Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(7), 1212-1223
Published Online July 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.87140

A New Algorithm for Traffic Equilibrium Flow with Capacity Constraints of Arc

Daqiong Zhou, Zhi Lin*, Zaiyun Peng, Jingjing Wang

College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing
Email: 335318940@qq.com, *linzhi7525@163.com

Received: June 30^{th}, 2019; accepted: July 15^{th}, 2019; published: July 22^{nd}, 2019

Abstract

In this paper, we mainly research the algorithm of traffic equilibrium flow with capacity constraints of arcs, and obtain the necessary and sufficient condition that feasible flow x is a traffic equilibrium flow with capacity constraints of arcs by the definition of the drop of feasible flow x, a new algorithm of traffic equilibrium flow with capacity constraints of arcs is constructed, and the concrete steps of calculating the traffic equilibrium flow with capacity constraints of arcs are given, at the same time, an example is given to illustrate the New Algorithm.

Keywords

Drop, New Algorithm, Arc Capacity, Saturation Path, Traffic Equilibrium Problem with Capacity Constraints of Arc

具弧容量约束交通均衡流的一种新算法

周大琼，林 志*，彭再云，王泾晶

重庆交通大学数学与统计学院，重庆
Email: 335318940@qq.com, *linzhi7525@163.com

* 通讯作者。

文章引用: 周大琼, 林志, 彭再云, 王泾晶. 具弧容量约束交通均衡流的一种新算法[J]. 应用数学进展, 2019, 8(7): 1212-1223. DOI: 10.12677/aam.2019.87140

收稿日期：2019年6月30日；录用日期：2019年7月15日；发布日期：2019年7月22日

摘 要

本文主要研究了具弧容量约束交通均衡流的算法。通过可行流x的落差定义，得到了可行流x 是具弧容量约束交通均衡流的充要条件，并以此构造了具弧容量约束交通均衡流的一种新算法，给出了计算具弧容量约束交通均衡流的具体步骤，同时用例子对新算法加以说明。

关键词

落差，新算法，弧容量，饱和路径，具弧容量约束的交通均衡问题

1. 引言

1952年，Wardrop首次提出了标量支付函数的交通均衡原则：驾车人选择的所有行车路线的通行时间都是相同的，而驾车人未选择的所有行车路线的通行时间更长 [1]；同时还给出了交通均衡问题的数学模型。1956 年，Beckmann等人将Wardrop交通均衡问题转化成一个等价的数学规划问题，使得交通均衡流的计算变得更为容易 [2] 。近年来，由于城市的迅速发展，交通堵塞问题越来越严重，尤其在市区交通中，道路间纵横交错，不同路段通行能力差异很大，因此，经典的交通均衡模型已不能适应快速发展的城市交通环境，需要改进，这就为交通均衡模型中引入弧容量约束提供了客观背景。2010 年，我们介绍了具弧容量约束的交通均衡问题及均衡原则 [3] [4]，并且在2015年给出了具弧容量约束的交通均衡流的算法 [5] 。关于具弧容量约束交通均衡的其他结果见 [6] [7] [8] ，关于交通均衡流的其他算法研究见 [9] [10] [11]及相关文献。在本文中，我们对文献 [5]的算法进行了改进，提出了一种计算具弧容量约束交通均衡流的新算法，通过具体例子说明了新算法的计算过程。

2. 具弧容量约束交通均衡问题介绍

对于交通网络，V表示节点集合，E表示有向弧的集合，W表示所有OD点对(起点/终点)集合，对任何$\omega \in W$，用P_ω 表示连接OD点对ω的路径的集合，记$K = \cup_{\omega\in W} P_\omega, m =| K |$。用$D = (d_\omega)_{\omega\in W}$表示需求向量，其中$d_\omega(> 0)$表示OD点对$\omega$的交通需求量，对任何弧$a \in E$，弧上流

量用$x_a \in R_+ = \{z \in R : z \geq 0\}$表示。对任何$\omega \in W$，$k \in P_\omega$，用$x_k(\geq 0)$ 表示路径k上的交通流量。称$x = (x_k)^T_{k\in K} \in R^m_+ = \{(z_1, z_2, \cdots, z_m) \in R^m : z_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m\}$ 为路径流(简称流)。容易看出，对弧$a \in E$，$x_a = \sum_{\omega\in W}\sum_{k\in P_\omega} \delta_{ak}x_k$，其中，当弧$a$ 属于路径k时，$\delta_{ak} = 1$，当弧a不属于路径k时，$\delta_{ak} = 0$。用$C = (c_a)_{a\in E}$ 表示容量向量，其中$c_a(> 0)$表示弧a上交通流的容量。交通网络通常表示为$\aleph = \{V, E, W, D, C\}$。对任何弧$a \in E$，弧$a$上流量需满足容量约束: $c_a \geq x_a \geq 0$，并且，对任何OD点对$\omega \in W$，流x需要满足需求约束: $\sum_{k\in P_\omega} x_k = d_\omega$。既满足需求约束又满足容量约束的流$x$称为可行路径流(简称可行流)。记可行流集合$A = \{x \in R^m_+ : \forall\omega \in W, \sum_{k\in P_\omega} x_k = d_\omega \text{ and } \forall a \in E, c_a \geq x_a \geq 0\}$。本文对任何$\omega \in W$，假定交通需求$d_\omega$是固定的，并且$A \neq \emptyset$。容易验证，集合$A$是一个紧凸集。对$a \in E$，用$t_a = t_a(x_a) = t_a(x) \in R_+$表示弧$a$上的支付，对任何$\omega \in W$, $k \in P_w$，假定路径k 上的支付t_k是路径上所有弧的支付之和，即$t_k(x) = \sum_{a\in E} \delta_{ak}t_a(x)$。

2.1. 具弧容量约束交通均衡原则及Beckmann公式

下面的定义，见 [3] [4]。

定义1.1.对可行流$x \in A, a \in E$,

i) 如果$x_a = c_a$，则a 被称为可行流x 的一条饱和弧，否则称a 为可行流x的一条非饱和弧;

ii) 对OD点对$\omega \in W$，路径$k \in P_\omega$，如果存在可行流x 的一条饱和弧属于路径k，则路径k 称为可行流x的一条饱和路径，否则称路径k 为可行流x的一条非饱和路径。

