

A Review of Robust Principal Component Analysis Models

Yuexing Wang, Qian Lv

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 2976828511@qq.com, qianlv576@163.com

Received: May 25th, 2019; accepted: Jun. 12th, 2019; published: Jun. 19th, 2019

Abstract

The model solved by principal component analysis is suitable for removing dense Gaussian small noise, but for non-gaussian noise or noise with serious outliers, the denoising effect of principal component analysis is not ideal [1] and lacks robustness. A robust principal component analysis model was proposed to overcome the shortcomings of the PCA model. Based on the theory of robust principal component analysis, this paper studies the denoising effects of several classical models of RPCA. The advantages and disadvantages of these models are analyzed and compared through the results of experimental data and pictures.

Keywords

Robust Principal Component Analysis Model, Low Rank Matrix, Image Noise Cancellation

鲁棒主成分分析模型综述

王月兴, 吕 倩

辽宁师范大学, 辽宁 大连
Email: 2976828511@qq.com, qianlv576@163.com

收稿日期: 2019年5月25日; 录用日期: 2019年6月12日; 发布日期: 2019年6月19日

摘 要

主成分分析求解的模型适用于去除密集的高斯小噪声, 但是对于非高斯噪声或离群点严重的噪声时, 主成分分析法去噪效果很不理想[1], 缺乏鲁棒性。针对主成分分析模型的缺点提出了鲁棒主成分分析模型。本文在鲁棒主成分分析的相关理论基础下, 研究了鲁棒主成分分析的几种经典模型的去噪效果。通过实

验数据及图片的效果, 分析对比这几个模型的优缺点。

关键词

鲁棒主成分分析模型, 低秩矩阵, 图像除噪

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着科学技术的进步与发展, 人们已经步入大数据时代。数据日益丰富的同时也掺杂大量的噪声。如何从受污染的数据中精准的恢复出原始数据, 就变得至关重要。对于混有高斯白噪声的数据, 主成分分析即可很好地恢复原始数据现在我们所面对的数据通常是含有噪声或缺失的, 那么高质量的数据对于一些应用是很关键的, 将一些有错误或不完整的数据进行恢复很有必要的, 恢复噪声的问题可以简单的描述, 但解决起来却很困难, 近些年出现一种有效的方法, 我们称之为鲁棒低秩模型, 目前鲁棒低秩模型在图片去噪方面有有效的方法, 在本文中我们将对鲁棒主成分分析模型、双线性鲁棒主成分分析模型、归纳鲁棒主成分分析模型、正交鲁棒主成分分析模型进行综述分析。

2. 鲁棒模型

2.1. 鲁棒主成分分析模型(Robust Principal Component Analysis, RPCA)

2.1.1. 模型的建立

在实际应用中可以将图像看作矩阵 X 。 $X = A + E$, 其中 A 是低秩矩阵, E 为稀疏(噪声)矩阵[2]。则 RPCA 模型解决的问题是从带有稀疏大噪声的数据中精确的恢复出低秩矩阵。此模型可以表示为:

$$\min_{A, E} \|A\|_* + \lambda \|E\|_1 \quad \text{s.t. } X = A + E \quad (1)$$

其中 $\|\cdot\|_1$ 为矩阵的 ℓ_1 范数, $\|\cdot\|_*$ 为矩阵的核范数。 $\lambda = 1/\sqrt{\max(m, n)}$ 。 A 是需要恢复的原矩阵, 通常为低秩的; E 是未知的噪声矩阵; X 是含噪声的矩阵。

2.1.2. 模型的求解[3]

对(1)构建增广拉格朗日函数得:

$$\mathcal{L}_\mu(A, E, Y) = \|A\|_* + \lambda \|E\|_1 + \langle X - A - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - A - E\|_F^2$$

迭代低秩矩阵 A 为:

$$\begin{aligned} A^* &= \arg \min_A \mathcal{L}_\mu(A, E, Y) \\ &= \arg \min_A \|A\|_* + \langle X - A - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - A - E\|_F^2 \\ &= D_{\mu^{-1}} \{X - E + \mu^{-1}Y\} \end{aligned}$$

