Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(9), 1515-1521
Published Online September 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.89177

Hans汉斯

QUICK Discrete Scheme for Fokker-Planck Equation

Haifa Yin

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan
Email: 2716350186@qq.com

Received: August 12th, 2019; accepted: August 27th, 2019; published: September 3rd, 2019

Abstract

We design a finite volume method for solving time fractional Fokker-Planck equation. The time is dispersed by L1-approximate, the space convection term is discretized by QUICK scheme, and the diffusion term is discretized by central difference. The numerical results show that the method is second-order convergent in space.

Keywords

Time Fractional Fokker-Planck Equations, Finite Volume Method, QUICK Scheme

Fokker-Planck方程的QUICK离散格式研究

尹海发

长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙
Email: 2716350186@qq.com

收稿日期：2019年8月12日；录用日期：2019年8月27日；发布日期：2019年9月3日

摘　要

我们研究了一种求解时间分数阶Fokker-Planck方程的有限体积法，时间上用L_1近似，在空间对流项利用QUICK格式离散，扩散项用中心差分离散。数值实验结果表明该方法在空间上为二阶收敛。

关键词

时间分数阶Fokker-Planck方程，有限体积法，QUICK离散格式

文章引用: 尹海发. Fokker-Planck 方程的 QUICK 离散格式研究[J]. 应用数学进展, 2019, 8(9): 1515-1521.
DOI: 10.12677/aam.2019.89177

1. 研究的问题

考虑如下的时间分数阶 Fokker-Planck 方程(FFPE)：

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}=\left(k_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x} f\right) D_t^{1-\alpha} \omega, \quad a \le x \le b, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.1}$$

初始条件和边值条件为

$$\omega(x,0)=\varphi(x), \quad a \le x \le b, \quad \omega(a,t)=g_1(t), \quad \omega(b,t)=g_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

其中 $\alpha \in (0,1)$，k_α 为正常数，$f, \varphi(x), g_1(t), g_2(t)$ 为给定函数，方程(1.1)中的分数阶导数为 Riemann-Liouville 分数阶导数：$D_t^{1-\alpha}\omega(x,t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{u(x,s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\mathrm{d}s$，其中 $\Gamma(x)$ 是 Gamma 函数。

方程(1.1)常用来模拟受外力场作用下的反常扩散(如[1])，k_α 表示广义扩散系数，f 表示外力场。方程(1.1)可改写为其等价形式：

$$\frac{\partial^\alpha \omega}{\partial t^\alpha}=\left(k_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x} f\right) \omega(x,t), \quad a \le x \le b, \quad 0 \le t \le T. \tag{1.3}$$

其中 $\partial^\alpha \omega / \partial t^\alpha$ 表示 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶 Caputo 分数阶导数：$\frac{\partial^\alpha \omega}{\partial t^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{\partial \omega(x,\eta)}{\partial t}\frac{\mathrm{d}\eta}{(t-\eta)^\alpha}$。

对于分数阶 Fokker-Planck 方程的求解，已有数值方法，大多是针对 f 是常数的函数情况(参见[2]-[10])。其中对 $f=0$ 情形，Jiang [3]对 Chen 等[5]中的数值格式给出了稳定性和收敛性的证明；Vong 和 Wang [10]开发了一种高阶差分格式求解时间分数阶 Fokker-Planck 方程，并获得了它的稳定性和收敛性。对于 $f=f(x)$ (变外力场)情况，已有的数值方法非常少，我们发现 Le 等[11]研究了两种方法，第一种是时间上连续(在空间中使用分段线性 Galerkin 有限元方法离散化)，第二种是空间连续(采用类似于经典隐式欧拉方法的时间步长方法)，并证明它的稳定性和收敛性。

有限体积法在成功应用于求解整数阶方程后，现已开始应用于求解分数阶方程，如[12]对空间分数阶方程采用了有限体积方法；[13]利用有限体积法数值求解时间－空间分数阶方程；[14]则对二维时间分数阶偏微分方程进行有限体积法研究(其中 $f=0$)。

我们研究了一种求解(1.3)的 FV 方法，在空间上利用对流项的二次向上差分格式离散，时间上利用 L_1 近似离散。数值实验结果表明该方法在空间上为二阶收敛。

本文中，假定解 ω 充分光滑，$f(x)$ 满足如下 Lipschitz 条件，其中 C 表示正常数，与网格大小无关。

$$\left|f(x)-f(x')\right| \le C x-x', \quad x, x' \in [a,b]. \tag{1.4}$$

2. 离散

设 N，L 为正整数，取空间步长 $h=(b-a)/(N+1)$，时间步长 $\Delta t=T/L$。区间 $[a,b]$ 上 $N+1$ 等分，分点为 $x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,N+1$，得到 N 个小区间 $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right], i=0,1,\cdots,N$；在区间 $[0,t]$ 上 L 等分，分点