定义1.2. **(具弧容量约束的均衡原则).** 流$x \in A$被称为具弧容量约束的交通均衡流，只要满足如下条件:

$$\forall\omega \in W, \forall k, j \in P_\omega,\ t_k(x) - t_j(x) > 0$$

$$\Rightarrow x_k = 0 \text{ **或者**} j \text{ **是流**} x \text{ **的一条饱和路径**}.$$

x 也被称为具弧容量约束的交通均衡问题的解。具弧容量约束的交通均衡问题通常被表示为$\Gamma = \{\aleph, A, t\}$。

具弧容量约束的交通均衡问题$\Gamma = \{\aleph, A, t\}$，构造数学规划问题$MP$如下:

$$Minz(x) = \Sigma_{a\in E} \int_0^{x_a} t_a(x)dx$$
$$s.t.\quad \begin{cases} \sum_k x_k = d_\omega, & \forall\omega \in W, k \in P_\omega \\ x_a = \sum_\omega \sum_k x_k\delta_{ak} \leq c_a, & \forall a \in E, \omega \in W, k \in P_\omega \\ x_k \geq 0, & \forall\omega \in W, k \in P_\omega. \end{cases}$$

上式称为广义Beckmann公式。

2.2. 落差定义

下面的结论见 [5]。

引理2.1. 对具弧容量约束的交通均衡问题$\{\aleph, A, t\}$，如果对任何$a \in E$，$t_a(x)$ 在R^m_+ 上连续，

并且$x \in A$是数学规划Q的解，那么，x 是交通均衡流。

用P_ω^s表示可行流x关于OD点对ω的所有饱和路径的集合，记

$$\overline{T}_\omega = \max_{k \in P_\omega}\{t_k : x_k > 0\},$$

$\overline{T}_\omega$表示在ω方向上，驾车人在所选路径上花费的时间最长。记

$$\widetilde{T}_\omega = \begin{cases} \overline{T}_\omega, & \text{如果} P_\omega^s = P_\omega \\ min_{k \in P_\omega \setminus P_\omega^s}\{t_k\}, & \text{如果} P_\omega^s \neq P_\omega. \end{cases}$$

即：在ω方向上，当所有路径都是饱和路径时，$\widetilde{T}_\omega$ 表示驾车人在所选饱和路径上花费的时间最长；当路径存在非饱和路径时，$\widetilde{T}_\omega$表示在ω 方向上，去除饱和路径以后，驾车人在所选路径上花费的时间最短。

定义2.3.对可行流x和OD点对$\omega \in W$，称$\Omega_\omega = \max\{0, \overline{T}_\omega - \widetilde{T}_\omega\}$ 为可行流x关于OD点对ω的落差，即Ω_ω 为ω 方向上的落差；称$\Omega = \max_{\omega \in W}\{\Omega_\omega\}$ 为交通网络中可行流x的落差；称OD点对$\omega \in \{\omega \in W_\omega : \Omega = \Omega_\omega$, **显然**$W_\omega \neq \phi\}$ 为可行流x 的落差点对。

3. 具弧容量约束交通均衡流的新算法

流x的落差，反映了流x在网络上分配的不均衡程度，流的落差越大，其不均衡程度就越高，对应的落差OD点对就是其不均衡程度最高的OD点对，也是流x的效率最差的OD点对。本文构造的算法，就是抓住主要矛盾，通过快速减少可行流落差OD点对的落差值，来计算具弧容量约束交通均衡流。

3.1. 基本结论与算法

定理2.1.　对具弧容量约束的交通均衡问题$\{\aleph, A, t\}$，可行流$x \in A$是具弧容量约束交通均衡流当且仅当其落差$\Omega = 0$。

证明：充分性。对可行路径流x，若$\Omega = 0$，需证x为具弧容量约束交通均衡流，即证：$\forall \omega \in W, \forall k, j \in P_\omega$，若$t_k(x) - t_x(x) > 0$且$x_k > 0$，那么必有：路径$j$是$x$的一条饱和路径。用反证法，若$j$ 不是x的饱和路径，则$P_\omega \setminus P_\omega^s$非空，此时$P_\omega \neq P_\omega^s$，即有$t_j(x) \geq \widetilde{T}_\omega = min_{l \in P_\omega \setminus P_\omega^s}\{t_l(x)\}$，因$x_k > 0$，所以$\overline{T}_\omega = \max_{l \in P_\omega}\{t_l(x) : x_k > 0\} \geq t_k(x) > t_j(x) \geq \widetilde{T}_\omega$，有$\overline{T}_\omega > \widetilde{T}_\omega$，所以$\Omega_\omega > 0$，即$\Omega > 0$，与$\Omega = 0$ 矛盾。

必要性。对可行路径流x，若x为具弧容量约束交通均衡流，需证$\Omega = 0$，用反证法。假如$\Omega \neq 0$，则存在$\omega \in W$，有$\overline{T}_\omega - \widetilde{T}_\omega > 0$，此时有$P_\omega \neq P_\omega^s$，于是，存在路径$k, j \in P_\omega$，满足条件：（1），$x_k > 0$，$t_k(x) = \overline{T}_\omega$，（2）$j \in P_\omega \setminus P_\omega^s$ 是非饱和路径，且$\widetilde{T}_\omega = t_j(x)$，推出：$t_k(x) - t_j(x) > 0$，且$x_k > 0$，$j$是非饱和路径，这与$x$ 是具弧容量约束交通均衡流矛盾，证毕。

对具弧容量约束的交通均衡问题，由引理2.1和定理2.1，可构造限制性算法计算交通均衡流。需要说明的是，当交通网络比较复杂时，要逐一罗列所有OD点对的路径是困难的，更不要说计算

各条路径的流量，事实上，因为在均衡流中，很多路径的交通流量为零，因此，只需计算出在均衡流中，流量大于零的路径上的流量即可，这样，尽管不计算均衡流的维数，但根据流量大于零的路径上的流量，可以容易地得到交通网络中各条弧的流量，这样就避免了逐一罗列所有OD 点对的路径。下面的算法就是根据这样的思路构造的，得到的不是交通均衡流向量$y \in A$，而是y的所有流量大于零的分量组成的向量x，最后由x计算出均衡时的弧流向量$z = (x_a)_{a \in E}$。具体算法如下：

假设对任何$a \in E$，$t_a(x)$在R_+^m 上连续。

第一步：在网络$\aleph$中，取任意可行弧流$z(0)$，得到初始可行流的非0分量构成的向量$x(0)$。记$H(0) = \{l \in K : x_l(0) > 0\}$ ，令i=0。

第二步：对每一个$\omega \in W$，

(1)计算$\overline{T}_\omega(i) = \max_{k \in H(i) \cap P_\omega} t_k(x(i))$，其中$t_k(x(i))$ 表示流量为$x(i)$ 时路径k 上的支付。

(2)在网络$\aleph$中，删除当流量为$x(i)$ 时网络的所有饱和弧，对其余非饱和弧a，以弧上支付$t_a(x(i))(> 0)$为权，得到加权网络$\widehat{\aleph}_i$ ，在网络$\widehat{\aleph}_i$ 中，计算对O/D 点对ω的最短路，设最短路为s_ω，其长为$t_{s_\omega}(x(i))$，显然，$s_\omega \in P_\omega$，且$\widetilde{T}_\omega(i) = t_{s_\omega}(x(i))$。

计算$\Omega_\omega(i) = \max_{\omega \in W}\{0, \overline{T}_\omega(i) - \widetilde{T}_\omega(i)\}$ 和$\Omega(i) = \max_{\omega \in W}\{\Omega_\omega(i)\}$。

若$\Omega(i) = 0$,则转第五步.