迭代稀疏矩阵 E 为:

$$\begin{aligned}
E^* &= \arg \min_E L_\mu(A, E, Y) \\
&= \arg \min_A \lambda \|E\|_1 + \langle X - A - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - A - E\|_F^2 \\
&= S_{\lambda/\mu} \{X - A + \mu^{-1}Y\}
\end{aligned}$$

2.2. 双线性鲁棒主成分分析模型(Bilinear Robust Principal Component Analysis, BRPCA)

2.2.1. 模型的建立

使用 APG 或 ALM 求解 RPCA 优化问题, 每次迭代时要求对输入矩阵 $X \in R^{m \times n}$ 进行 SVD。RPCA 模型中含有核范数, 虽然在很多情况下这是可以接受的, 但是随着 X 的增大或性能需求的增加更高时, 每次进行 SVD 在计算上过于耗时。为了缓解这个问题, Cabral 等人[4]使用了双线性因子分解的思想避免使用核范数, 减少奇异值阈值的使用。BRPCA 模型如下:

$$\min_{U, V, E} \frac{1}{2} (\|U\|_F^2 + \|V\|_F^2) + \lambda \|E\|_1 \quad \text{s.t. } X = UV + E \quad (2)$$

2.2.2. 模型的求解

对(2)构建增广拉格朗日函数得:

$$\mathcal{L}_\mu(U, V, E, Y) = \frac{1}{2} (\|U\|_F^2 + \|V\|_F^2) + \lambda \|E\|_1 + \langle X - UV - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - UV - E\|_F^2$$

输出低秩矩阵 A 为:

$$A^* = U^*V^*$$

其中:

迭代矩阵 U 为:

$$\begin{aligned}
U^* &= \arg \min_U L_\mu(U, V, E, Y) \\
&= \arg \min_U \frac{1}{2} \|U\|_F^2 + \langle X - UV - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - UV - E\|_F^2
\end{aligned} \quad (3)$$

对(3)式求导有:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{1}{2} \|U\|_F^2 + \langle X - UV - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - UV - E\|_F^2 \right) &= 0 \\
U^* &= (X - E + \mu^{-1}Y)V^T (VV^T + \mu^{-1}I)^{-1}
\end{aligned}$$

迭代矩阵 V 为:

$$\begin{aligned}
V^* &= \arg \min_V L_\mu(U, V, E, Y) \\
&= \arg \min_V \frac{1}{2} \|V\|_F^2 + \langle X - UV - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - UV - E\|_F^2
\end{aligned} \quad (4)$$

对(4)式求导有:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{2} \|V\|_F^2 + \langle X - UV - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - UV - E\|_F^2 \right) &= 0 \\
V^* &= (U^T U + \mu^{-1}I)^{-1} U^T (X - E + \mu^{-1}Y)
\end{aligned}$$

迭代稀疏矩阵 E 为:

$$\begin{aligned}
 E^* &= \arg \min_E L_\mu(U, V, E, Y) \\
 &= \arg \min_E \lambda \|E\|_1 + \langle X - UV - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - UV - E\|_F^2 \\
 &= S_{\lambda\mu^{-1}} \{X - UV + \mu^{-1}Y\}
 \end{aligned}$$

2.3. 归纳主成分分析模型(Inductive Robust Principal Component Analysis, IRPCA)

2.3.1. 模型的建立

由于 RPCA 和 BPCA 都适用于批量运算, 因此每次观察到一个新的数据点时, 都必须在所有数据上运行算法, 对不是批量运算的应用程序来说并不是很适合。IRPCA 模型[5]则克服了这一局限性。给定一个初始数据矩阵 X , IRPCA 不是学习它的低秩分量 A , 而是尝试学习一个投影矩阵 P , 它将 X 投影到低维子空间上。换句话说, 存在矩阵 P 使得 $A = PX$ 。随后, 如果观察到一个新的数据点 x_{new} , 就可以很容易地将其投影到低维子空间上, 以便重新恢复。IRPCA 模型如下:

$$\min_{P, E} \|P\|_* + \lambda \|E\|_1 \quad \text{s.t. } X = PX + E \tag{5}$$

2.3.2. 模型的求解

对(5)构建增广拉格朗日函数得:

$$\mathcal{L}_\mu(P, E, Y) = \|P\|_* + \lambda \|E\|_1 + \langle X - PX - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - PX - E\|_F^2$$