为 $t_k = k\Delta t, k = 0,1,\cdots,L$。为了方便，仅取 f 在点 $x_{i+\frac{1}{2}}, i = 0,1,\cdots,N$ 处的值，记 $f_{x+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$。

在方程(1.3)中取 $t = t_n\left(n = 0,1,\cdots,L\right)$，在第 i 个控制体积上即区间 $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right]$ 上对方程两边求积得到

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left.\frac{\partial^\alpha \omega}{\partial t^\alpha}\right|_{t_n} \mathrm{d}x = k_\alpha\left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},n} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},n}\right) - \left(\left(f\omega\right)_{i+\frac{1}{2},n} - \left(f\omega\right)_{i-\frac{1}{2},n}\right),\ i = 1,2,\cdots,N \tag{2.1}$$

将 $\omega\left(x_i, t_n\right)$ 记做 $\omega_i^n\left(i = 0,1,\cdots,N+1; n = 0,1,\cdots,L\right)$，(2.1)式左边可以改写为：

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left.\frac{\partial^\alpha \omega}{\partial t^\alpha}\right|_{t_n} \mathrm{d}x &= \left(\frac{\partial^\alpha \omega}{\partial t^\alpha}\right)_{(x_i,t_n)} h - h\gamma_{i,n}^{(1)} \\ &= \frac{h\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\omega_{i,n} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{n-k-1} - a_{n-k}\right)\omega_i^k - a_{n-1}\omega_i^0\right) - h\gamma_{i,n}^{(1)} - h\gamma_{i,n}^{(2)},\end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.3)式中第一个等式应用中矩形公式，第二个等式应用了 L_1 近似，其中 $a_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$，(见[15] [16])，其中误差项

$$\gamma_{i,n}^{(1)} := \left(\left(\frac{\partial^\alpha \omega}{\partial t^\alpha}\right)_{(x_i,t_n)} h - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left.\frac{\partial^\alpha \omega}{\partial t^\alpha}\right|_{t_n}\right) \Big/ h \tag{2.3}$$

$$\gamma_{i,n}^{(2)} := \left(\frac{h\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\omega_{i,n} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{n-k-1} - a_{n-k}\right)\omega_i^k - a_{n-1}\omega_i^0\right) - h\left(\frac{\partial^\alpha \omega}{\partial t^\alpha}\right)_{(x_i,t_n)}\right) \Big/ h \tag{2.4}$$

根据式(2.3)和(2.4)，我们可以得到截断误差

$$h\left|\gamma_{i,n}^{(1)}\right| \le Ch^3,\ h\left|\gamma_{i,n}^{(2)}\right| \le Ch\cdot t^{2-\alpha},\ i = 1,\cdots,N; n = 1,\cdots,L$$

(2.1)式右侧第一项可以根据中点差分公式写作

$$k_\alpha\left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},n} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},n}\right) = k_\alpha\left(\widetilde{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},n}} - \widetilde{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},n}}\right) + h\gamma_{i,n}^{(3)} \tag{2.5}$$

其中

$$\widetilde{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},n}} := \frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h},\ i = 0,1,\cdots,N \tag{2.6}$$

根据泰勒公式，容易得到

$$h\left|\gamma_{i,n}^{(3)}\right| \le Ch^3,\ i = 1,2,\cdots,N \tag{2.7}$$

式(2.3)右侧第二项与对流速度 $f(x)$ 有关，我们利用对流项的二次向上差分即 QUICK 格式

$$f_{i+\frac{1}{2}}\omega_{i+\frac{1}{2}}^n = \widetilde{f_{i+\frac{1}{2}}\omega_{i+\frac{1}{2}}^n} + r_{i+\frac{1}{2}}, \tag{2.8}$$

其中 $i = 0,1,\cdots,N$，

$$\widetilde{f_{i+\frac{1}{2}}\omega_{i+\frac{1}{2}}^n} := f_{i+\frac{1}{2}}\frac{3\omega_{i+1}^n + 6\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{8}, \tag{2.9}$$

$$r_{i+\frac{1}{2}} := f_{i+\frac{1}{2}}\omega^n_{i+\frac{1}{2}} - \widetilde{f_{i+\frac{1}{2}}\omega^n_{i+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2} f_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial^3 \omega^n_{i+\frac{1}{2}}}{\partial x^3}\right) h^3 + o\left(h^4\right), \tag{2.10}$$