第三步：对落差点对，取定一个$\omega* \in \{\omega \in W : \Omega_\omega(i) = \Omega(i)\}$，

在网络$\widehat{\aleph}$中，若落差点对$\omega*$的最短路至少有两条，其中一条为$s_{\omega*}$，设另有一条为$s'_{\omega*}$，记$\widehat{S}_{\omega*}(i) = \{s_{\omega*}, s'_{\omega*} : t_{s_{\omega*}}(x(i)) = t_{s'_{\omega*}}(x(i)) < \overline{T}_\omega(i)\}$;

在网络$\widehat{\aleph}$中, 若落差点对$\omega*$的最短路只有一条，即为$s_{\omega*}$，计算落差点对$\omega*$的次短路，设为$s'_{\omega*}$，记$\widehat{S}_{\omega*}(i) = \{s_{\omega*} : t_{s_{\omega*}}(x(i)) < \overline{T}_\omega(i)\} \cup \{s'_{\omega*} : t_{s'_{\omega*}}(x(i)) < \overline{T}_\omega(i)\}$。

对其他点对，$\forall \omega \in W \backslash \{\omega*\}$，记$\widehat{S}_\omega(i) = \{s_\omega : t_{s_\omega}(x(i)) < \overline{T}_\omega(i)\}$。

转下一步。

第四步：令$S(i) = (\cup_{\omega \in P_\omega} \widehat{S}_\omega(i))$，$H(i+1) = H(i) \cup S(i)$，求解下列规划问题$MP(i)$:

$$Minz(x) = \sum_{a \in E} \int_0^{x_a(i)} t_a(x)dx$$

$$s.t \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in P_\omega} x_k(i) = d_\omega, \forall \omega \in W, k \in H(i+1) \\ x_a(i) = \displaystyle\sum_{\omega \in W} \sum_{k \in P_\omega} \delta_{ak} x_k(i) \le c_a, \forall a \in E \\ x_k(i) \ge 0, \forall \omega \in W, k \in H(i+1) \end{cases}$$

得到解$x(i+1)$ 。令$i = i+1$，转第二步。

第五步：所求交通均衡流的非0向量为$x(i+1)$，有$x(i+1)$计算出均衡时的弧流向量$z = (x_a)_{a \in E}$，

计算结束。

3.2. 算法举例

例2.1.考虑局弧容量约束的交通均衡问题(见图 1)：

其中V={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13}, E={e_1,e_2,e_3, e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13},e_{14},e_{15},e_{16},e_{17}, e_{18},e_{19},e_{20},e_{21},e_{22},e_{23}}, C=(5,6,7,5,6,5, 6,4,5,7,3,5, 6,6,5,5,7,7,4,6,6,8,7), W={$\omega 1$, $\omega 2$}={(1,12),(3,10)}, D=($d_{\omega 1}$, $d_{\omega 2}$}=(6,5)。

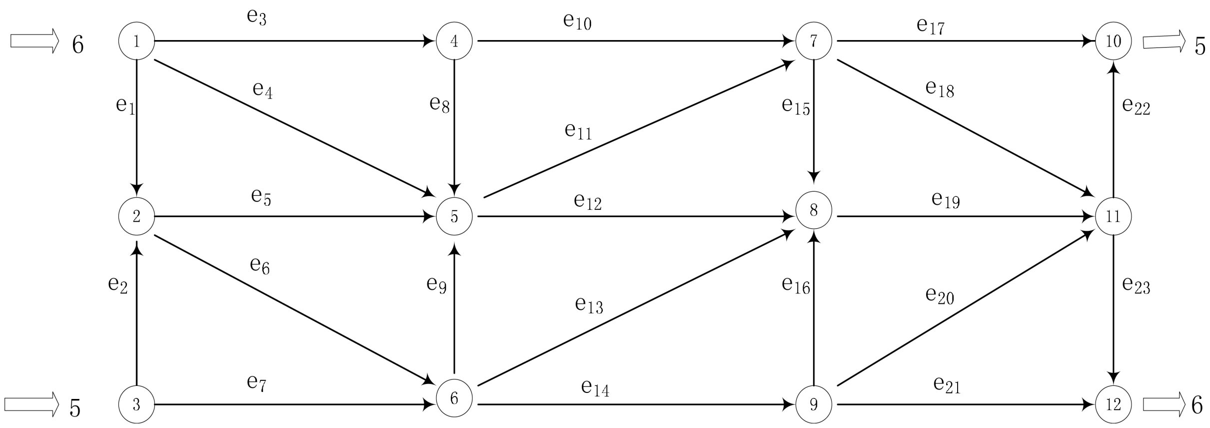

Figure 1. The figure of traffic network
图 1. 交通网络图

并且时间支付函数为$t_{e1}(x_{e1})$=2$(x_{e1})^2$ +23，$t_{e2}(x_{e2})$=$(x_{e2})^2$+33，$t_{e3}(x_{e3})$=3$(x_{e3})^2$+50，$t_{e4}(x_{e4})$ =2$(x_{e4})^2$+11，$t_{e5}(x_{e5})$=3$(x_{e5})^2$+20，$t_{e6}(x_e6)$=2$(x_{e6})^2$+28，$t_{e7}(x_{e7})$=2$(x_{e7})^2$+30，$t_{e8}(x_{e8})$=3$(x_{e8})^2$ +28，$t_{e9}(x_{e9})$=$(x_{e9})^2$+40，$t_{e10}(x_{e10})$=4$(x_{e10})^2$+35，$t_{e11}(x_{e11})$=2$(x_{e11})^2$+42，$t_{e12}(x_{e12})$=3$(x_{e12})^2$+45，$t_{e13}(x_{e13})$=3$(x_{e13})^2$+15，$t_{e14}(x_{e14})$=5$(x_{e14})^2$+22，$t_{e15}(x_{e15})$=$(x_{e15})^2$+48，$t_{e16}(x_{e16})$=2$(x_{e16})^2$+55，$t_{e17}(x_{e17})$=2$(x_{e17})^2$+66，$t_{e18}(x_{e18})$=3$(x_{e18})^2$+13，$t_{e19}(x_{e19})$=3$(x_{e19})^2$+25，$t_{e20}(x_{e20})$=3$(x_{e20})^2$+60，$t_{e21}(x_{e21})$=4$(x_{e21})^2$+38，$t_{e22}(x_{e22})$=2$(x_{e22})^2$+70，$t_{e23}(x_{e23})$=3$(x_{e23})^2$+90。

