Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(6), 1160-1165
Published Online June 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.86134

On the Extremal Wiener Indices of Graphs with Given Clique Number

Yuanlong Chen, Xiaoying Wu*

School of Financial Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance, Guangzhou Guangdong
Email: chernylong@163.com, *wxyingyy@163.com

Received: Jun. 11th, 2019; accepted: Jun. 21st, 2019; published: Jun. 28th, 2019

Abstract

In this paper, we investigate the Wiener index for connected graphs of given clique number, obtain sharp lower and upper bounds on Wiener index for connected graphs of order *n* with clique number *l*. For connected graphs of order *n* with clique number *l*, by the method of shift-joint deformation, we obtain the largest Wiener index graph and the smallest Wiener index graph are $K_l u P_{n-l+1}$ and Tuŕan graph, respectively.

Keywords

Graph, Wiener Index, Extremal Graphs, Clique Number

给定团数的Wiener指数极图

陈员龙，吴小英*

广东金融学院金融数学与统计学院，广东 广州
Email: chernylong@163.com, *wxyingyy@163.com

收稿日期：2019年6月11日；录用日期：2019年6月21日；发布日期：2019年6月28日

摘　要

本文研究一类给定团数的连通图的Wiener指数，讨论和刻画了团数为*l*的*n*阶连通图的Wiener指数的上界和下界，通过移接变形等方法证明了团数为*l*的*n*阶连通图中具有最大，最小Wiener指数的极值图分别为 $K_l u P_{n-l+1}$ 与Tuŕan图。

*通讯作者。

文章引用: 陈员龙, 吴小英. 给定团数的 Wiener 指数极图[J]. 应用数学进展, 2019, 8(6): 1160-1165.
DOI: 10.12677/aam.2019.86134

关键词

图，Wiener指数，极图，团数

1. 引言

分子拓扑学是一门应用于图论、化学、拓扑学等相互交叉的学科，是当前的一个热门研究领域。分分子拓扑学的一个最重要研究方向是分子拓扑指数，其中关于拓扑指数的极值研究为计算机搜索算法确定分子图的顶点数与边数的上下确界范围提供理论依据，从而提高计算机的搜索算法的效率。因而关于分子拓扑指数的最大或最小拓扑指数图的研究成为化学分子图的研究热点，近年来许多研究者对其进行深入研究并取得很多有意义的结果[1]-[9] [11] [12] [13]。

Wiener 指数可以用来解释烷烃的物理化学性质的变化，分子结构与药理性能的关系，因此确定 Wiener 指数的极值图对分子化学应用有着非常重要的意义。早在上个世纪 70 年代 Entringer 等在[10]中证明了 n 阶树中具有最大、最小 Wiener 指数的极值图分别是路 P_n 与星图 S_n。随后出现许多关于 Wiener 指数的数学与化学的结论，特别是树的 Wiener 指数研究。例如 Jelena 等在[14]中讨论了给定最大度的 n 阶树，获得此类树的最小 Wiener 指数极值图。刘慧清等在[3] [4]中分别讨论了给定直径的 n 阶树的最小 Wiener 指数极值图与及给定 r 个圈的 n 阶连通图的四类拓扑指数极值图。王华在研究给定度序列的 n 阶树时[15]，确定了最大与最小的 Wiener 指数极值图。Dobrynin 等在[13]中对近年关树的 Wiener 指数的重要研究结果做了一个综述，并给出了几个猜想及公开问题。

本文考虑了给定团数的 n 阶连通图的 Wiener 指数的值图。通过移接变形等方法证明了团数为 l 的 n 阶连通图中具有最大，最小 Wiener 指数的极值图分别为 $K_l u P_{n-l+1}$ 与 Turán 图。

