Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(10), 1655-1658
Published Online October 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.810195

The Toxic Producing Phytoplankton-Zooplankton Interaction with Holling-III Functional Response

Xiaona Li

College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
Email: Lixnmath@163.com

Received: Oct. 4th, 2019; accepted: Oct. 23rd, 2019; published: Oct. 30th, 2019

Abstract

The present paper aims to investigate a toxic producing phytoplankton-zooplankton system with Holling-III functional response. The positive and boundness of solutions and stability of the equilibrium are studied.

Keywords

Phytoplankton-Zooplankton, Toxic, Boundness, Local Asymptotic Stability

具有Holling-III型功能反映函数的有毒浮游植物与浮游动物相互作用模型的研究

李晓娜

伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊宁
Email: Lixnmath@163.com

收稿日期：2019年10月4日；录用日期：2019年10月23日；发布日期：2019年10月30日

摘 要

本文研究了具有Holling-III型功能反映函数的有毒浮游植物与浮游动物相互作用模型，分析了模型解的

文章引用: 李晓娜. 具有 Holling-III 型功能反映函数的有毒浮游植物与浮游动物相互作用模型的研究[J]. 应用数学进展, 2019, 8(10): 1655-1658. DOI: 10.12677/aam.2019.810195

正性、有界性以及模型平衡点的稳定性。

关键词

浮游动植物，毒素，有界性，局部渐近稳定

1. 引言

浮游动植物是水生生态系统的生产者和初级消费者，近年来，诸多学者对浮游动植物系统做了研究。由于很难监测浮游动植物的数量，所以对其建立数学模型就是一个很好的代替办法[1]。在文献[2] [3] [4]中，作者建立了不同的确定性模型来研究浮游生物系统的动力学行为。由于水生环境中有毒浮游植物的特殊性，在文献[5] [6] [7]中，作者通过实验观察发现，毒素在浮游动植物系统中扮演着重要的角色，它既能抑制浮游动物种群数量的增长，又能解释“水华”现象出现的原理。为了使模型更具现实意义，许多学者又考虑了不同的功能反映函数，其中包括 Leslie-Gower 模型、Holling-Tanner 模型和 Stage-structure 模型。而在第二种模型中，Holling-II 型功能反映函数通常适用于无脊椎动物，对于脊椎动物，我们则使用 Holling-III 型功能反映函数。文献[8] [9] [10]研究了具有 Holling-III 型功能反映函数的模型。

本文在前人的基础上，考虑如下的具有 Holling-III 型功能反映函数的有毒浮游植物与浮游动物相互作用的模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\left(r_1-b_1p\right)p-\dfrac{\alpha_1p^2z}{p^2+k_1}, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta_1p^2z}{p^2+k_1}-Dz-\dfrac{\rho_1p^2z}{p^2+k_2}. \end{cases} \tag{1}$$

其中 p 和 z 分别为浮游植物和浮游动物在 t 时刻的密度。设模型(1)中的参数均为正数，且参数的实际意义如下：

r_1：浮游植物的内在生长率；
b_1：浮游植物间的相互竞争；
α_1：浮游动物的最大摄取量；
β_1：梅单位生物量的浮游动物对浮游植物的转换率；
D：浮游动物的死亡率；
ρ_1：每单位生物量的浮游植物对毒素物质的释放率；
k_1,k_2：半饱和常量。

2. 模型解的正性和有界性

为了减少模型(1)中参数的个数，令

$\bar{p}=\dfrac{b_1}{r_1}p$，$\bar{t}=r_1t$，$\bar{z}=\dfrac{\alpha_1b_1}{r_1^2}z$，$\bar{k}_1=\dfrac{b_1^2}{r_1^2}k_1$，$\bar{k}_2=\dfrac{b_1^2}{r_1^2}k_2$，$\bar{\beta}=\dfrac{\beta_1}{r_1}$，$\bar{D}=\dfrac{D}{r_1}$，$\bar{\rho}=\dfrac{\rho_1}{r_1}$，再去掉“−”，(1)