下面用新算法计算具弧容量约束的交通均衡流：

i=0,

1)，对O/D点对$\omega 1$=(1,12)，任选路径l_1={$e_3 e_{10} e_{18} e_{23}$}，令其流量为$x_1(0)$=6.00，对O/D点对$\omega 2$=(3,10)，任选路径l_2={$e_7 e_{14} e_{20} e_{22}$}，令其流量为$x_2(0)$=5.00。显然$x(0)$在l_1 上的流量$x_1(0) =$ 6.00，在l_2上的流量$x_2(0) = 5.00$，其它路径上的流量为0.00，$H(0) = \{l_1, l_2\}$，其中$x_1(0), x_2(0)$ 为路径l_1，l_2的流量。此时在$x(0)$下的网络流量图见图 2 (括号内的数字为弧上的流量)。

以$x(0)$为流的各弧上的支付为权，得加权网络$\widehat{\aleph}_0$，此时加权网络图见图 3 (括号内数字为可行流$x(0)$时，各弧上的时间)。

2)，(1) 由加权网络图图 3，对O/D点对$\omega 1$=(1,12)，$\omega_1 \in W$，$\overline{T}_{\omega 1}(0) = t_{l1}(x(0)) = 656.00$；对O/D 点对$\omega 2$ =(3, 10)，$\omega_2 \in W$，$\overline{T}_{\omega 2}(0) = t_{l2}(x(0)) = 482.00$。

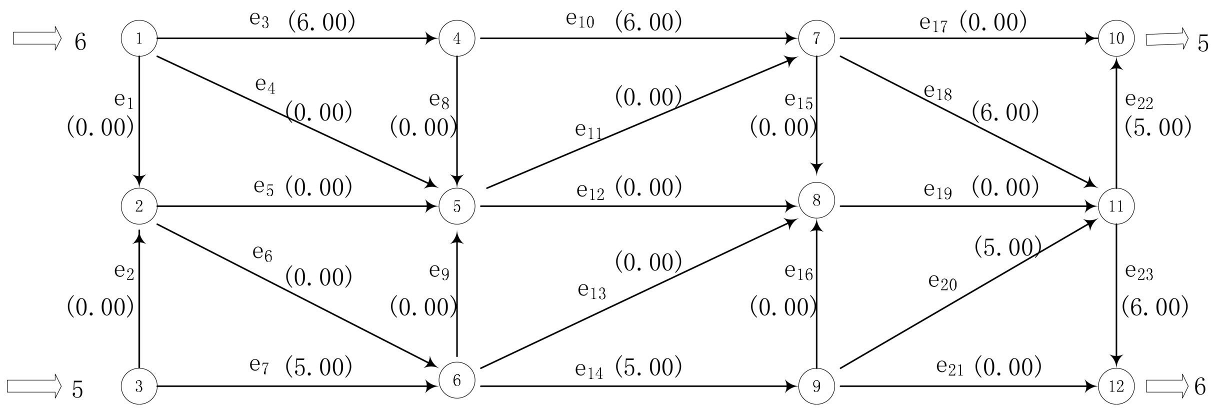

Figure 2. The figure of network flow under $x(0)$

图 2. 在$x(0)$下的网络流量图

(2) 由加权网络图图 3，对O/D点对ω1=(1,12)，用lingo 软件(以下计算最短路及次短路均采用lingo 软件)算出最短路$S_{\omega_1} = \{l_3\}$=$\{e_1e_6e_{14}e_{21}\}$，$\widetilde{T}_{\omega 1}(0)$ =$t_{l3}(x(0))$=236.00 ；对O/D点对ω2 =(3,10)，最短路$S_{\omega_2} = \{l_4\}$=$\{e_2e_5e_{11}e_{17}\}$，$\widetilde{T}_{\omega 2}(0)$= $t_{l4}(x(0))$=161.00。

$\Omega_{\omega 1}(0) = max\{0, 656 - 236\} = 480.00$，$\Omega_{\omega 2}(0) = max\{0, 482 - 161\} = 321.00$。

$\Omega(0) = max\{480.00, 321.00\} = 480.00$。

3)，取$\omega 1* \in \{\omega \in W : \Omega_{\omega 1}(0) = \Omega(0)\}$，落差点对为$\omega 1* = (1, 12)$。

对落差点对$\omega 1* = (1, 12)$，最短路$S_{\omega_{1*}} = \{l_3\}$=$\{e_1e_6e_{14}e_{21}\}$，$t_{l3}(x(0))$=236.00；次短路为$S'_{\omega_{1*}} = \{l_5\}$=$\{e_4e_{12}e_{19}e_{23}\}$，$t_{l5}(x(0))$=279.00。$\widehat{S}_{\omega 1^*}(0)$=$\{l_3, l_5\}$。

对O/D点对ω2 =(3,10)，最短路$S_{\omega_2} = \{l_4\}$=$\{e_2e_5e_{11}e_{17}\}$，$t_{l4}(x(0))$=161.00。$\widehat{S}_{\omega 2}(0)$=$\{l_4\}$ 。

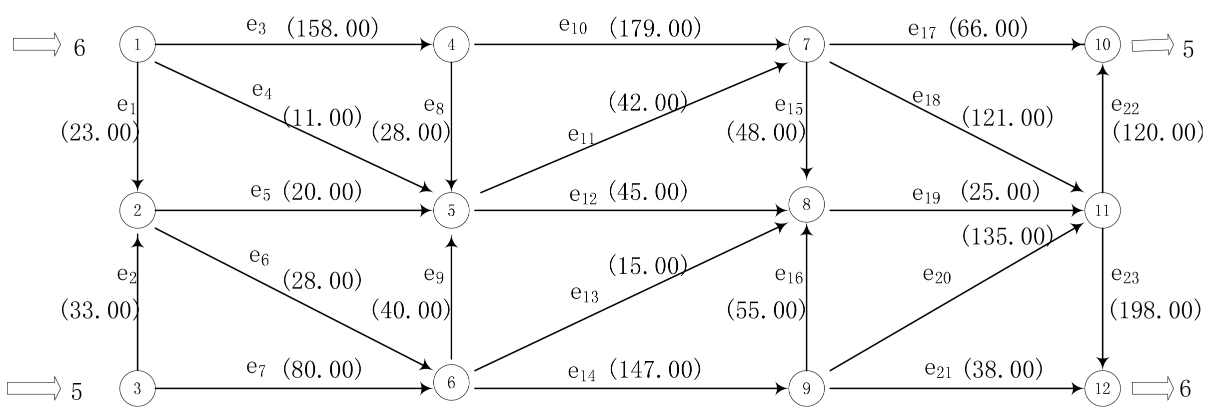

Figure 3. The figure of network weighting under $x(0)$

图 3. 在$x(0)$下的网络加权图

4)，$S(0)$= $\{l_3，l_5，l_4\}$，$H(1)$=$\{l_1，l_2，l_3，l_4，l_5\}$，其中$x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0), x_5(0)$ 为路径l_1, l_2, l_3, l_4, l_5的流量，即加入路径l_3，l_4，l_5。解下列规划问题$MP(1)$:

