作业服装的热传导数学模型分析

盖怡臣, 梁肖涵, 耿晨豪, 顾丽娟\*

海军航空大学航空基础学院, 山东 烟台  
Email: \*728236332@qq.com

收稿日期: 2019年6月11日; 录用日期: 2019年6月21日; 发布日期: 2019年6月28日

---

## 摘要

本文针对高温作业专用服装设计问题, 运用热量守恒定律和傅里叶定律, 建立专用服装温度热传导模型,

\*通讯作者。

并给出从热传导方程的求解, 和三维温度分布图。当第II层厚度不确定时, 结合建立的热传导方程, 使用二分法计算出的最优厚度。当第II层和第IV层的厚度不确定时, 综合两个变量得到优化模型, 并用二分法求解最优厚度, 得到最优厚度。结果验证模型具有合理性和优良性。

## 关键词

热传导方程, 二分法, 高温作业专用服装, 最优厚度

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 背景介绍

高温环境对人体有很大危害, 然而生活中有许多工程作业需要人员在高温环境下作业, 最常见的便是消防员、钢铁冶金、石油化工等工作人员。高温环境下, 人们需要穿着专用服装以避免烫伤, 高温作业专用服装必须具有良好的隔热性或者较差的导热性, 使穿着者温度保持较长时间相对环境较低的温度, 因此, 高温作业专用服装的研究和设计十分重要, 同时备受关注[1] [2]。本文探究服装的传热特性, 研究高温作业服装在高温环境下的隔热能力, 建立专用服装温度热传导数学模型, 不仅降低研发成本、缩短研发周期, 同时为高温专用服装的设计和性能有效且成本合理的服装提供理论依据。

## 2. 问题分析

专用服装通常由三层织物材料构成, 记为 I、II、III 层, 其中 I 层与外界环境接触, III 层与皮肤之间还存在空隙, 将此空隙记为 IV 层。将体内温度控制在  $37^{\circ}\text{C}$  的假人放置在高温环境中, 测量假人皮肤外侧的温度。

**1) 环境温度为  $75^{\circ}\text{C}$ 、II 层厚度为 6 mm、IV 层厚度为 5 mm、工作时间为 90 分钟的情形开展实验, 测量得到假人皮肤外侧的温度。**

因为人体着装状态和隔热材料围成柱状的情况比较类似, 所以在柱面坐标系下, 建立三维热传导数学模型[3]。又因为衣服材质均匀, 并考虑衣服的厚度远小于衣服的长度, 建立一维热传导模型, 使问题简单化。

**2) 当环境温度为  $65^{\circ}\text{C}$ 、IV 层的厚度为 5.5 mm 时, 确定 II 层的最优厚度, 确保工作 60 分钟时, 假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ , 且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。**

根据已知确定约束条件、结合热传导方程, 建立最优化模型, 利用二分法求得所需要的最优解, 即第 II 层的最优厚度。

**3) 当环境温度为  $80^{\circ}\text{C}$  时, 确定 II 层和 IV 层的最优厚度, 确保工作 30 分钟时, 假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ , 且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。**

将问题二中的最优化模型由单变量增多至双变量问题, 即将第 II 层及 IV 层的厚度都变成变量。在求解时, 需要固定一个变量, 将两个变量的微分方程简化为单变量的微分方程进行求解, 计算量较大, 利用二分法并借助 MATLAB 软件, 求得第二层和第四层的最优厚度。

本文数据来源于 2018 年全国大学生数学建模竞赛 A 题, 为了便于解决问题, 提出以下假设:

- a) 假人外皮肤温度处处相等，忽略部位差异。
- b) 材料均匀，即比热、密度、热传导率等均相同
- c) 热量的传导在理论上是符合规律的。
- d) 所给数据精确，无偏差。
- e) 该服装材质不会随实验时间和实验次数而产生耗损，维持其原有的属性。
- f) I层、II层、III层不存在空隙。
- g) 小段内忽略轴向导热。

### 3. 模型的建立与求解

#### 3.1. 构建数学模型

设  $T(x, y, z, t)$  表示物体在  $(x, y, z)$  处  $t$  时刻的温度， $F(x, y, z, t)$  表示  $(x, y, z)$  处  $t$  时刻的热源强度， $c$  为比热， $\rho$  为体密度。忽略热量传递过程中的热量损失，忽略人体热源的情况下，由热量守恒定律和傅里叶定律[4] [5]，得到无热源和有热源情况下三维热传导方程分别为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \text{ 和 } \frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{F(x, y, z, t)}{c\rho} \quad (1)$$