输出低秩矩阵 A 为:

$$A^* = P^* X$$

迭代低秩矩阵 P 为:

$$\begin{aligned}
 &\arg \min_P L_\mu(P, E, Y) \\
 &= \arg \min_P \|P\|_* + \langle X - PX - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - PX - E\|_F^2 \\
 &= \arg \min_P \mu^{-1} \|P\|_* + \frac{1}{2} \|PX - (X - E + \mu^{-1}Y)\|_F^2
 \end{aligned}$$

迭代稀疏矩阵 E 为:

$$\begin{aligned}
 E^* &= \arg \min_E L_\mu(P, E, Y) \\
 P_{k+1}^* &= D_{(\mu)^{-1}} \left\{ P_k - n^{-1} (P_k X - X + E - \mu^{-1}Y) X^T \right\} = \arg \min_E \lambda \|E\|_1 + \langle X - PX - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - PX - E\|_F^2 \\
 &= S_{\lambda\mu^{-1}} \{X - PX + \mu^{-1}Y\}
 \end{aligned}$$

2.4. 标准正交鲁棒主成分分析模型(Orthonormal Robust Principal Component Analysis, ORPCA)

2.4.1. 模型的建立

对于给定的数据矩阵 $X \in R^{m \times n}$, RPCA 试图恢复低秩矩阵 $A \in R^{m \times n}$, 可以认为是 X 在低维子空间上的投影, 我们称之为主子空间。IRPCA 将这一思想更进一步, 尝试学习投影矩阵 $P \in R^{m \times n}$, 它将 X 投影到主子空间上, 从而检索 A (即 $A = PX$)。假设主子空间为 r 维, 其中 $r \leq \min(m, n)$, 则需要学习一组基向量 $U = [u_1, u_2, \dots, u_r] \in R^{m \times r}$ 张成主子空间。为了限制 U , 这里要求这组基向量是正交的, 即 $U^T U = I$ 。经典的主成分分析通常将这些基向量称为主成分。学习了主成分后, 投影的数据点将表示为主成分的线

性组合。换句话说, 如果 $V \in R^{m \times n}$ 是一个合适系数的矩阵, 我们可以写成 $A = UV$ 。

下面, 根据前面的讨论, 修改 RPCA 问题。我们可以写出 $A = UV$, $U^T U = I$ 。由于核范数的不变性, 我们得到:

$$\|A\|_* = \|UV\|_* = \|V\|_*$$

建立标准正交鲁棒主成分分析模型[6] (ORPCA)如下:

$$\min_{V, E, U} \|V\|_* + \lambda \|E\|_1 \quad \text{s.t. } X = UV + E, U^T U = I \quad (6)$$

2.4.2. 模型的求解

对(6)构建增广拉格朗日函数得:

$$\mathcal{L}_\mu(V, E, U, Y) = \|V\|_* + \lambda \|E\|_1 + \langle X - UV - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - UV - E\|_F^2$$

输出低秩矩阵 A 为:

$$A^* = U^* V^*$$

迭代矩阵 V 为:

$$\begin{aligned} V^* &= \arg \min_V \mathcal{L}_\mu(V, E, U, Y) \\ &= \arg \min_V \|V\|_* + \langle X - UV - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - UV - E\|_F^2 \\ &= D_{\mu^{-1}} \left\{ U^T (X - E + \mu^{-1} Y) \right\} \end{aligned}$$

迭代矩阵 U :

$$\begin{aligned} U^* &= \arg \min_U \mathcal{L}_\mu(V, E, U, Y) \\ &= \arg \min_U \langle X - UV - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - UV - E\|_F^2 \\ &= \arg \min_U \frac{1}{2} \left\| (X - E + \mu^{-1} Y) - UV \right\|_F^2 \end{aligned}$$

迭代稀疏矩阵 E 为:

$$\begin{aligned} E^* &= \arg \min_E \mathcal{L}_\mu(V, E, U, Y) \\ &= \arg \min_E \lambda \|E\|_1 + \langle X - UV - E, Y \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - UV - E\|_F^2 \\ &= S_{\lambda \mu^{-1}} \left\{ X - UV + \mu^{-1} Y \right\} \end{aligned}$$