式子(2.10)中是利用泰勒公式得到的，据此可以将(2.1)式右侧改写为

$$(f\omega)_{i+\frac{1}{2},n} - (f\omega)_{i-\frac{1}{2},n} = \widetilde{(f\omega)_{i+\frac{1}{2},n}} - \widetilde{(f\omega)_{i-\frac{1}{2},n}} - h\gamma^{(4)}_{i,n} \tag{2.11}$$

其中

$$h\gamma^{(4)}_{i,n} = \left(r_{i-\frac{1}{2}} - r_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

我们很容易得到

$$\left| r_{i-\frac{1}{2}} - r_{i+\frac{1}{2}} \right| \le Ch^3 .$$

将(2.2)、(2.5)和(2.11)代入(2.1)式可以得到

$$\begin{aligned} &\frac{h\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\omega^n_i - \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{n-k-1} - a_{n-k}\right)\omega^k_i - a_{n-1}\omega^0_i\right) \\ &= k_\alpha\left(\widetilde{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},n}} - \widetilde{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},n}}\right) + \widetilde{(f\omega)_{i+\frac{1}{2},n}} - \widetilde{(f\omega)_{i-\frac{1}{2},n}} + h\gamma^n_i \end{aligned} \tag{2.12}$$

$i = 1,2,\cdots,N; n = 1,2,\cdots,L$，其中 $r^n_i = \sum_{j=1}^4 \gamma^{(j)}_{i,n}$。我们用 W^n_i 近似 ω^n_i，由(2.12)式我们可以得到如下的有限体积法(FV)：$i = 1,2,\cdots,N; n = 1,2,\cdots,L$

$$\begin{aligned} &\frac{h\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(W^n_i - \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{n-k-1} - a_{n-k}\right)W^k_i - a_{n-1}W^0_i\right) \\ &= k_\alpha\left(\widetilde{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},n}} - \widetilde{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},n}}\right) + \widetilde{(fW)_{i+\frac{1}{2},n}} - \widetilde{(fW)_{i-\frac{1}{2},n}} + h\gamma^n_i \end{aligned} \tag{2.13}$$

边界条件和初始条件为

$$W^n_0 = g_1(t_n),\ W^n_{N+1} = g_2(t_n),\ W^0_i = \varphi(x_i) \tag{2.14}$$

其中 $\widetilde{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},n}}$ 是直接在(2.4)式中用 W 替换 ω，$\widetilde{(fW)_{i+\frac{1}{2},n}}$ 是直接在(2.8)、(2.9)和(2.11)中用 W 替换 ω。

有限体积法(FV)的矩阵形式如下

$$\left(\frac{h\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} I + A + B\right) W^n = \frac{h\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\sum_{k=1}^n \left(a_{n-k-1} - a_{n-k}\right)W^k + a_{n-1}W^0\right) + d^n \tag{2.15}$$

$n = 1,2,\cdots,L$，$W^k = \left(W^k_1, W^k_2, \cdots, W^k_N\right)^{\mathrm{T}}$，$d^n = \left(d^n_1, d^n_2, \cdots, d^n_N\right) \in R^N$，$I \in R^{N\times N}$ 是单位矩阵。$A = \left(a_{ij}\right) \in R^{N\times N}$ 是(2.13)式右侧第一项系数矩阵，$B = \left(b_{ij}\right) \in R^{N\times N}$ 是(2.13)式右侧第二项系数矩阵，矩阵 A, B, d^n 如下：

矩阵 A 的第 1 列

$$a_{11}=\frac{2k_\alpha}{h},\ a_{21}=-\frac{k_\alpha}{h},\ a_{i1}=0,\ i\ge 3; \tag{2.16}$$

矩阵 A 的第 N 列

$$a_{NN}=\frac{2k_\alpha}{h},\ a_{(N-1)N}=-\frac{k_\alpha}{h},\ a_{iN}=0,\ i\le N-2; \tag{2.17}$$

矩阵 A 的第 i 列 $(i=2,\cdots,N-1)$

$$a_{ii}=\frac{2k_\alpha}{h},\ a_{(i+1)i}=a_{(i-1)i}=-\frac{k_\alpha}{h},\ a_{ij}=0,\ i\ge j+2,\ i\le j-2; \tag{2.18}$$