其中， $a$  为单位时间内单位体积发生的热量。

由于人体着装状态和隔热材料围成柱状的情况比较类似，故在柱面坐标系下，(1)式热传导方程变为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{F(x, y, z, t)}{c\rho}$$

即

$$\frac{\partial T}{\partial t} c\rho = k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + F(x, y, z, t) \quad (2)$$

考虑到衣服的厚度远小于衣服的长度，同时衣服材质均匀，建立一维热传导模型为

$$\frac{\partial T}{\partial t} c\rho = k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) + F(x, y, z, t) \quad (3)$$

1) 第 I 层材料外的热源为恒温热源，其强度不随时间和空间位置的变化而变化，故为一常数，人体的热源强度为  $F(x, y, z, t) = \gamma T_0$ ，其中  $\gamma$  为转换系数，记为  $q_1(t)$ 。

2) 第 II 层材料因为第 I 层材料是其热源，其强度温度随时间变化，而材料均匀，即热源强度与空间位置无关，人体的热源强度为  $F(x, y, z, t) = \gamma T(t, r_4 + r_3 + r_2) = q_2(t)$ 。

3) 同理得到第 III 层材料，人体的热源强度为  $F(x, y, z, t) = \gamma T(t, r_4 + r_3) = q_3(t)$ 。

4) 第 IV 层材料，人体的热源强度为  $F(x, y, z, t) = \gamma T(t, r_4) = q_4(t)$ 。

5) 当服装的外层材料与外部环境之间的温差趋于恒定，热力平衡状态满足热平衡，组成热力系统的各个部分没有热量的传递，达到热力平衡状态，则  $q_4(t) = q_5(t)$ ，则人体的热源强度为  $F(x, y, z, t) = \gamma T(t, 0) = q_5(t)$ 。其中  $T(t, r)$  表示在  $t$  时刻，位于半径为  $r$  处的温度。

整个服装热传导示意图如图 1 所示。

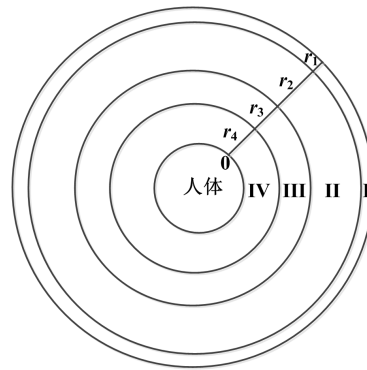


Figure 1. Sketch map of clothing heat conduction  
图 1. 服装热传导示意图

根据热传导的规律，构造温度热传导模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} c_1 \rho_1 = k_1 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) + q_1(t), & r_4 + r_3 + r_2 \leq r \leq r_4 + r_3 + r_2 + r_1 \\ \frac{\partial T}{\partial t} c_2 \rho_2 = k_2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) + q_2(t), & r_4 + r_3 \leq r \leq r_4 + r_3 + r_2 \\ \frac{\partial T}{\partial t} c_3 \rho_3 = k_3 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) + q_3(t), & r_4 \leq r \leq r_4 + r_3 \\ \frac{\partial T}{\partial t} c_4 \rho_4 = k_4 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) + q_4(t), & 0 \leq r \leq r_4 \end{cases} \quad (4)$$

假设防护服初始温度为人体温度，不妨设为  $37^\circ$ ，则有初值条件为

$$T(0, r) = 37, \quad 0 \leq r \leq r_4 + r_3 + r_2 + r_1$$

考虑第二类边界条件

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \frac{q(r_0)}{k} = \frac{T_1 - T_2}{R - r_0}$$

其中， $q(r_0) = k(T_1 - T_2)/(R - r_0)$  为距离热源  $R - r_0$  处的热流密度，且  $R = r_4 + r_3 + r_2 + r_1$ 。表示经过  $r_0$  的热流密度达到平衡状态时，边界条件为  $q_4(t) = q_5(t)$ ， $t \geq t_0$  即

$$T(t, r_4) = T(t, 0), \quad t \geq t_0$$

表 1 给出了对环境温度为  $75^\circ\text{C}$ 、II 层厚度为 6 mm、IV 层厚度为 5 mm、工作时间为 90 分钟的情形，测量得到皮肤外侧的温度数据。