3. 实验

3.1. 图片实验

首先, 选取大小为 650×650 的原始图片见, 对原始图片添加含噪声率为 10% 的椒盐噪声, 详情见图 1。设定算法迭代终止条件为 $tol = 1e-6$, 迭代最大次数为 1000 次, 其他参数为默认值。算出各个算法恢复矩阵后的相对错误率, 算法运行时间和算法达到收敛时迭代次数。从而能更准确的对各类算法进行对比总结。



Figure 1. Original pictures and pictures with noise

图 1. 原始图片与含有噪声的图片

3.2. 实验结果

由图 2 中的图像与图 1 对比和表 1 数据对比, 我们可以看出传统的 RPCA 耗时时间最长, 迭代次数最多, 所得图像相对误差较大; BRPCA 耗时与迭代次数均较少, 但图像误差仅次于 RPCA; IRPCA 耗时间与所需的迭代次数最短, 所得的图像较为清晰, 误差较小; ORPCA 所需时长与迭代次数略高于 BRPCA, 但所得的图像最清晰, 误差最小。

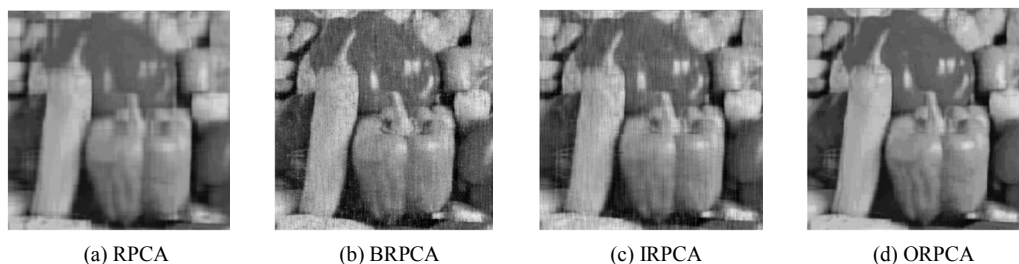


Figure 2. Image denoised by each algorithm

图 2. 各算法去噪后的图片

Table 1. Data denoised by each algorithm

表 1. 各算法去噪后的数据

算法	Error	Time	Iteration
RPCA	0.1551	227.3066	689
BRPCA	0.1466	119.4432	222
IRPCA	0.1229	97.7451	198
ORPCA	0.1105	125.33	246

3.3. 实验小结

在本文中, 我们介绍了几种主成分分析模型, 即 RPCA 模型, BRPCA 模型, IRPCA 模型和 ORPCA 模型, 分析了他们的原理, 模型的求解并进行了实验, 通过实验我们可以发现, 这几种模型对图片去噪是有效的, 但是所需要的时间, 迭代次数, 以及误差大小各不相同, 利用直观的图像和数据更加客观的反应各种算法的优缺点。

参考文献

- [1] 史加荣, 郑秀云, 魏宗田, 等. 低秩矩阵恢复算法综述[J]. 计算机应用研究, 2013, 30(6): 1601-1605.

-
- [2] 肖萌. 改进的鲁棒主成分分析模型及其应用[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 2016.
- [3] Papamakarios, G. (2014) Robust Low-Rank Modelling on Matrices and Tensors. MSc Thesis, Department of Computing, Imperial College, London.
- [4] Cabral, R., Torre, F.D.L., Costeira, J.P., *et al.* (2013) Unifying Nuclear Norm and Bilinear Factorization Approaches for Low-Rank Matrix Decomposition. *Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Computer Vision*, IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICCV.2013.309>
- [5] Bao, B.K., Liu, G., Xu, C., *et al.* (2012) Inductive Robust Principal Component Analysis. *IEEE Transactions on Image Processing*, **21**, 3794-3800. <https://doi.org/10.1109/TIP.2012.2192742>
- [6] Liu, G. and Yan, S. (2012) Active Subspace: Toward Scalable Low-Rank Learning. *Neural Computation*, **24**, 3371-3394. https://doi.org/10.1162/NECO_a_00369

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: aam@hanspub.org