2. 基本引理

在这一节我们先给出一些相关引理。设 K_l 是一个 $l(l\geq 3)$ 阶团，$V(K_l)=\{v_1,v_2,\cdots,v_l\}$。设 $\mathscr{H}(K_l,H)=\{G:G\text{是一个具有团数为}l\text{的}n\text{阶简单连通图}\}$，$H(K_l;T_{k_1},T_{k_2},\cdots,T_{k_l})$ 是一个 n 阶简单连通图，它是在团 K_l 的每个顶点 v_i 上分别附上阶为 k_i 的树 T_{k_i} 得到的图，$H(K_l;P_{k_1},P_{k_2},\cdots,P_{k_l})$ 是一个 n 阶简单连通图，它是在团 K_l 的每个顶点 v_i 上分别附上阶为 k_i 的路 P_{k_i} 得到的图，其中 $n=\sum_{i=1}^{l}k_i$ $(k_i\geq 1, i=1,2,\cdots,l)$。记

$$\mathscr{H}(K_l,T)=\left\{H(K_l;T_{k_1},T_{k_2},\cdots,T_{k_l}):n=\sum_{i=1}^{l}k_i,k_i\geq 1,i=1,2,\cdots,l\right\}$$

$$\mathscr{H}(K_l,P)=\left\{H(K_l;P_{k_1},P_{k_2},\cdots,T_{k_l}):n=\sum_{i=1}^{l}k_i,k_i\geq 1,i=1,2,\cdots,l\right\}$$

引理 1 [2]设 G 是一个连通图，G_1，G_2 是 G 的两个连通子图并且有唯一的公共点 u，$G_1\cup G_2=G$。设 $n_1=|V(G_1)|$，$n_2=|V(G_2)|$。那么 $W(G)=W(G_1)+W(G_2)+(n_1-1)D_{G_2}(u)+(n_2-1)D_{G_1}(u)$。

引理 2 设 T_n，P_n 分别是阶为 n 的树和路。P_k 是 T_n 中最长的一条路。如果 $u\in V(P_k)$ 且 $d_{T_n}(u)=1$，$v\in V(P_n)$ 且 $d_{P_n}(v)=1$，那么 $D_{T_n}(u)\leq D_{P_n}(v)$ 且等号成立当且仅当 $T_n\cong P_n$。

证明： $D_{T_n}(u)=D_{P_k}(u)+D_{T_n\setminus P_k}(u)\le D_{P_k}(u)+k(n-k)$，

$$D_{P_n}(v)=D_{P_k}(u)+D_{P_n\setminus P_k}(u)\ge D_{P_k}(u)+k(n-k)，$$

我们有 $D_{P_n}(v)-D_{T_n}(u)\ge 0$，因此 $D_{T_n}(u)\le D_{P_n}(v)$ 且等号成立当且仅当 $T_n\cong P_n$。

设图 H_1，H_2 是两个连通图且 $V(H_1)\cap V(H_2)=\{v\}$。$G=H_1vH_2$ 是一个连通图且

$$V(G)=V(H_1)\cup V(H_2)，\quad V(H_1)\cap V(H_2)=\{v\}，\quad E(G)=E(H_1)\cup E(H_2)。$$

引理 3 [13]设 T,P 分别是阶为 n 的树和路，那么 $W(T)\le W(P)$ 且等号成立当且仅当 $T\cong P$。

引理 4 设 H 是阶为 $n-k$ 的连通图，T_{k+1} 是一棵阶为 $k+1$ 的树，P_{k+1} 是一条阶为 $k+1$ 的路且 $V(H)\cap V(T_{k+1})=\{u\}$，$V(H)\cap V(P_{k+1})=\{u\}$，则 $W(HuT_{k+1})\le W(HuP_{k+1})$ 且等号成立当且仅当 $T_{k+1}\cong P_{k+1}$。

证明： 由引理 1 有 $W(HuT_{k+1})-W(HuP_{k+1})=W(T_{k+1})-W(P_{k+1})+k\left(D_{T_{k+1}}(u)-D_{P_{k+1}}(u)\right)$，根据引理 2，3 有 $W(HuT_{k+1})-W(HuP_{k+1})\le 0$，因此 $W(HuT_{k+1})\le W(HuP_{k+1})$ 且等号成立当且仅当 $T_{k+1}\cong P_{k+1}$。