Table 1. Parameter value of special clothing material  
表 1. 专用服装材料的参数值

| 分层    | 密度 $\rho$ kg/m <sup>3</sup> | 比热 $c$ (J/(kg·°C)) | 热传导率 $k$ W/m·°C | 厚度 $r$ m             |
|-------|-----------------------------|--------------------|-----------------|----------------------|
| I 层   | 300                         | 1377               | 0.082           | $0.6 \times 10^{-3}$ |
| II 层  | 862                         | 2100               | 0.37            | $6 \times 10^{-3}$   |
| III 层 | 74.2                        | 1726               | 0.045           | $3.6 \times 10^{-3}$ |
| IV 层  | 1.18                        | 1005               | 0.028           | $5 \times 10^{-3}$   |

将表 1 中数据代入(4)式, 得到温度热传导方程为

$$\begin{cases} 413100 \frac{\partial T}{\partial t} = 0.082 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + 75\gamma, & 14.6 \times 10^{-3} \leq r \leq 15.2 \times 10^{-3} \\ 1810200 \frac{\partial T}{\partial t} = 0.37 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \gamma T(t, 14.6 \times 10^{-3}), & 8.6 \times 10^{-3} \leq r \leq 14.6 \times 10^{-3} \\ 128069.2 \frac{\partial T}{\partial t} = 0.045 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \gamma T(t, 8.6 \times 10^{-3}), & 5 \times 10^{-3} \leq r \leq 8.6 \times 10^{-3} \\ 1185.9 \frac{\partial T}{\partial t} = 0.028 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \gamma T(t, 5 \times 10^{-3}), & 0 \leq r \leq 5 \times 10^{-3} \end{cases} \quad (5)$$

### 3.2. 问题一的求解

式(5)中的温度热传导方程是分段的偏微分方程, 需要分段求解, 每次求解所得的温度即为下一段的边界条件[6] [7]。

利用 MATLAB 软件绘制出整个传热模型过程的温度三维分布图。由式(5), 材料 I 的温度热传导方程的求解, 取参数  $\gamma=1$ , 利用 MATLAB 软件绘制 90 分钟内传热模型过程的三维温度分布如图 2。对于材料 I, 防护服在较短的时间 20 秒内达到了较高的温度, 三维温度分布如图 3。

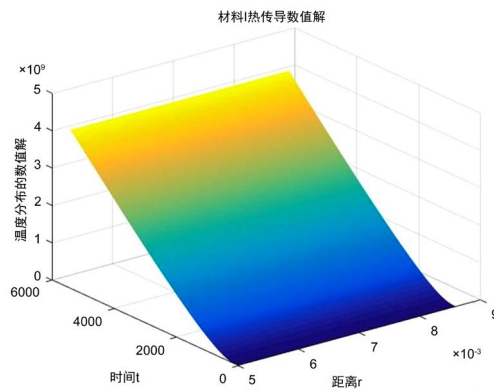


Figure 2. Three-dimensional temperature distribution of material I  
图 2. 材料 I 的三维温度分布图

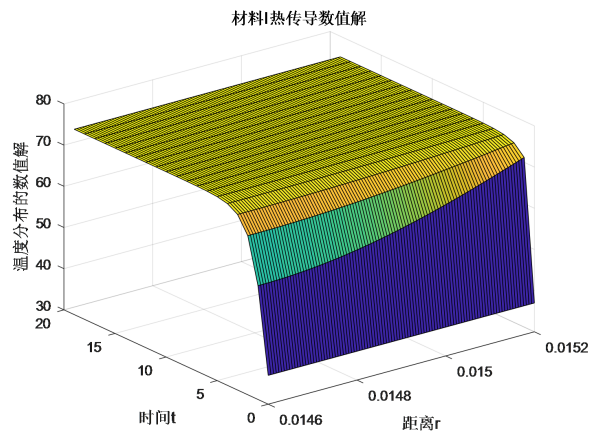


Figure 3. Three-dimensional temperature distribution of material I  
图 3. 材料 I 的三维温度分布图

同时，解得温度边界上的分布的数值解为

$$T(t, 14.6 \times 10^{-3}) = 38.3 \left( 1 + \frac{0.6723}{t} \right)^t \text{ 和 } T(t, 15.2 \times 10^{-3}) = 43.43 \left( 1 + \frac{0.5466}{t} \right)^t$$