Min z(x) $=\sum_{a\in E}\int_0^{x_a(i)} t_a(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^{x_{e3}(0)}(3x^2+50)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e10}(0)}(4x^2+35)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e18}(0)}(3x^2+13)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e23}(0)}(3x^2+90)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e7}(0)}(2x^2+30)\,\mathrm{dx} + + \int_0^{x_{e14}(0)}(5x^2+22)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e20}(0)}(3x^2+60)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e22}(0)}(2x^2+70)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e1}(0)}(2x^2+23)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e6}(0)}(2x^2+28)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e21}(0)}(4x^2+38)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e2}(0)}(x^2+33)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e5}(0)}(3x^2+20)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e11}(0)}(2x^2+42)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e17}(0)}(2x^2+66)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e4}(0)}(2x^2+11)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e12}(0)}(3x^2+45)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e19}(0)}(3x^2+25)\,\mathrm{dx}$，

其中($x_{e3}(0) = x_{e10}(0) = x_{e18}(0) = x_1(0), x_{e7}(0) = x_{e20}(0) = x_{e22}(0) = x_2(0), x_{e1}(0) = x_{e21}(0) = x_{e6}(0) = x_3(0), x_{e2}(0) = x_{e5}(0) = x_{e11}(0) = x_{e17}(0) = x_4(0), x_{e4}(0) = x_{e12}(0) = x_{e19}(0) = x_5(0), x_{e23}(0) = x_1(0) + x_5(0), x_{e14}(0) = x_2(0) + x_3(0)$)。

因此:Min z(x) $=\frac{10}{3}(x_1(0))^3 + 188x_1(0) + (x_1(0)+x_5(0))^3 + 171x_5(0) + \frac{7}{3}(x_2(0))^3 + 182x_2(0) + \frac{5}{3}(x_2(0)+x_3(0))^3 + 111x_3(0) + \frac{8}{3}(x_3(0))^3 + \frac{8}{3}(x_4(0))^3 + 161x_4(0) + \frac{8}{3}(x_5(0))^3$，

$$s.t\begin{cases} x_1(0)+x_3(0)+x_5(0)=6, x_2(0)+x_4(0)=5,\\ x_1(0)+x_5(0)\le 7, x_2(0)+x_3(0)\le 6,\\ 0\le x_1(0)\le 7, 0\le x_2(0)\le 6,\\ 0\le x_3(0)\le 5, 0\le x_4(0)\le 3,\\ 0\le x_5(0)\le 4,\end{cases}$$

解得$x(1)$在l_1上的流量$x_1(1) = 1.46$、在l_2上的流量$x_2(1) = 2.00$、在l_3 上的流量$x_3(1) = 2.35$、在l_4 上的流量$x_4(1) = 3.00$、在l_5 上的流量$x_5(1) = 2.19$，其它路径上的流量为0。

流$x(1)$ 有饱和弧e_{11}，饱和路径l_4。

在流$x(1)$下，删除饱和弧e_{11}后，以$x(1)$为流的各弧上的支付为权，得加权网络$\widehat{\aleph}_1$。

i=1，

1)，(1) 对O/D点对ω1=(1,12)，$\overline{T}_{\omega1}(1) = t_{l3}(x(1)) \doteq 249.50$，对O/D 点对$\omega2 = (3,10)$，$\overline{T}_{\omega2}(1) = t_{l2}(x(1)) \doteq 304.43$。

(2) 在流$x(1)$下，删除饱和弧e_{11}后，以$x(1)$为流的各弧上的支付为权，得加权网络$\widehat{\aleph}_1$，在加权网络$\widehat{\aleph}_1$ 中，对O/D点对ω1=(1,12)，最短路$S_{\omega_1} = \{l_1\}=\{e_3e_{10}e_{18}e_{23}\}$，$\widetilde{T}_{\omega1}(1) = t_{l1}(x(1)) \doteq 249.50$;对O/D点对$\omega2 = (3,10)$，最短路$S_{\omega_2} = \{l_6\}=\{e_7e_{13}e_{19}e_{22}\}$，$\widetilde{T}_{\omega2}(1) = t_{l6}(x(1)) \doteq 170.40$。

$\Omega_{\omega1}(1) = 0.00$，$\Omega_{\omega2}(1) = 134.03$。$\Omega(1) = 134.03$。

2)，取$\omega2* \in \{\omega \in W : \Omega_{\omega2}(1) = \Omega(1)\}$，落差点对为$\omega2* = (3,10)$。

对落差点对ω2∗=(3,10)，最短路为$S_{\omega_2*} = \{l_6\}=\{e_7e_{13}e_{19}e_{22}\}$，$t_{l6}(x(1)) \doteq 170.40$，次短路为$S'_{\omega_2*} = \{l_7\}=\{e_2e_6e_{13}e_{19}e_{22}\}$，$t_{l7}(x(1)) \doteq 213.41$，$\widehat{S}_{\omega2^*}(1)=\{l_6, l_7\}$。

对O/D点对$\omega1 = (1,12)$，最短路为$S_{\omega_1} = \{l_1\}=\{e_3e_{10}e_{18}e_{23}\}$，$t_{l1}(x(1)) \doteq 249.50$，$\widehat{S}_{\omega1}(1) = \{l_1\}$。

3)，$S(1) = \{l_6，l_7，l_1\}, H(2)=\{l_1，l_2，l_3，l_4，l_5，l_6，l_7\}$，其中$x_1(1), x_2(1), x_3(1), x_4(1), x_5(1), x_6(1), x_7(1)$ 为路径$l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7$的流量，即加入路径$l_6$，$l_7$。解下列规划问题$MP(2)$:

Min z(x) $=\sum_{a\in E}\int_0^{x_a(i)} t_a(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^{x_{e3}(1)}(3x^2+50)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e10}(1)}(4x^2+35)\,\mathrm{dx} + \int_0^{x_{e18}(1)}(3x^2+$