由 Wiener 指数的定义我们有

引理 5 设 G 是一个简单连通图且 $x,y\in V(G)$。如果边 $xy\notin E(G)$，那么 $W(G+xy)<W(G)$。

由引理 5 我们有

引理 6 设 $G\in\mathscr{H}(K_l,T)(l\ge 3)$ 且 $x\in V(T_i),y\in V(T_j),i,j=1,2,\cdots,l$，如果 $xy\notin E(G)$，那么 $G'=G+xy\in\mathscr{H}(K_l,H)$ 且 $W(G)>W(G')$，其中 $G+xy$ 表示添加一条连接图 G 中不相邻的两点 x,y 的边得到的图。

引理 7 设 $G_1\in\mathscr{H}(K_l,P)$，P_{k_i},P_{k_j} 分别是阶为 $k_i,k_j\ge 2$ 的两条不同的路。$H=G_1\setminus\left(\left(P_{k_i}-\{v_i\}\right)\cup\left(P_{k_j}-\{v_j\}\right)\right),G_2=Hv_iP_{k_i}wP_{k_j}$ （见图 1）。则 $W(G_2)>W(G_1)$。

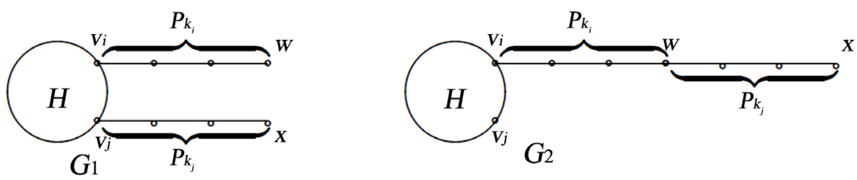

Figure 1. Two graphs
图 1. 两种图例

证明： 由引理 1 我们有

$$W(G_1)=W(P_{k_i}v_iH)+W(P_{k_j})+\left(n_{P_{k_i}v_iH}-1\right)D_{P_{k_j}}(v_j)+(k_j-1)D_{P_{k_i}v_iH}(v_j)，$$

$$W(G_2)=W(Hv_iP_{k_i})+W(P_{k_j})+\left(n_{Hv_iP_{k_i}}-1\right)D_{P_{k_j}}(w)+(k_j-1)D_{Hv_iP_{k_i}}(w)。$$

直接计算有

$$\begin{aligned}
D_{Hv_iP_{k_i}}(w)&=D_{H\setminus\{v_i\}}(w)+D_{P_{k_i}}(w)\\
&=D_{H\setminus\{v_i\}}(v_i)+(k_i-1)(n_H-1)+D_{P_{k_i}}(v_i)\\
&=D_{H\setminus\{v_i\}}(v_i)+(k_i-1)(n_H-1)+D_{P_{k_i}}(v_j)-k_i\\
&=D_{H\setminus\{v_i,v_j\}}(v_j)+d_{H(v_i,v_j)}+(k_i-1)(n_H-1)+D_{P_{k_i}}(v_j)-k_i\\
&=D_{H\setminus\{v_i\}}(v_j)+1+(k_i-1)(n_H-1)+D_{P_{k_i}}(v_j)-k_i\\
&=D_{H\setminus\{v_i\}}(v_j)+(k_i-1)(n_H-2)+D_{P_{k_i}}(v_j)
\end{aligned}$$

$$D_{Hv_iP_{k_i}}\left(v_j\right)=D_{H\setminus\{v_i\}}\left(v_j\right)+D_{P_{k_i}}\left(v_j\right)$$

