Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(6), 1114-1120
Published Online June 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.86129

Hans汉斯

Steady State Bifurcation of Extended Fish-Kolmogorov System with Direchlet Boundary Condition

Yingxia Wang, Qianru Hou, Zhigang Pan*

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan
Email: wyx2515909194@163.com, hqryy97@163.com, *panzhigang@swjtu.edu.cn

Received: May 25th, 2019; accepted: Jun. 13th, 2019; published: Jun. 20th, 2019

Abstract

In this paper, we study the bifurcation problem of extended Fisher-Kolmogorov system with Direchlet boundary condition. Based on normalized Lyapunov-Schmidt reduction method, we use spectral analysis and bifurcation theory to prove the existence of bifurcated solution and obtain the exact form of bifurcated solutions. Furthermore, the regularity of solutions is also discussed.

Keywords

Extended Fisher-Folmogorov System, Direchlet Boundary Condition, Lyapunov-Schmidt Reduction, Bifurcated Solution, Regularity

Extended Fisher-Kolmogorov系统在Direchlet边界条件下的定态分歧

王英霞，侯芊如，潘志刚*

西南交通大学数学学院，四川 成都
Email: wyx2515909194@163.com, hqryy97@163.com, *panzhigang@swjtu.edu.cn

收稿日期：2019年5月25日；录用日期：2019年6月13日；发布日期：2019年6月20日

摘 要

本文研究了Extended Fisher-Kolmogorov系统在Direchlet边界条件下的分歧问题，利用规范化的

*通讯作者。

文章引用: 王英霞, 侯芊如, 潘志刚. Extended Fisher-Kolmogorov 系统在 Direchlet 边界条件下的定态分歧[J]. 应用数学进展, 2019, 8(6): 1114-1120. DOI: 10.12677/aam.2019.86129

Lyapunov-Schmidt约化方法，通过谱分析以及分歧理论，证明了分歧解的存在性并得到了其完整表达式，最后对分歧解的正则性进行了讨论。

关键词

Extended Fisher-Kolmogorov系统，Direchlet边界，Lyapunov-Schmidt约化，分歧解，正则性

1. 引言及预备知识

关于 Extended Fisher-Kolmogorov (EFK)系统，曾在 19 世纪 80 年代作为主要理论模型运用在相变以及双稳态系统的研究中[1] [2]。在过去的几十年里，研究者们对于 EFK 系统中进行了大量的研究[3] [4] [5]，其研究重点主要是解的渐进行为以及解的结构问题[6] [7]，但是对于 EFK 系统的分歧解问题研究较少。分歧是非线性问题中普遍存在的现象，主要研究当系统参数超过临界值时稳态解的变化过程。目前已有诸多论文文献[8] [9] [10] [11] [12]运用分歧理论对分歧问题进行研究讨论，其中，文献[12]主要采用了传统意义上的 Lyapunov-Schmidt 约化方法，而文献[8]则对 Lyapunov-Schmidt 约化方法的规范化过程进一步探讨，以及对线性的全连续场谱理论进行了研究，并将 Lyapunov-Schmidt 约化方法应用到了愈加普遍的非线性演化方程之中。而后文献[4] [5] [12] [13]在生物等许多领域中应用文献[8]中关于分歧理论方法进行了深度研究。文献[14]分别在 Neumann 边界条件下和 Direchlet 边界条件下对于 Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (FKPP)方程的定态分歧问题进行了研讨。

其中文献[15]运用了文献[8]中研究的规范化 Lyapunov-Schmidt 约化方法以及谱定理对于 Neumann 边界条件下的 EFK 系统的定态分歧问题进行了深入研究。本文运用文献[8]中的方法理论讨论在 Direchlet 边界条件下的 EFK 系统的定态分歧问题。

首先引入分歧的定义，考虑以下抽象算子方程：

$$L_\lambda \varphi + G(\varphi,\lambda) = 0,$$

这里线性算子 $L: X_1 \to X$，非线性算子 $G: X_1 \to X$， X_1, X 是 Hilbert 空间。

定义 1 (分歧定义) [9]假设 $(0,\lambda)$， $\lambda \in R^1$ 是算子方程的一个平凡解。若存在 $\lambda_0 \in R^1$，使得：当 $\lambda < \lambda_0$ 或 $\lambda > \lambda_0$ 时，算子方程存在一个解 $(\varphi_\lambda,\lambda) \neq (0,\lambda)$ 且 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}(\varphi_\lambda,\lambda) = (0,\lambda_0)$， $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\|\varphi_\lambda\|_{x_1} = 0$，则称算子方程在 $(0,\lambda_0)$ 处发生分歧。