13) dx $+\int_0^{x_{e23}(1)}(3x^2+90)$ dx $+\int_0^{x_{e7}(1)}(2x^2+30)$ dx+ $+\int_0^{x_{e14}(1)}(5x^2+22)$ dx$+\int_0^{x_{e20}(1)}(3x^2+60)$ dx$+\int_0^{x_{e22}(1)}(2x^2+70)$ dx $+\int_0^{x_{e1}(1)}(2x^2+23)$ dx $+\int_0^{x_{e6}(1)}(2x^2+28)$ dx $+\int_0^{x_{e21}(1)}(4x^2+38)$ dx $+\int_0^{x_{e2}(1)}(x^2+33)$ dx $+\int_0^{x_{e5}(1)}(3x^2+20)$ dx $+\int_0^{x_{e11}(1)}(2x^2+42)$ dx $+\int_0^{x_{e17}(1)}(2x^2+66)$ dx $+\int_0^{x_{e4}(1)}(2x^2+11)$ dx $+\int_0^{x_{e12}(1)}(3x^2+45)$ dx $+\int_0^{x_{e19}(1)}(3x^2+25)$ dx $+\int_0^{x_{e13}(1)}(3x^2+15)$ dx，

其中($x_{e3}(1)=x_{e10}(1)=x_{e18}(1)=x_1(1), x_{e23}(1)=x_1(1)+x_5(1), x_{e7}(1)=x_2(1)+x_6(1), x_{e14}(1)=x_2(1)+x_3(1), x_{e20}(1)=x_2(1), x_{e22}(1)=x_2(1)+x_6(1)+x_7(1), x_{e1}(1)=x_{e21}(1)=x_3(1), x_{e6}(1)=x_3(1)+x_7(1), x_{e2}(1)=x_4(1)+x_7(1), x_{e5}(1)=x_{e11}(1)=x_{e17}(1)=x_4(1), x_{e4}(1)=x_{e12}(1)=x_5(1), x_{e19}(1)=x_5(1)+x_6(1)+x_7(1), x_{e13}(1)=x_6(1)+x_7(1)$)。

因此:Min z(x)=$\sum_{a\in E}\int_0^{x_a(i)}t_a(x)\,\mathrm{d}x=\frac{10}{3}(x_1(1))^3+188x_1(1)+(x_1(1)+x_5(1))^3+171x_5(1)+\frac{2}{3}(x_2(1)+x_6(1))^3+182x_2(1)+140x_6(1)+\frac{5}{3}(x_2(1)+x_3(1))^3+111x_3(1)+(x_2(1))^3+\frac{2}{3}(x_2(1)+x_6(1)+x_7(1))^3+171x_7(1)+2(x_3(1))^3+\frac{2}{3}(x_3(1)+x_7(1))^3+\frac{1}{3}(x_4(1)+x_7(1))^3+161x_4(1)+\frac{7}{3}(x_4(1))^3+\frac{5}{3}(x_5(1))^3+(x_5(1)+x_6(1)+x_7(1))^3+(x_6(1)+x_7(1))^3$，

$$s.t\begin{cases} x_1(1)+x_3(1)+x_5(1)=6, x_2(1)+x_4(1)+x_6(1)+x_7(1)=5,\\ x_1(1)+x_5(1)\le 7, x_2(1)+x_3(1)\le 6, x_2(1)+x_6(1)+x_7(1)\le 8,\\ x_2(1)+x_6(1)\le 6, x_3(1)+x_7(1)\le 5, x_5(1)+x_6(1)+x_7(1)\le 4,\\ x_6(1)+x_7(1)\le 6, x_4(1)+x_7(1)\le 6, 0\le x_1(1)\le 7,\\ 0\le x_2(1)\le 6, 0\le x_3(1)\le 5, 0\le x_4(1)\le 3, 0\le x_5(1)\le 5,\\ 0\le x_6(1)\le 4, 0\le x_7(1)\le 4.\end{cases}$$

解得$x(2)$在l_1上的流量$x_1(2)=1.67$、在l_2上的流量$x_2(2)=0.00$、在l_3 上的流量$x_3(2)=3.15$、在l_4 上的流量$x_4(2)=2.64$、在l_5 上的流量$x_5(2)=1.18$、在l_6上的流量$x_6(2)=2.36$、在l_7 上的流量$x_7(2)=0.00$，其它路径上的流量为0。

流$x(2)$没有饱和弧，以$x(2)$为流的各弧上的支付为权，得加权网络$\widehat{\aleph}_2$。

i=2，

1），（1）对O/D点对ω1=(1,12)、$\overline{T}_{\omega1}(2)=t_{l3}(x(2))\doteq 240.08$，对O/D 点对$\omega 2=(3,10)$，$\overline{T}_{\omega2}(2))=t_{l6}(x(2))\doteq 216.70$。

（2）在加权网络$\widehat{\aleph}_2$中，对O/D 点对ω1=(1,12)，最短路$S_{\omega_1}=\{l_8\}$=$\{e_4e_{11}e_{18}e_{23}\}$，$\widetilde{T}_{\omega1}(2)$ =$t_{l8}(x(2))\doteq 205.40$；对O/D点对$\omega 2=(3,10)$，最短路$S_{\omega_2}=\{l_4\}$=$\{e_2e_5e_{11}e_{17}\}$，$\widetilde{T}_{\omega2}(2)$= $t_{l4}(x(2))\doteq$ 216.70。

$\Omega_{\omega1}(2)=34.68$，$\Omega_{\omega2}(2)=0.00$。$\Omega(2)=34.68$。

2），取$\omega 1*\in\{\omega\in W:\Omega_{\omega1}(2)=\Omega(2)\}$，落差点对为$\omega 1*=(1,12)$。

在加权网络$\widehat{\aleph}_2$中，对O/D点对ω1*=(1,12)，$\overline{T}_{\omega1}(2)=t_{l3}(x(2))\doteq 240.08$，对O/D点对$\omega$2 =(3,10)，$\overline{T}_{\omega2}(2)=t_{l6}(x(2))\doteq 216.70$。

可行流$x(2)$的落差为$\Omega(2)=34.68$，落差点对为$\omega 1*=(1,12)$。

对落差点对ω1*=(1,12)，最短路为$S_{\omega_1*}=\{l_8\}$=$\{e_4e_{11}e_{18}e_{23}\}$，$t_{l8}(x(2))\doteq 205.40$，次短路

为$S'_{\omega_1 *}=\{l_5\}$=$\{e_4e_{12}e_{19}e_{23}\}$ ，$t_{l5}(x(2))\doteq 240.06$。$\widehat{S}_{\omega 1*}(2)$=$\{l_8,l_5\}$。