因为 $K_l\subseteq H\left(l\geq 3\right)$，所以 $n_H\geq 3$。因此 $D_{Hv_iP_{k_i}}\left(w\right)-D_{P_{k_i}v_iH}\left(v_j\right)=\left(k_i-1\right)\left(n_H-1\right)>0$，也即 $D_{Hv_iP_{k_i}}\left(w\right)>D_{P_{k_i}v_iH}\left(v_j\right)$。又因为 $D_{P_{k_j}}\left(w\right)=D_{P_{k_j}}\left(v_j\right)$，$Hv_iP_{k_i}\cong P_{k_i}v_iH$，所以

$$W\left(G_2\right)-W\left(G_1\right)=\left(n_{Hv_iP_{k_i}}-1\right)D_{P_{k_j}}\left(v_j\right)+\left(k_j-1\right)\left(D_{Hv_iP_{k_i}}\left(w\right)-D_{P_{k_i}v_iH}\left(v_j\right)\right)>0$$

故 $W\left(G_2\right)>W\left(G_1\right)$。

3. 项给定团数的图的 Wiener 指数极图

定理 1 设 $G\in\mathscr{H}\left(K_l,H\right)$，那么 $W\left(G\right)\leq W\left(K_luP_{n-l+1}\right)$ 且等号成立当且仅当 $G\cong K_luP_{n-l+1}$。

证明： 我们选择 $G\in\mathscr{H}\left(K_l,H\right)$ 使得 $W\left(G\right)$ 尽可能大。

断言 1 如果 $G\in\mathscr{H}\left(K_l,H\right)$ 是具有最大 Wiener 指数的图，那么 $G\in\mathscr{H}\left(K_l,T\right)$。

断言 1 的证明： 否则，我们假设 $G\notin\mathscr{H}\left(K_l,T\right)$，那么存在一个圈 $C\subseteq G$ 且有 $xy\in E\left(C\right)$，但 $xy\notin E\left(K_l\right)$。设 $G'=G\setminus xy$ 为图 G 删除边 xy 那么 $G'\in\mathscr{H}\left(K_l,H\right)$。由引理 6 有。这与 G 的选择矛盾，所以断言 1 成立。

断言 2 如果 $G\in\mathscr{H}\left(K_l,H\right)$ 是具有最大 Wiener 指数的图，那么 $G\in\mathscr{H}\left(K_l,P\right)$。

断言 2 的证明： 由断言 1 有 $G\in\mathscr{H}\left(K_l,T\right)$。由引理 4 有 $G\in\mathscr{H}\left(K_l,P\right)$。所以断言 2 成立。

断言 3 如果 $G\in\mathscr{H}\left(K_l,H\right)$ 是具有最大 Wiener 指数的图，那么 $G\cong K_luP_{n-l+1}$。

断言 3 的证明： 否则，我们假设 G 不同构 K_luP_{n-l+1}。由断言 2 有 $G\in\mathscr{H}\left(K_l,P\right)$。设 $V\left(K_l\right)=\left\{v_1,v_2,\cdots,v_l\right\}$，$G=H\left(K_l;P_{k_1},P_{k_2},\cdots,P_{k_l}\right)$。那么 G 至少有两条阶大于 1 的路 P_{k_i},P_{k_j} 附在团 K_l 的两个不同的顶点 $v_i,v_j\left(1\leq i\neq j\leq l\right)$ 上。令 $H=G\setminus\left(\left(P_{k_i}-\left\{v_i\right\}\right)\cup\left(P_{k_j}-\left\{v_j\right\}\right)\right)$，$G_2=Hv_iP_{k_i}wP_{k_j}$ $G_1=P_{k_i}v_iHv_jP_{k_j}=G$，由引理 7 有 $W\left(G\right)=W\left(G_1\right)<W\left(G_2\right)$。这与 G 的选择矛盾，因此我们有 $G\cong K_luP_{n-l+1}$。