考虑以下 EFK 系统的定态分歧问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\mu \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda g(u), (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \\ \displaystyle\int_0^\pi u(x)\,\mathrm{d}x = 0, \forall t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0, x \in (0,\pi) \end{cases} \tag{1}$$

其中，λ 是系统参数，$\mu>0$，$\alpha>0$ 是常数。

$$g(s)=\sum_{k=2}^{p}a_k s^k$$

这里，$2\le p\in N$，a_k 是给定的常数。

本论文将研究系统(1)所对应的平衡态系统[14]

$$\begin{cases}-\mu\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\lambda u+g(u)=0,x\in(0,\pi)\\ u(0)=u(\pi)=0\\ \int_0^{\pi}u(x)\mathrm{d}x=0\end{cases}\tag{2}$$

考虑系统(2)，引入了以下的空间

$$H=L^2(0,\pi),$$

$$H_1=\left\{u\in H^4[0,\pi]\middle|u(0)=u(\pi)=0,\int_0^{\pi}u(x)\mathrm{d}x=0\right\},$$

接下来定义算子 $L_A=A+B_\lambda:H_1\to H$ 和 $G:H_1\to H$，且满足如下等式：

$$Au=-\mu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\tag{3}$$

$$B_\lambda=\lambda u$$

2. 主要结果

2.1. 定理

定理 1 对于系统(2)有以下的结论成立：

1) 当 $\alpha_2\ne 0$ 时，系统(2)可从 $(u,\lambda)=(0,\alpha+\mu)$ 处产生 1 个正则分歧解，其表达式如下：

$$\overline{u}_1=-\frac{3\pi(\lambda-\alpha-\mu)}{8\alpha_2}\sin x+O\left(|\lambda-\alpha-\mu|^2\right);\tag{4}$$

2) 当 $\alpha_2=0,\alpha_3\ne 0$ 时，系统(2)从 $(u,\lambda)=(0,\alpha+\mu)$ 处产生 2 个正则分歧解，其表达式如下：

$$\begin{aligned}\overline{u}^{+}&=\sqrt{\frac{4(\alpha+\mu-\lambda)}{3\alpha_3}}\sin x+O\left(|\lambda-\alpha-\mu|^{\frac{1}{2}}\right)\\ \overline{u}^{-}&=-\sqrt{\frac{4(\alpha+\mu-\lambda)}{3\alpha_3}}\sin x+O\left(|\lambda-\alpha-\mu|^{\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}\tag{5}$$

2.2. 定理证明

证明 下面对以上定理进行证明：

第 1 步 求出 $L_\lambda=A+B_\lambda$ 的所有特征值以及其对应的特征函数.

先令 λ_k 和 φ_k $(k=1,2,\cdots)$ 是如下方程的第 k 个特征值和对应的特征函数

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi_k}{\mathrm{d}x^2}=\lambda_k\varphi_k,$$

$$\varphi_k(0)=\varphi_k(\pi)=0,$$

$$\int_0^{\pi}\varphi_k^2\mathrm{d}x=1 \tag{6}$$

可解得方程(6)的特征值$\{\lambda_k | k=1,2,3,\cdots\}$(计入重数)为$\lambda_k=k^2$，且其对应的特征函数$\{\varphi_k | k=1,2,3,\cdots\}$为

$$\varphi_k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx$$

由此可得方程(3)中的算子L_λ特征值为

$$\{\beta_k(\lambda)=\lambda-\alpha k^2-\mu k^4 | k=1,2,\cdots\},$$

且方程(6)的特征函数$\{\varphi_k | k=1,2,3,\cdots\}$满足正交性，即：

$$\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle_H=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j.\end{cases}$$

参考文献[8]可知，算子L_λ的特征函数$\{\varphi_k | k=1,2,3,\cdots\}$可以在空间$H_1$中构成一组正交基.