对O/D点对$\omega 2=(3,10)$, 最短路为$S_{\omega_2}(2)=\{l_4\}$=$\{e_2e_5e_{11}e_{17}\}$，$t_{l4}(x(2))\doteq 216.70$。$\widehat{S}_{\omega 2}(2)=\{l_4\}$。

3），$S(2)=\{l_8，l_5，l_4\}$，$H(3)$=$\{l_1，l_2，l_3，l_4，l_5，l_6，l_7，l_8\}$，其中$x_1(2),x_2(2),x_3(2),x_4(2),x_5(2),x_6(2),x_7(2),x_8(2)$ 为路径$l_1,l_2,l_3,l_4,l_5,l_6,l_7,l_8$ 的流量，即加入路径l_8 。解下列规划问题$MP(3)$:

Min z(x) $=\sum_{a\in E}\int_0^{x_a(i)} t_a(x)\,\mathrm{dx} =\frac{7}{3}(x_1(2))^3+188x_1(2)+(x_1(2)+x_8(2))^3+156x_8(2)+(x_1(2)+x_5(2)+x_8(2))^3+171x_5(2)+\frac{2}{3}(x_2(2)+x_6(2))^3+182x_2(2)+140x_6(2)+\frac{5}{3}(x_2(2)+x_3(2))^3+111x_3(2)+(x_2(2))^3+\frac{2}{3}(x_2(2)+x_6(2)+x_7(2))^3+171x_7(2)+2(x_3(2))^3+\frac{2}{3}(x_3(2)+x_7(2))^3+\frac{1}{3}(x_4(2)+x_7(2))^3+161x_4(2)+\frac{5}{3}(x_4(2))^3+\frac{2}{3}(x_4(2)+x_8(2))^3+\frac{2}{3}(x_5(2)+x_8(2))^3+(x_5(2))^3+(x_5(2)+x_6(2)+x_7(2))^3+(x_6(2)+x_7(2))^3$。

$$s.t\begin{cases} x_1(2)+x_3(2)+x_5(2)+x_8(2)=6, x_2(2)+x_4(2)+x_6(2)+x_7(2)=5,\\ x_1(2)+x_8(2)\le 7, x_1(2)+x_5(2)+x_8(2)\le 7, x_2(2)+x_6(2)\le 6,\\ x_3(2)+x_2(2)\le 6, x_2(2)+x_6(2)+x_7(2)\le 8, x_3(2)+x_7(2)\le 5,\\ x_4(2)+x_7(2)\le 6, x_4(2)+x_8(2)\le 3, x_5(2)+x_8(2)\le 5,\\ x_5(2)+x_6(2)+x_7(2)\le 4, x_6(2)+x_7(2)\le 6, 0\le x_1(2)\le 7,\\ 0\le x_2(2)\le 6, 0\le x_3(2)\le 5, 0\le x_4(2)\le 3, 0\le x_5(2)\le 4,\\ 0\le x_6(2)\le 4, 0\le x_7(2)\le 4, 0\le x_8(2)\le 3. \end{cases}$$

其中$(x_{e3}(2)=x_{e10}(2)=x_1(2), x_{e18}(2)=x_1(2)+x_8(2), x_{e23}(2)=x_1(2)+x_5(2)+x_8(2), x_{e7}(2)=x_2(2)+x_6(2), x_{e14}(2)=x_2(2)+x_3(2), x_{e20}(2)=x_2(2), x_{e22}(2)=x_2(2)+x_6(2)+x_7(2), x_{e1}(2)=x_{e21}(2)=x_3(2), x_{e6}(2)=x_3(2)+x_7(2), x_{e2}(2)=x_4(2)+x_7(2), x_{e5}(2)=x_{e17}(2)=x_4(2), x_{e11}(2)=x_4(2)+x_8(2), x_{e4}(2)=x_5(2)+x_8(2), x_{e12}(2)=x_5(2), x_{e19}(2)=x_5(2)+x_6(2)+x_7(2), x_{e13}(2)=x_6(2)+x_7(2))$。

解得$x(3)$在l_1上的流量$x_1(3)=1.35$、在l_2上的流量$x_2(3)=0.00$、在l_3 上的流量$x_3(3)=3.14$、在l_4 上的流量$x_4(3)=2.23$、在l_5 上的流量$x_5(3)=0.74$、在l_6上的流量$x_6(3)=2.77$、在l_7 上的流量$x_7(3)=0.00$、在l_8上的流量$x_8(3)=0.77$，其它路径上的流量为0。此时流量图为图 4。

流$x(3)$ 有饱和弧e_{11}, 饱和路径l_4，l_8，删除饱和弧e_{11}，以$x(3)$为流的各弧上的支付为权，得加权网络$\widehat{\aleph}_3$，此时加权网络图为图 5。

i=3，

1)，(1) 对O/D点对ω1=(1,12)，$\overline{T}_{\omega 1}(3)$=$t_{l_1}(x(3))\doteq 238.90$。对O/D点对$\omega$2=(3, 10)，$\overline{T}_{\omega 2}(3)$ =$t_{l_6}(x(3))\doteq 230.90$。

(2) 在流$x(3)$下，删除饱和弧e_{11}后，以$x(3)$为流的各弧上的支付为权，得加权网络$\widehat{\aleph}_3$，在加权网络$\widehat{\aleph}_3$中，对O/D点对ω1=(1,12)，最短路为$S_{\omega_1}(3)=\{l_3\}=\{e_1e_6e_{14}e_{21}\}$，$\widetilde{T}_{\omega 1}(3)$=$t_{l_3}(x(3))\doteq 238.90$。

对O/D点对ω2= (3, 10)，最短路为$S_{\omega_2}(3)=\{l_6\}=\{e_7e_{13}e_{19}e_{22}\}$，$\widetilde{T}_{\omega 2}(3)$=$t_{l_6}(x(3))\doteq 230.90$。