综上所述知定理成立。

定理 2 如果 $G\in\mathscr{H}\left(K_l,H\right)$ 是具有最小 Wiener 指数的图，那么 G 是 Tuŕan 图。

证明： 我们选择 $G\in\mathscr{H}\left(K_l,H\right)$ 使得 $W\left(G\right)$ 尽可能小。由 G 的团数为 l，因而 G 中至少有一个团 K_l，不妨设为 K_{l_1}，$V\left(K_{l_1}\right)=\left\{u_1,u_2,\cdots,u_l\right\}$。设 $G_1=G-V\left(K_{l_1}\right)$。下面我们先证明三个断言：

断言 1 在 G 中，$V\left(G_1\right)$ 中每个点至多与 $V\left(K_{l_1}\right)$ 中 $l-1$ 个顶点都相邻。

断言 1 的证明： 否则，G 中有完全图 K_{l+1}，与 G 的团数为 l 矛盾，所以断言 1 成立。

断言 2 如果 $1\leq n-l<l$，则 G_1 是一个完全图 K_{n-l}。

断言 2 的证明： 否则，设 G_1 中最大完全图为 $K_{r_1},r_1<n-l$。由断言 1 知 G_1 中每个顶点与 K_{l_1} 中至少一个顶点距离大于等 2。设 $G_2=G_1-V\left(K_{r_1}\right)$，由 K_{r_1} 为 G_1 中最大完全图，所以 $V\left(G_2\right)$ 中每个点至多与 $V\left(K_{r_1}\right)$ 中 r_1-1 个点都相邻(否则，G_1 中有更大的完全图，矛盾)，也即 G_2 中每个顶点与 K_{r_1} 中至少一个顶点距离大于等于 2。因此我们有

$$W\left(G\right)\geq\binom{n}{2}+n-l+n-l-r_1>\binom{n}{2}+n-l=W\left(T_{l,n}\right),$$

这与 G 的选择矛盾，所以断言 2 成立。

断言 3 如果 $l\leq n-l$，则 G_1 中含阶数最大为 l 的完全图 K_l。

断言 3 的证明： 否则，如果 G_1 中不含完全图 K_l，设 G_1 中最大完全图为 $K_{r_1}\left(r_1<l\right)$，设 $G_2=G_1-V\left(K_{r_1}\right)$，$G_2$ 中最大完全图为 $K_{r_2}\left(r_2\leq r_1\right)$，依此类推，设 $G_k=G_{k-1}-V\left(K_{r_{k-1}}\right)$，$G_k$ 中最大完全图为

$K_{r_k}\left(k\ge\left\lfloor\frac{n}{l}\right\rfloor+1,r_k\le r_{k-1}\right)$。由断言 1 知 G_1 中每个顶点与 K_{l_1} 中至少一个顶点的距离大于等于 2，由 K_{r_1} 为 G_1 中最大完全图，所以 $V(G_i+1)$ 中每个顶点至多与 $V(K_{r_1})$ 中 r_1-1 个点都相邻，也即 G_2 中每个顶点与 K_{r_1} 中至少一个顶点的距离大于等于 2。依此类推，由 K_{r_i} 为 G_i 中最大完全图，所以 $V(G_2)$ 中每个顶点至多与 $V(K_{r_i})$ 中 r_i-1 个顶点都相邻，也即 G_{i+1} 中每个顶点与 K_{r_i} 中至少一个顶点的距离大于等于 2，其中 $i=1,2,\cdots,k-1$。因此我们有

$$\begin{aligned}W(G)&\ge\binom{n}{2}+n-l+n-l-r_1+\cdots+n-l-\sum_{i=1}^{k-1}r_i\\&>\binom{n}{2}+n-l+\cdots+n-\left\lfloor\frac{n}{l}\right\rfloor l=W(T_{l,n})\end{aligned}$$