式就变为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=p(1-p)-\dfrac{p^2z}{p^2+k_1},\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta p^2z}{p^2+k_1}-Dz-\dfrac{\rho p^2z}{p^2+k_2}.\end{cases}\tag{2}$$

对于(2)式解的正性和有界性，我们给出如下结论。

定理 1 在 $\varphi_1(0)>0$，$\varphi_2(0)>0$ 的情况下，则对所有的 $t\ge0$，系统(2)的所有解是正的，有界的，且 $\limsup\limits_{t\to+\infty}p(t)\le1$，$\limsup\limits_{t\to+\infty}z(t)\le\dfrac{\beta(D+1)^2}{D}$。

证明：解的正性比较容易证明，在这里省略。对于解的有界性，根据系统(2)的第一个方程可知 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\le p(1-p)$，由此可得 $\limsup\limits_{t\to+\infty}p(t)\le1$。定义 $w(t)=z(t)+\beta p(t)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}&=\frac{\beta p^2z}{p^2+k_1}-Dz-\frac{\rho p^2z}{p^2+k_2}+\beta p(1-p)-\frac{\beta p^2z}{p^2+k_1}\\&<-D(z+\beta p)+D\beta p+\beta p-\beta p^2\\&\le-Dw(t)+\beta\frac{(D+1)^2}{4},\end{aligned}$$

所以 $w(t)\le\dfrac{\beta(D+1)^2}{4D}$，故 $\limsup\limits_{t\to+\infty}z(t)\le\dfrac{\beta(D+1)^2}{4D}$。

3. 模型平衡点的稳定性

由于 $\beta-\rho-D>0$，所以系统(2)存在边界平衡点 $E^0=(0,0)$ 和 $E^1=(1,0)$ 及唯一的正平衡点 $E^*=(p^*,z^*)$，其中 $z^*=\dfrac{(1-p)(p^2+k_1)}{p}$，$p^*$ 满足

$$p^2=\frac{-(\beta k_2-\rho k_1-Dk_1-Dk_2)\pm\sqrt{(\beta k_2-\rho k_1-Dk_1-Dk_2)^2+4(\beta-\rho-D)Dk_1k_2}}{2(\beta-\rho-D)}.$$

将系统(2)沿着平衡点线性化可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\left(1-2p-\dfrac{2k_1pz}{(p^2+k_1)^2}\right)p-\dfrac{p^2}{p^2+k_1}z,\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{2k_1\beta pz}{(p^2+k_1)^2}-\dfrac{2k_2\rho pz}{(p^2+k_2)^2}\right)p,\end{cases}$$

平衡点 E^0 处的特征根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-D$，所以平衡点 E^0 不稳定。平衡点 E^1 处的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\dfrac{\beta}{1+k_1}-D-\dfrac{\rho}{1+k_2}$，因此，若 $\dfrac{\beta}{1+k_1}-D-\dfrac{\rho}{1+k_2}<0$，则平衡点 E^1 局部渐近稳定，若 $\dfrac{\beta}{1+k_1}-D-\dfrac{\rho}{1+k_2}>0$，则平衡点 E^1 不稳定。平衡点 E^* 处的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix}J_{11}&J_{12}\\J_{21}&J_{22}\end{pmatrix}$$

其中，$J_{11}=1-2p^*-\frac{2k_1p^*z^*}{\left(p^{*2}+k_1\right)^2}$，$J_{12}=-\frac{p^{*2}}{p^{*2}+k_1}<0$，$J_{21}=\frac{2k_1\beta p^*z^*}{\left(p^{*2}+k_1\right)^2}-\frac{2k_2\rho p^*z^*}{\left(p^{*2}+k_2\right)^2}$，$J_{22}=0$。其对应的特征方程为

$$\lambda^2-tr\left(J\left(E^*\right)\right)\lambda+\det\left(J\left(E^*\right)\right)=0$$