综合上述模型和皮肤温度与时间的拟合关系，利用 MATLAB，我们得到数值解的温度拟合曲线如图 4，蓝色曲线为数值解，红色曲线为拟合函数。

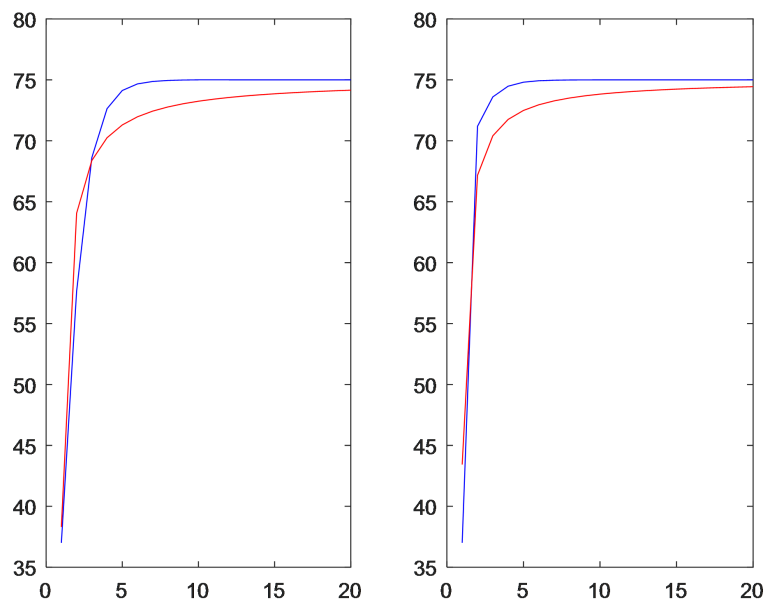


Figure 4. Temperature fitting curve  
图 4. 温度拟合曲线

由式(5)，材料 II 的温度传导方程为

$$1810200 \frac{\partial T}{\partial t} = 0.37 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \gamma 38.3 \left( 1 + \frac{0.6723}{t} \right)^t, \quad 8.6 \times 10^{-3} \leq r \leq 14.6 \times 10^{-3}$$

初值条件为

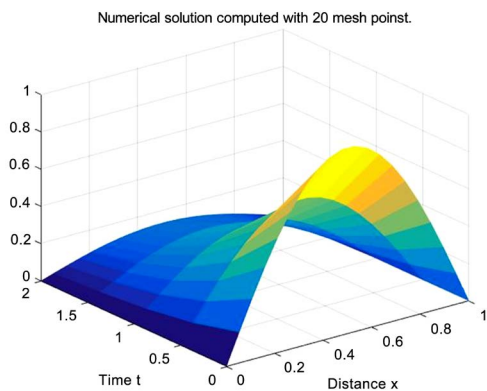
$$T(0, r) = 37, \quad 8.6 \times 10^{-3} \leq r \leq 14.6 \times 10^{-3}$$

边界条件为

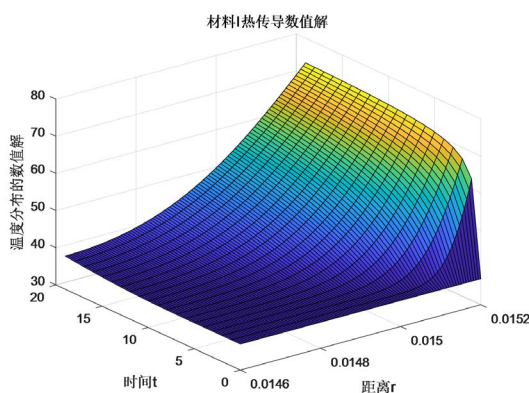
$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=14.6 \times 10^{-3}} = \frac{43.43 \left( 1 + \frac{0.5466}{t} \right)^t - 38.3 \left( 1 + \frac{0.6723}{t} \right)^t}{0.6 \times 10^{-3}}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=8.6 \times 10^{-3}} = \frac{38.3 \left( 1 + \frac{0.6723}{t} \right)^t - T(t, 8.6 \times 10^{-3})}{6.6 \times 10^{-3}}$$