易得算子L_λ的第一特征值是

$$\beta_1(\lambda)=\lambda-\alpha-\mu,$$

则可得其对应的特征向量为

$$\varphi_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$$

且β_j满足

$$\beta_j(\alpha+\mu)\neq 0, j\geq 2$$

第 2 步 运用谱定理[8]，对空间H和算子L_λ进行分解。

由谱定理[8]可得，在$\lambda=\alpha+\mu$的邻域内，空间H可以被分解为：

$$H_1=E_1\oplus E_2,\quad H=E_1\oplus\bar{E}_2,$$

在上式中，

$$E_1=span\{\varphi_1\},\quad E_2=span\{\varphi_2,\varphi_3,\cdots\}.$$

且线性算子L_λ在$\lambda=\alpha+\mu$的邻域内可以被分解成：

$$L_\lambda=L_\lambda^1+L_\lambda^2,$$

其中，

$$L_\lambda^1:E_1\to E_1,\quad L_\lambda^2:E_2\to\bar{E}_2.$$

先令$u\in H_1$，则有$u=u_1+u_2$，其中u_1,u_2满足：$u_1\in E_1$，$u_2\in E_2$.

现不妨设

$$u_1=x_1\varphi_1,\quad u_2=\sum_{j=2}^{\infty}y_j\varphi_j,\quad y_j\in R.$$

第 3 步 利用规范化的 Lyapunov-Schmidt 约化方法可以解出系统(2)的分歧解。

先将 u_1 和 u_2 代入方程(3)，可得如下等式：

$$\beta_1(\lambda)x_1+\sum_{k=2}^{p}\alpha_k\left\langle\left(x_1\varphi_1+\sum_{j=2}^{\infty}y_j\varphi_j\right)^k,\varphi_1\right\rangle_H=0 \tag{7}$$

$$\beta_j(\lambda)y_j+\sum_{k=2}^{p}\alpha_k\left\langle\left(x_1\varphi_1+\sum_{j=2}^{\infty}y_j\varphi_j\right)^k,\varphi_j\right\rangle_H=0,j\ge 2 \tag{8}$$

由于在进行 Lyapunov-Schmidt 约化的过程中，α_2 的取值对约化方程的形式产生影响，所以本文根据 α_2 的取值分别做如下的分类讨论.

1) 当 $\alpha_2\neq 0$ 时，近似方程为

$$\beta_{\mathrm{j}}(\lambda)y_i+\alpha_2x_1^2\left\langle\varphi_1^2,\varphi_j\right\rangle_H+O\left(x_1^2\right)=0,j\ge 2$$

又因为 $\varphi_1,\varphi_j\left(j\ge 2\right)$ 满足

$$\left\langle\varphi_1^2,\varphi_1\right\rangle=\frac{8\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{\pi}},$$
$$\left\langle\varphi_1^2,\varphi_j\right\rangle=0,j\ge 2$$

则可以解得

$$y_j=O\left(x_1^2\right),j\ge 2\text{。}$$

再将 $y_j\left(j=2,3,\cdots\right)$ 代入方程(7)，可得

$$\beta_1(\lambda)x_1+\alpha_2x_1^2\left\langle\varphi_1^2,\varphi_1\right\rangle_H+O\left(x_1^2\right)=0$$

化简后的近似方程如下示：

$$\beta_1(\lambda)x_1+\frac{8\sqrt{2}\alpha_2x_1^2}{3\pi\sqrt{\pi}}=0\text{。} \tag{9}$$

进而可以得到 1 个分歧分支

$$x_1=-\frac{3\pi\sqrt{\pi}\left(\lambda-\alpha-\mu\right)}{8\sqrt{2}\alpha_2} \tag{10}$$

由此可知，方程(9)在 $\left(x,\lambda\right)=\left(0,\alpha+\mu\right)$ 处产生了分歧，且分歧出了一个分歧解.

2) 当 $\alpha_2=0$，$\alpha_3\neq 0$ 时，由(7)式可得

$$\beta_1(\lambda)x_1+\alpha_3\left\langle x_1^3\varphi_1^3,\varphi_1\right\rangle=0$$

又由 φ_1 满足

$$\left\langle\varphi_1^3,\varphi_1\right\rangle=\frac{3}{2\pi}$$

可得

$$\beta_1(\lambda)x_1+\frac{3\alpha_3}{2\pi}x_1^3=0 \tag{11}$$

由以上可以解出如下分歧解：

$$x_1^+ = \sqrt{\frac{2\pi(\alpha+\mu-\lambda)}{3\alpha_3}},\quad x_1^- = -\sqrt{\frac{2\pi(\alpha+\mu-\lambda)}{3\alpha_3}} \tag{12}$$

由此可知，方程(11)在 $(x,\lambda)=(0,\alpha+\mu)$ 处产生了分歧，且分歧出两个不同的分歧解.