矩阵 B 的第 1 列

$$b_{11}=\frac{6}{8}f_{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}f_{\frac{1}{2}},\ b_{21}=-\frac{1}{8}f_{\frac{5}{2}}-\frac{6}{8}f_{\frac{3}{2}},\ b_{31}=\frac{1}{8}f_{\frac{5}{2}},\ b_{i1}=0,\ i\ge 4 \tag{2.19}$$

矩阵 B 的第 $N-1$ 列

$$b_{(N-1)(N-1)}=\frac{6}{8}f_{N-\frac{1}{2}}-\frac{3}{8}f_{N-\frac{3}{2}},\ b_{(N-2)(N-1)}=\frac{3}{8}f_{N-\frac{3}{2}} \tag{2.20}$$

$$b_{N(N-1)}=-\frac{1}{8}f_{N+\frac{1}{2}}-f_{N-\frac{1}{2}},\ b_{i1}=0, i\le N-3 \tag{2.21}$$

矩阵 B 的第 N 列

$$b_{NN}=\frac{6}{8}f_{N+\frac{1}{2}}-\frac{3}{8}f_{N-\frac{1}{2}},\ b_{(N-1)N}=\frac{3}{8}f_{N-\frac{1}{2}} \tag{2.22}$$

矩阵 B 的第 j 列 $2\le j\le N-2$ 列

$$b_{jj}=\frac{6}{8}f_{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{8}f_{j-\frac{1}{2}},\ b_{(j-1)j}=\frac{3}{8}f_{j-\frac{1}{2}} \tag{2.23}$$

$$b_{(j+1)j}=-\frac{1}{8}f_{j+\frac{3}{2}}-\frac{6}{8}f_{j+\frac{1}{2}},\ b_{(j+2)j}=\frac{1}{8}f_{j+\frac{3}{2}} \tag{2.24}$$

矩阵 d^n

$$d_1^n=\left(\frac{1}{8}f_{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}f_{\frac{1}{2}}+\frac{k_\alpha}{h}\right)g_1(t_n),\ d_2^n=\left(-\frac{1}{8}f_{\frac{3}{2}}\right)g_1(t_n)$$

$$d_i^n=0,\ i=3,\cdots,N-1, \tag{2.25}$$

$$d_N^n=\left[-\frac{3}{8}f_{N+\frac{1}{2}}+\frac{k_\alpha}{h}\right]g_2(t_n)。 \tag{2.26}$$

3. 数值实验及结论

本小节将利用我们设计的有限体积法解决{(1.1)(1.2)}问题。考虑下列具有精确解的方程

$$\frac{\partial^\alpha \omega}{\partial t^\alpha}=\left(k_\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}f(x)\right)+g(x,t),\ 0\le x\le 1, 0\le t\le 1, \tag{3.1}$$

初始条件和边值条件为 $u(x,0)=0$，$g_1(t)=t^2$，$g_2(t)=-t^2$，其中

$$g(x)=\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha}\cos(\pi x)+k_\alpha\pi^2t^2\cos\pi x+t^2\left[(1-2x)\cos(\pi x)-f(x)\pi\sin(\pi x)\right], \tag{3.2}$$

并且 $k_\alpha=1$， $f(x)=x-x^2+1500$ 。此方程的精确解为 $u(x,t)=t^2\cos(\pi x)$ 。

我们定义空间收敛阶如下：

$$\text{空间收敛阶}=\left|\frac{\ln\left(\|\text{细网格误差}\|_1/\|\text{粗网格误差}\|_1\right)}{\ln\left(\text{细网格划分数}N+1/\text{粗网格划分数}N+1\right)}\right|$$

空间收敛阶的数值结果列于表 1~表 3 中。数值实验表明该方法空间上可以达到二阶收敛。

Table 1. Convergence rate for space with a = 0.2, L = 5000

表 1. 空间收敛阶 a = 0.2，L = 5000

$N+1$	5	10	20	40	80
$\max_n\|e^n\|_\infty$	1.785×10^{-1}	4.367×10^{-2}	1.074×10^{-2}	2.804×10^{-3}	8.860×10^{-3}
$\max_n\|e^n\|_1$	9.265×10^{-2}	2.461×10^{-2}	6.210×10^{-3}	1.602×10^{-3}	4.673×10^{-4}
Conv.rate		1.919	1.987	1.954	1.778

Table 2. Convergence rate for space with a = 0.5, L = 5000

表 2. 空间收敛阶 a = 0.5，L = 5000

$N+1$	5	10	20	40	80
$\max_n\|e^n\|_\infty$	1.784×10^{-1}	4.368×10^{-2}	1.073×10^{-2}	2.805×10^{-3}	8.861×10^{-3}
$\max_n\|e^n\|_1$	9.264×10^{-2}	2.461×10^{-2}	6.211×10^{-3}	1.602×10^{-3}	4.674×10^{-4}
Conv.rate		1.919	1.987	1.954	1.778