由式(5)，材料 II 的温度热传导方程的求解，取参数  $\gamma=1$ ，得到温度在 90 分钟内的三维温度分布如图 5。对于材料 II，为了便于观察，取前一小段时间的温度变化，防护服在较短的时间 20 秒内达到了较高的温度，如图 6。



**Figure 5.** Three-dimensional temperature distribution of material II  
**图 5.** 材料 II 三维温度分布图

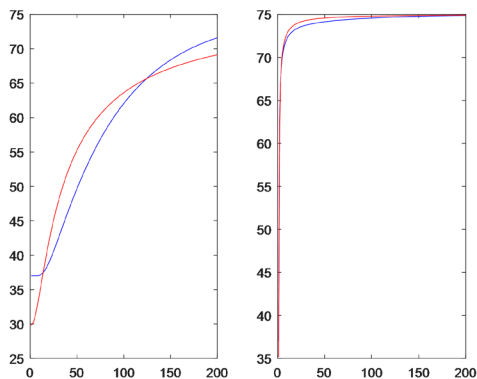


**Figure 6.** Three-dimensional temperature distribution of material II  
**图 6.** 材料 II 的三维温度分布图

同时，解得温度边界上的分布的数值解为

$$T(t, 8.6 \times 10^{-3}) = 0.01515 \left( 1 + \frac{29.8}{t} \right)^t + 8.019$$

利用 MATLAB，我们得到数值解的温度拟合曲线如图 7，蓝色曲线为数值解，红色曲线为拟合函数。从图像上看，两者非常接近。



**Figure 7.** Temperature fitting curve  
**图 7.** 温度拟合曲线

由式(5), 材料 III 的温度传导方程为

$$128069.2 \frac{\partial T}{\partial t} = 0.045 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \gamma 0.01515 \left( 1 + \frac{29.8}{t} \right)^t + 8.019, \quad 5 \times 10^{-3} \leq r \leq 8.6 \times 10^{-3}$$

初值条件为

$$T(0, r) = 37, \quad 5 \times 10^{-3} \leq r \leq 8.6 \times 10^{-3}$$

边界条件为

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=5 \times 10^{-3}} = \frac{0.01515 \left( 1 + \frac{29.8}{t} \right)^t + 8.019 - T(t, 5 \times 10^{-3})}{10.2 \times 10^{-3}}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=8.6 \times 10^{-3}} = \frac{38.3 \left( 1 + \frac{0.6723}{t} \right)^t - 0.01515 \left( 1 + \frac{29.8}{t} \right)^t + 8.019}{6.6 \times 10^{-3}}$$

第 IV 层的初值条件为

$$T(0, r) = 37, \quad 0 \leq r \leq 5 \times 10^{-3}$$

边界条件为

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=5 \times 10^{-3}} = \frac{T(t, 8.6 \times 10^{-3}) - T(t, 5 \times 10^{-3})}{10.2 \times 10^{-3}}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = \frac{T(t, 5 \times 10^{-3}) - T(t, 0)}{15.2 \times 10^{-3}}$$

根据上述求法, 确定系统达到平衡时刻的时间  $t_0$ 。

$$T(t, 5 \times 10^{-3}) = T(t, 0), \quad t \geq t_0.$$

### 3.3. 问题二的求解

由问题二条件可知, 我们可以利用线性规划的方法解题, 设第 II 层的厚度为  $d$ , 得到优化模型如下

$$\min d \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} T(t, 0) \leq 47, & 0 \leq t \leq 60, \\ T(t, 0) \leq 44, & 0 \leq t \leq 55. \end{cases} \quad (6)$$

我们需要分段求解

1) 材料 I 的温度传导

$$413100 \frac{\partial T}{\partial t} = 0.082 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + 75\gamma, \quad (9.1+d) \times 10^{-3} \leq r \leq (9.7+d) \times 10^{-3}$$

初值条件为

$$T(0, r) = 37, \quad (9.1+d) \times 10^{-3} \leq r \leq (9.7+d) \times 10^{-3}$$

边界条件为

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=(9.7+d) \times 10^{-3}} = \frac{65 - T(t, (9.7+d) \times 10^{-3})}{0.001 \times 10^{-3}}$$



$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=(9.1+d)\times 10^{-3}} = \frac{T(t, (9.7+d)\times 10^{-3}) - T(t, (9.1+d)\times 10^{-3})}{0.6\times 10^{-3}}$$