根据 Routh-Herwitz 定理，若 $\frac{2k_1\beta\left(1-p^*\right)}{\left(p^{*2}+k_1\right)}>\max\left\{\beta\left(1-2p^*\right),\frac{2k_2\rho\left(1-p^*\right)\left(p^{*2}+k_1\right)}{\left(p^{*2}+k_2\right)^2}\right\}$，则平衡点 E^* 是局部渐近稳定的。由以上讨论得出如下结论。

定理 2 对于系统(2)，如下结论成立：

(i) 平衡点 E^0 总是不稳定的；

(ii) 若 $\frac{\beta}{1+k_1}-D-\frac{\rho}{1+k_2}<0$，则平衡点 E^1 是局部渐近稳定的，若 $\frac{\beta}{1+k_1}-D-\frac{\rho}{1+k_2}>0$，则平衡点 E^1 是不稳定的；

(iii) 若 $\frac{2k_1\beta\left(1-p^*\right)}{\left(p^{*2}+k_1\right)}>\max\left\{\beta\left(1-2p^*\right),\frac{2k_2\rho\left(1-p^*\right)\left(p^{*2}+k_1\right)}{\left(p^{*2}+k_2\right)^2}\right\}$，则平衡点 E^* 是局部渐近稳定的，若上式不成立，则平衡点 E^* 是不稳定的。

基金项目

国家自然科学基金项目(11261058)。

参考文献

[1] Martin, P. and Srokosz, A. (2008) Spatially Implicit Plankton Population Models. *Adrian Journal of Theoretical Biology*, **252**, 405-423. https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2008.03.020

[2] Wang, S. and Liu, Z. (1998) Mathematical Simulation of Red Tide Blooms Process in a Closed Environment. *Oceanologia et Limnologia Sinica*, **29**, 405-423.

[3] Wang, S., Feng, G., Duan, M. and Liu, Z. (1997) A Model on Nutrient Dynamics for *Notiluca scinyillans* Red Tide in Dapeng Bay. *Tropic Oceanology*, **16**, 36-42.

[4] Wang, H.L., Feng, J.F., Li, C. and Shen, F. (2003) Research on Nolinear Dynamics of Multi-Species HAB Model. *Transactions of Tianjin University*, **36**, 406-410.

[5] Nielsen, T.G., Kiqrboe, T. and Bjqrnsen, P.K. (1990) Effects of a Chrysochromulina Polylepies Sub Surface Bloom on the Plankton Community. *Marine Ecology Progress Series*, **62**, 12-35.

[6] Nejstgard, J.C. and Solberg, P.T. (1996) Repression of Copepod Feeding and Fecundity by the Toxic Haptophyte *Prymnesium patelliferum*. *Sarsia*, **81**, 339-344. https://doi.org/10.1080/00364827.1996.10413631

[7] Chattopadhyay, J., Sarker, R.R. and Mandal, S. (2002) Toxin Producing Plankton May Act as a Biological Control for Planktonic Blooms: A Field Study And Mathmatical Modelling. *Journal of Theoretical Biology*, **215**, 335-344. https://doi.org/10.1006/jtbi.2001.2510

[8] Zou, W., Xie, J. and Xiong, Z. (2008) Stability and Hopf Bifurcation for an Eco-Epidemiology Model with Holling-III Functional Response and Delay. *BioMath*, **1**, 377-389. https://doi.org/10.1142/s179352450800031x

[9] Fan, Y.H. and Wang, L. (2010) Multiplicity of Periodic Solutions for a Deplayed Ratio-Dependent Predator-Prey Model with Holling Type III Functional Response and Harvesting Terms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **365**, 525-540. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.11.009

[10] Li, G. and Yan, J. (2011) Positive Periodic Solutions for Neutral Delay Ratio=Dependent Predator-Prey Model with Holling Type III Functional Response. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 4341-4348. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.10.009