Table 3. Convergence rate for space with a = 0.8, L = 5000

表 3. 空间收敛阶 a = 0.8，L = 5000

$N+1$	5	10	20	40	80
$\max_n\|e^n\|_\infty$	1.786×10^{-1}	4.367×10^{-2}	1.074×10^{-2}	2.801×10^{-3}	8.860×10^{-3}
$\max_n\|e^n\|_1$	9.265×10^{-2}	2.462×10^{-2}	6.210×10^{-3}	1.602×10^{-3}	4.673×10^{-4}
Conv.rate		1.919	1.987	1.954	1.778

致　谢

感谢我的导师姜英军教授和师兄周帅虎、师姐黄兰对我论文完成中的悉心指导和帮助。

基金项目

国家自然科学基金(11571053)。

参考文献

[1] So, F. and Liu, K.L. (2004) A Study of the Subdiffusive Fractional Fokker-Planck Equation of Bistable Systems. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **331**, 378-390. https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.09.026

[2] Jiang, Y. and Xu, X. (2018) A Monotone Finite Volume Method for Time Fractional Fokker-Planck Equations. *Science China Mathematics*, **62**, 783-794. https://doi.org/10.1007/s11425-017-9179-x

[3] Jiang, Y. (2015) A New Analysis of Stability and Convergence for Finite Difference Schemes Solving the Time Frac-

tional Fokker-Planck Equation. *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 1163-1171. https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.07.029

[4] Jiang, Y. and Ma, J. (2011) High-Order Finite Element Methods for Time-Fractional Partial Differential Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **235**, 3285-3290. https://doi.org/10.1016/j.cam.2011.01.011

[5] Chen, S., Liu, F., Zhuang, P. and Anh, V. (2009) Finite Difference Approximations for the Fractional Fokker-Planck Equation. *Applied Mathematical Modelling*, **33**, 256-273. https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.11.005

[6] Deng, W. (2007) Numerical Algorithm for the Time Fractional Fokker-Planck Equation. *Journal of Computational Physics*, **227**, 1510-1522. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.09.015

[7] Cao, X., Fu, J. and Huang, H. (2012) Numerical Method for the Time Fractional Fokker Planck Equation. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, **4**, 848-863.

[8] Saadatmandi, A., Dehghan, M. and Azizi, M. (2012) The Sinc-Legendre Collocation Method for a Class of Fractional Convection-Diffusion Equations with Variable Coefficients. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **17**, 4125-4136. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.03.003

[9] Fairweather, G., Zhang, H., Yang, X. and Xu, D. (2014) A Backward Euler Orthogonal Spline Collocation Method for the Time-Fractional, Fokker-Planck Equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **31**, 1534-1550. https://doi.org/10.1002/num.21958

[10] Vong, S. and Wang, Z. (2015) A High Order Compact Finite Difference Scheme for Time Fractional Fokker-Planck Equation. *Applied Mathematics Letters*, **43**, 38-43. https://doi.org/10.1016/j.aml.2014.11.007

[11] Le, K.N., Mclean, W. and Mustapha, K. (2016) Numerical Solution of the Time-Fractional Fokker-Planck Equation with General Forcing. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **54**, 1763-1784. https://doi.org/10.1137/15M1031734

[12] Feng, L.B., Zhuang, P., Liu, F. and Turne, I. (2015) Stability and Convergence of a New Finite Volume Method for a Two-Sided Space Fractional Diffusion Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **257**, 52-65. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.12.060

[13] Hejazi, H., Moroney, T. and Liu, F. (2013) A Finite Volume Method for Solving the Two-Sided Time-Space Fractional Advection-Dispersion Equation. *Central European Journal of Physics*, **11**, 1275-1283. https://doi.org/10.2478/s11534-013-0317-y

[14] Karaa, S., Mustapha, K. and Pani, A.K. (2016) Finite Volume Element Method for Two-Dimensional Fractional Sub-Diffusion Problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **37**, 945-964. https://doi.org/10.1093/imanum/drw010

[15] Langlands, T. and Henry, B. (2005) The Accuracy and Stability of an Implicit Solution Method for the Fractional Diffffusion Equation. *Journal of Computational Physics*, **205**, 719-736. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.11.025

[16] Oldham, K.B. and Spanier, J. (1974) The Fractional Calculus. Academic Press, New York.