2) 材料 II 的温度传导

$$1810200 \frac{\partial T}{\partial t} = 0.37 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \gamma T(t, 14.6\times 10^{-3}), \quad 9.1\times 10^{-3} \leq r \leq (9.1+d)\times 10^{-3}$$

初值条件为

$$T(0, r) = 37, \quad 9.1\times 10^{-3} \leq r \leq (9.1+d)\times 10^{-3}$$

边界条件为

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=(9.1+d)\times 10^{-3}} = \frac{T(t, (9.7+d)\times 10^{-3}) - T(t, (9.1+d)\times 10^{-3})}{0.6\times 10^{-3}}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=9.1\times 10^{-3}} = \frac{T(t, (9.1+d)\times 10^{-3}) - T(t, 9.1\times 10^{-3})}{(0.6+d)\times 10^{-3}}$$

3) 材料 III 的温度传导

$$128069.2 \frac{\partial T}{\partial t} = 0.045 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \gamma T(t, 8.6\times 10^{-3}), \quad 5.5\times 10^{-3} \leq r \leq 9.1\times 10^{-3}$$

初值条件为

$$T(0, r) = 37, \quad 5.5\times 10^{-3} \leq r \leq 9.1\times 10^{-3}$$

边界条件为

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=9.1\times 10^{-3}} = \frac{T(t, (9.1+d)\times 10^{-3}) - T(t, 9.1\times 10^{-3})}{(0.6+d)\times 10^{-3}}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=5.5\times 10^{-3}} = \frac{T(t, 9.1\times 10^{-3}) - T(t, 5.5\times 10^{-3})}{(4.2+d)\times 10^{-3}}$$

4) 第 IV 层的温度传导

$$1185.9 \frac{\partial T}{\partial t} = 0.028 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \gamma T(t, 5\times 10^{-3}), \quad 0 \leq r \leq 5.5\times 10^{-3}$$

初值条件为

$$0 \leq r \leq 5.5\times 10^{-3}$$

边界条件为

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=5.5\times 10^{-3}} = \frac{T(t, 9.1\times 10^{-3}) - T(t, 5.5\times 10^{-3})}{(4.2+d)\times 10^{-3}}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = \frac{T(t, 5.5\times 10^{-3}) - T(t, 0)}{(9.7+d)\times 10^{-3}}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=9.1\times 10^{-3}} = \frac{T(t, (9.1+d)\times 10^{-3}) - T(t, 9.1\times 10^{-3})}{(0.6+d)\times 10^{-3}}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=5.5 \times 10^{-3}} = \frac{T(t, 9.1 \times 10^{-3}) - T(t, 5.5 \times 10^{-3})}{(4.2 + d) \times 10^{-3}}$$

选择二分法对式(6)进行求解, 首先确定一个初始求解范围 $[d_l, d_r]$ , (其中两最值在附件中已经给出分别是 0.6 mm, 2.5 mm)计算当 $d = d_l$ 和 $d = d_r$ 时, 上述微分方程组的解, 判断是否满足条件, 其结果会出现下面三个结果:

1) 若 $d = d_l$ 时的解满足约束条件, 那么 $d = d_r$ 时也一定满足约束条件, 因此最优解 $d_* \leq d_l$ , 在 $d_l$ 的左侧取值 $d_w$ , 从而令 $[d_l, d_r] = [d_w, d_l]$ , 按照上述方程进行带入重复的计算, 直至得出我们所需要的最优解。

2) 若 $d = d_r$ 时的解不满足约束条件, 则最优解 $d_* \geq d_r$ , 在 $d_r$ 的右侧取值 $d_u$ , 从而令 $[d_l, d_r] = [d_r, d_u]$ , 重复上述过程, 直至求出所求的最优解。

3) 若 $d = d_l$ 时的解不满足约束条件,  $d = d_r$ 时的解满足约束条件, 取区间中点 $d_v = \frac{d_l + d_r}{2}$ , 从而令 $[d_l, d_r] = [d_v, d_r]$ , 重复上述过程直至求出所求温度的最优解。