这与 G 的选择矛盾，以 G_1 中有完全图 K_l。又因为 G 的团数为 l，所以 G_1 中含有阶数最大为 l 的完全图。所以断言 3 成立。

设 $n=tl+r(0\le r<l)$，则 $t=\left\lfloor\frac{n}{l}\right\rfloor$。由断言 3 可知 G 中有 t 个顶点互不相交的 l 团，不妨设为 $K_{l_1},K_{l_2},\cdots,K_{l_t}$，$V(K_{l_1})=\{u_1,u_2,\cdots,u_l\}$，$V(K_{l_2})=\{u_{l+1},u_{l+2},\cdots,u_{2l}\}$，…，

$$V(K_{l_t})=\{u_{(t-1)l+1},u_{(t-1)l+2},\cdots,u_{tl}\}。$$

根据断言 2 可知 G 中有一个与这 t 个 l 团顶点都不相交的 r 团 K_r。

设 $V(K_r)=\{u_{tl+1},u_{tl+2},\cdots,u_{tl+r-1},u_n\}$。下面说明这些团之间哪些顶点相邻。

(i) 对前 t 个 l 团中任意两个 l 团必有其中一个团的每个顶点正好与另一个团的 $l-1$ 个顶点都相邻.根据 G 的团数为 l，则其中任意一个团的每个顶点至多与另一个团的 $l-1$ 个顶点都相邻。否则，G 中存在阶数为 $l+1$ 的团，这与 G 的团数为 l 矛盾。根据 $W(G)$ 尽可能小及断言 3 中类似分析可知，其中任意一个团的每个顶点正好与另一个团的 $l-1$ 个顶点都相邻。

下面证明 t 个 l 团之间哪些顶点相邻。

首先我们考虑 K_{l_1}，K_{l_2} 之间哪些顶点相邻。由 1)知 K_{l_1} 中每个顶点与 K_{l_2} 中 $l-1$ 个顶点都相邻，对于 u_1 不失一般性可设 $u_1u_{l+i}\in E(G)(2\le i\le l)$，$u_1u_{l+1}\notin E(G)$。对于 u_2，必定有 $u_2u_{l+1}\in E(G)$。否则，u_{l+1} 与 K_{l_1} 中至多 $l-2$ 个顶点相邻。与(i)矛盾。又因为 u_2 与 K_{l_2} 中 $l-1$ 个顶点相邻，即 u_2 与 K_{l_2} 中一个顶点不相邻，不妨设为 u_{l+2}，即 $u_2u_{l+2}\notin E(G)$。从而 $u_2u_{l+i}\in E(G)(1\le i\ne 2\le l)$。类似讨论可设 $u_iu_{l+i}\notin E(G)$，$u_iu_{l+j}\in E(G)(1\le j\ne i\le l)$。重复上面的讨论，可得 $u_iu_{kl+i}\notin E(G)(1\le k\le t-1)$。我们断言对任意 $2\le k\le t-1$ 有 $u_{l+1}u_{kl+1}\notin E(G)$。否则，因为 u_{l+1} 与 $u_2,u_3,\cdots,u_l$ 构成一个 l 团，u_{kl+1} 与 $u_2,u_3,\cdots,u_l$ 构成一个 l 团，所以 u_{l+1}，u_{kl+1} 与 $u_2,u_3,\cdots,u_l$ 构成一个 $l+1$ 团。与 G 的团数为 l 矛盾。同理可得 $u_{l+i}u_{kl+i}\notin E(G)(2\le i\le l)$。重复上面的讨论，我们对这 t 个顶点互不相交的 l 团可设

$$\begin{aligned}&u_{kl+i}u_{sl+i}\notin E(G)(1\le i\le l,0\le k\ne s\le t-1),\\&u_{kl+i}u_{sl+j}\in E(G)(1\le i\ne j\le l,0\le k\ne s\le t-1),\end{aligned}$$

(ii) 类似上面的讨论，可知第 $t+1$ 个 r 团 K_r 中每个顶点正好与前 t 个顶点互不相交的 l 团 $K_{l_i}(1\le i\le t)$ 的 $l-1$ 个顶点都相邻。不失一般性可设

$$\begin{aligned}&u_{tl+i}u_{sl+i}\notin E(G)(1\le i\le r,0\le s\le t-1),\\&u_{tl+i}u_{sl+j}\in E(G)(i\ne j,1\le i\le r,1\le j\le l,0\le s\le t-1),\end{aligned}$$