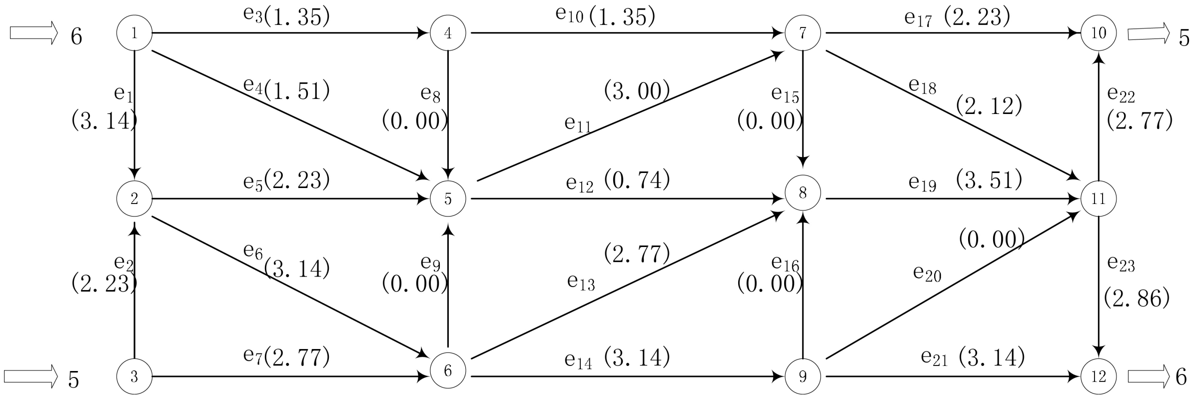

Figure 4. The figure of network flow under $x(3)$

图 4. 在$x(3)$下的网络流量图

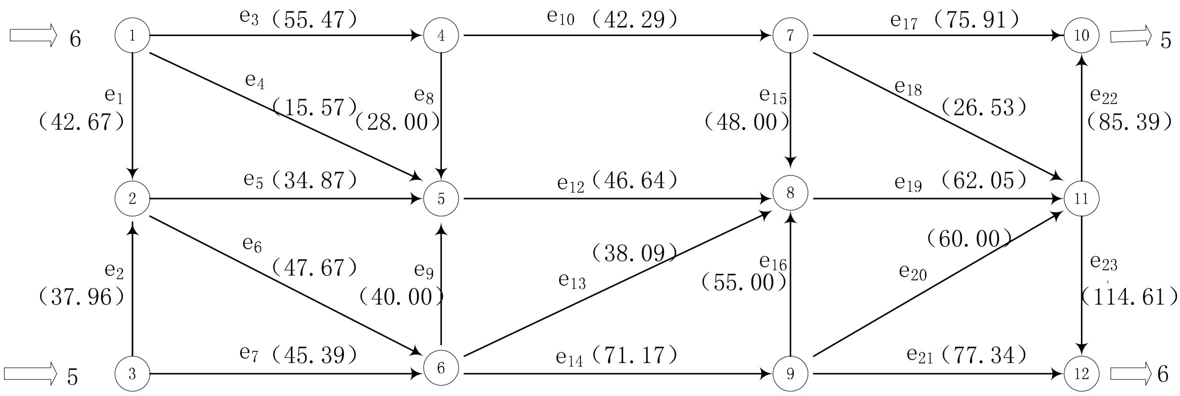

Figure 5. The figure of network weighting under $x(3)$

图 5. 在$x(3)$下的网络加权图

$\Omega_{\omega 1}(3) = 0.00$，$\Omega_{\omega 2}(3) = 0.00$。

$\Omega(3) = 0.00$。

可行流$x(3)$的落差为$\Omega(3) = 0.00$，$x(3)$ 为均衡流。

此均衡流有饱和弧e_{11}，饱和路径l_4、l_8。

4. 结论

本文根据落差定义，给出了可行流x是具弧容量约束交通均衡流的充要条件，并以此构造了一种新算法。本文在计算过程中，就是利用落差，抓住主要矛盾，找出落差点对，通过快速减少可行流落差点对的落差值，来计算具弧容量约束交通均衡流。

本文的算法，无需逐一罗列出所有OD点对的路径，事实上，在交通网络比较复杂的情况下，逐一罗列出所有OD点对的路径，这是比较困难的。本文的新算法，就避免了这种情况，文中的例子充分说明了这一点。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11301571)；重庆市自然科学基金资助(cstc2018jcyj AX0337)；重庆市创新团队资助(CXTDX201601022)；重庆交通大学校级创新团队项目；重庆交通大学校内培育基金(2018PY21) 及重庆交通大学创新创业训练项目(201810618104)。

参考文献

[1] Wardrop, J. (1952) Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, *Part II*, **1**, 325-378. https://doi.org/10.1680/ipeds.1952.11259

[2] Beckmann, M.J., McGuire, C.B. and Winsten, C.B. (1956) Studies in the Economics of Transportation. Yale University Press, New Haven.

[3] Lin, Z. (2010) The Study of Traffic Equilibrium Problems with Capacity Constraints of Arcs. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**, 2280-2284. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.07.002

[4] Lin, Z. (2010) On Existence of Vector Equilibrium Flows with Capacity Constraints of Arcs. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **72**, 2076-2079. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.10.007

[5] Lin, Z. (2015) An Algorithm for Traffic Equilibrium Flow with Capacity Constraints of Arcs. *Journal of Transportation Technologies*, **5**, 240-246. https://doi.org/10.4236/jtts.2015.54022

[6] Xu, Y.D. and Li, S.J. (2014) Vector Network Equilibrium Problems with Capacity Constraints of Arcs and Nonlinear Scalarization Methods. *Applicable Analysis*, **93**, 2199-2210. https://doi.org/10.1080/00036811.2013.875160

[7] Tian, X.Q. and Xu, Y.D. (2012) Traffic Network Equilibrium Problems with Capacity Constraints of Arcs and Linear Scalarization Methods. *Journal of Applied Mathematics*, **2012**, Article ID: 612142. https://doi.org/10.1155/2012/612142

[8] Xu, Y.D., Li, S.J. and Teo, K.L. (2012) Vector Network Equilibrium Problems with Capacity Constraints of Arcs. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, **48**, 567-577. https://doi.org/10.1016/j.tre.2011.11.002

[9] Chiou, S.W. (2010) An Efficient Algorithm for Computing Traffic Equilibria Using Transyt Model. *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 3390-3399. https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.02.028

[10] Xu, M., Chen, A., Qu, Y. and Gao, Z. (2011) A Semismooth Newton Method for Traffic Equilibrium Problem with a General Nonadditive Route Cost. *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 3048-3062. https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.12.021

[11] Chen, A., Zhou, Z. and Xu, X.D. (2012) A Self-Adaptive Gradient Projection Algorithm for the Nonadditive Traffic Equilibrium Problem. *Computers & Operations Research*, **39**, 127-138. https://doi.org/10.1016/j.cor.2011.02.018

知网检索的两种方式：

1. 打开知网首页：http://cnki.net/，点击页面中“外文资源总库 CNKI SCHOLAR”，跳转至：http://scholar.cnki.net/new，搜索框内直接输入文章标题，即可查询；
   或点击“高级检索”，下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询。
2. 通过知网首页 http://cnki.net/顶部“旧版入口”进入知网旧版：http://www.cnki.net/old/，左侧选择“国际文献总库”进入，搜索框直接输入文章标题，即可查询。

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org