在上述三种情况下, 重复过程中, 只要找到为毫米(mm)时, 有效数字为四位可以满足条件, 即可求得最优解。

### 3.4. 问题三的求解

问题三, 综合两个变量, 即 II 层及 IV 层的厚度表示为未知量 $d_2, d_4$ , 运用一维热传导方程和问题二模型, 得到优化模型如下

$$\min d_2 d_4 \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} T(t, 0) \leq 47, & 0 \leq t \leq 30, \\ T(t, 0) \leq 44, & 0 \leq t \leq 25. \end{cases}$$

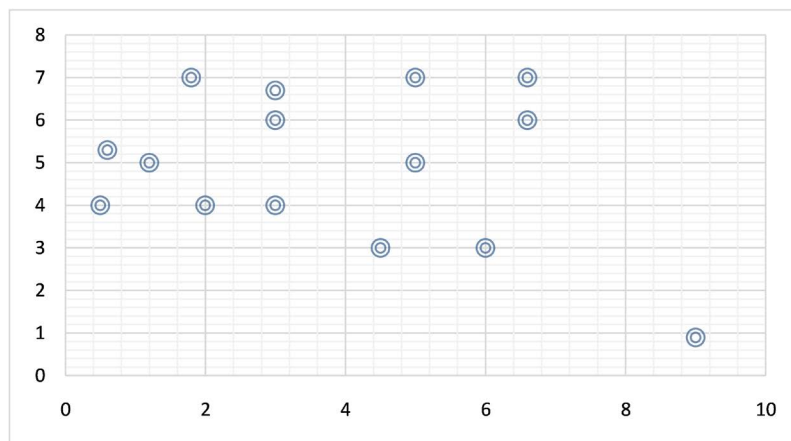
对应的温度传导方程为

$$\begin{cases} 413100 \frac{\partial T}{\partial t} = 0.082 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + 75\gamma, & (3.6 + d_4 + d_2) \times 10^{-3} \leq r \leq (4.2 + d_4 + d_2) \times 10^{-3} \\ 1810200 \frac{\partial T}{\partial t} = 0.37 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \gamma T(t, 14.6 \times 10^{-3}), & (3.6 + d_4) \times 10^{-3} \leq r \leq (3.6 + d_4 + d_2) \times 10^{-3} \\ 128069.2 \frac{\partial T}{\partial t} = 0.045 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \gamma T(t, 8.6 \times 10^{-3}), & d_4 \times 10^{-3} \leq r \leq (3.6 + d_4) \times 10^{-3} \\ 1185.9 \frac{\partial T}{\partial t} = 0.028 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \gamma T(t, 5 \times 10^{-3}), & 0 \leq r \leq d_4 \times 10^{-3} \end{cases}$$

与问题二类似, 分段求解, 由二分法最后得到第 II 层材料厚度和第 IV 层材料厚度的最优解如图 8 所示。

## 4. 模型评价

- 1) 在常微分方程的基础上采用偏微分方程, 建立数学模型, 结果更精准。
- 2) 利用 MATLAB 软件计算和仿真, 结果与实况模型更加符合。
- 3) 运用傅里叶定律和热量守恒定律, 在大量的物理原理基础上构建数学模型, 更加符现实世界, 更具有科学性。
- 4) 数学模型可以确定每层的最优厚度, 预测最长的安全工作时间, 为热防护服的设计提供了科学理论依据。



**Figure 8.** Optimal solutions for the thickness of layer II and layer IV  
**图 8.** 第 II 层材料厚度和第 IV 层材料厚度的最优解

- 5) 采用计算机计算微分方程和最优解，并绘制三维温度分布等图形，操作简单，省时省力，便于推广。
- 6) 数学模型的精度较高，预测结果比较准确，可以广泛运用于多层材料热传导的方式研究。

## 参考文献

- [1] 华涛. 热防护服热防护性能的分析与探讨[J]. 产业用纺织品, 2002(8): 28-31.
- [2] 崔旭东, 袁时生, 李宝毅. 利用热传导方程研究高温作业专用服设计的数学模型[J]. 应用数学进展, 2018, 7(12): 1607-1615.
- [3] 杨华军. 数学物理方程方法与计算机仿真[M]. 北京: 电子工业出版社, 2005: 212-230.
- [4] 潘斌. 热防护服装热传递数学建模及参数决定反问题[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 浙江理工大学, 2017.
- [5] 张熙民, 等. 传热学[M]. 第 4 版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002: 28-36.
- [6] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2018: 120-145.
- [7] 司守奎, 孙兆亮. 数学建模算法与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2015: 116-140.

### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)