综上可知 $u_j, u_{l+j}, \cdots, u_{tl+j}$ $(j=1,2,\cdots,r)$ 构成 r 个顶点数为 $t+1$ 的空图 $\overline{K}_{t+1}$，$u_j, u_{l+j}, \cdots, u_{(t-1)l+j}$ $(j=r+1,r+2,\cdots,l)$ 构成 $l-r$ 个顶点数为 t 的空图 $\overline{K}_t$。

因此图 G 是一个 Tuŕan 图 $T_{l,n}$。

基金项目

本文工作受到广东省自然科学基金(2017A030313037)和广东金融学院 2017 创新强校工程项目(20170406101, 20170502151)资助。

参考文献

[1] Entringer, R. and Jackson, D. (1976) Snyder D Distance in Graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **26**, 283-296.

[2] You, Z.-F., Huang, Y. and Du, X. (2018) A Note on Comparison between the Wiener Index and the Zagreb Indices. *Communications in Mathematical Research*, **34**, 296-302.

[3] Das, K.C. and Nadjafi-Arani, M.J. (2017) On Maximum Wiener Index of Trees and Graphs with Given Radius. *Journal of Combinatorial Optimization*, **34**, 574-587. https://doi.org/10.1007/s10878-016-0092-y

[4] Gutman, I. and Yeh, Y.N. (1995) The Sum of All Distances in Bipartite Graphs. *Mathematica Slovaca*, **45**, 327-334.

[5] Berega, S. and Wang, H. (2007) Wiener Indices of Balanced Binary Trees. *Discrete Applied Mathematics*, **155**, 457-467. https://doi.org/10.1016/j.dam.2006.08.003

[6] Czabarkaě, E., Szěkely, L. and Wagner, S. (2009) The Inverse Problem for Certain Tree Parameters. *Discrete Applied Mathematics*, **157**, 3314-3319. https://doi.org/10.1016/j.dam.2009.07.004

[7] Li, X.L. and Wang, L. (2004) Solutions for Two Conjectures on the Inverse Problem of the Wiener Index of Peptoids. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **17**, 210-218. https://doi.org/10.1137/S0895480101387261

[8] Wu, X.Y. and Liu, H.Q. (2010) On the Wiener Index of Graphs. *Acta Applicandae Mathematicae*, **110**, 535-544. https://doi.org/10.1007/s10440-009-9460-2

[9] Liu, H.Q. and Pan, X.F. (2008) Minimal Wiener Index of Trees with Fixed Diameter. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **60**, 85-94.

[10] Dimitrov, D., Ikica, B. and Škrekovski, R. (2019) Maximum External Wiener Index of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **257**, 331-337. https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.09.024

[11] Lepovic, M. and Gutman, I. (1998) A Collective Property of Trees and Chemical Trees. *Journal of Chemical Information and Modeling*, **38**, 823-826. https://doi.org/10.1021/ci980004b

[12] Goldman, D., Istrail, S., Lancia, G., Piccolboni, A. and Walenz, B. (2000) Algorithmic Strategies in Combinatorial Chemistry. In: *Proceedings of the* 11*th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 275-284.

[13] Wagner, S. (2006) A Class of Trees and Its Wiener Index. *Acta Applicandae Mathematicae*, **91**, 119-132. https://doi.org/10.1007/s10440-006-9026-5

[14] Ban, Y.-E.A., Bespamyatnikh, S. and Mustafa, N.H. (2004) A Conjecture on Wiener Indices in Combinatorial Chemistry. *Algorithmica*, **40**, 99-117. https://doi.org/10.1007/s00453-004-1097-y

[15] Wang, H. (2008) The Extremal Values of the Wiener Index of a Tree with Given Degree Sequence. *Discrete Applied Mathematics*, **156**, 2647-2654. https://doi.org/10.1016/j.dam.2007.11.005

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org