第 4 步 讨论平衡态系统的分歧解及分歧解的正则性.

先讨论方程(9)和方程(11)的分歧解的正则性.

在方程(9)和方程(11)中，对应的对 x_1 求导的导数如下：

$$\beta_1(\lambda)+\frac{16\sqrt{2}\alpha_2}{3\pi\sqrt{\pi}}x_1 = -(\lambda-\alpha-\mu) \tag{13}$$

$$\beta_1(\lambda)+\frac{3\alpha_3}{2\pi}x_1^2 = -2(\lambda-\alpha-\mu) \tag{14}$$

易见，在 $\lambda=\alpha+\mu$ 的去心邻域内，若邻域充分小的情况下，则方程(13)和方程(14)皆不为零，由此可知方程(9)和方程(11)的分歧解都是正则的。再参考文献[8]分歧解的正则性相关定理，系统(2)的分歧解也都是正则的。

考虑当 $\alpha_2\neq 0$ 时，系统(2)的分歧解表达式如下

$$\bar{u}_1 = -\frac{3\pi(\lambda-\alpha-\mu)}{8\alpha_2}\sin x + O\left(|\lambda-\alpha-\mu|^2\right);$$

而当 $\alpha_2=0$ 时，系统(2)的分歧解表达式如下

$$\bar{u}^+ = \sqrt{\frac{4(\alpha+\mu-\lambda)}{3\alpha_3}}\sin x + O\left(|\lambda-\alpha-\mu|^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\bar{u}^- = -\sqrt{\frac{4(\alpha+\mu-\lambda)}{3\alpha_3}}\sin x + O\left(|\lambda-\alpha-\mu|^{\frac{1}{2}}\right)$$

综上所述，定理得证。

参考文献

[1] Coullet, P., Elphick, C. and Repaux, D. (1897) The Nature of Spatial Chaos. *Physical Review Letters*, **58**, 431-434. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.431

[2] Dee, G. and Saarloose, W. (1998) Bistable Systems with Propagating Fronts Leading to Pattern Formation. *Physical Review Letters*, **60**, 2641-2644. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.60.2641

[3] Tersians, C.J. (2001) Periodic and Homoclinic Solutions of Extended Fisher-Kolmogorov Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **2**, 490-506. https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7470

[4] 李军燕, 柴沙沙. 一类浮游生物捕食系统的定态分歧[J]. 平顶山学院学报: 自然科学版, 2014, 29(2): 19-23.

[5] 戴婉仪. 一类具有交叉互惠系统的定态分歧与稳定性[J]. 华南师范大学学报: 自然科学版, 2005(3): 112-117.

[6] Kwapisz, J. (2000) Uniqueness of the Stationary Wave for the Extended Fisher-Kolmogorov Equation. *Journal of Differential Equations*, **1**, 235-253. https://doi.org/10.1006/jdeq.1999.3750

[7] 罗宏, 蒲志林. Extended Fisher-Kolmogorov 系统的整体吸引子及其分形维数估计[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2004, 27(2): 135-138.

[8] 马天, 汪守宏. 非线性演化方程的稳定性与分歧[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[9] 帅鲲, 蒲志林, 潘志刚. 一类带平均值约束的二元方程组的定态分歧[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2013, 36(6): 820-823.

[10] Ma, T. and Wang, S. (2005) Bifurcation Theory and Applications. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/9789812701152

[11] 周钰谦, 刘倩. 一类非线性磁流变阻尼系统的局部分岔[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2008, 45(2): 241-244.

[12] 钟承奎, 范先令, 陈文塬. 非线性泛函分析引论[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1998.

[13] 张强, 张正丽. 一类反应扩散方程的定态分歧[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2010, 47(3): 461-463.

[14] 张强, 雷开洪, 向丽. Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov 方程的定态分歧[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2013, 50(1): 6-10.

[15] 张强, 曾艳, 李桂花, 张黔川. 带 Neumann 边界条件的 Extended Fisher-Kolmogorov 系统的定态分歧[J]. 四川师范大学学报: 自然科学板, 2014, 37(2): 188-191.