Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(11), 1827-1844
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.811213

Hans汉斯

Threshold Dynamics for the Stochastic SIQS Epidemic Model with Saturating Contact Rate

Jie Xu, Tiansi Zhang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: 819924208@qq.com

Received: Nov. 10th, 2019; accepted: Nov. 15th, 2019; published: Nov. 22nd, 2019

Abstract

In this paper, the stochastic SIQS model with saturating contact rate is characterized and discussed. The study shows that the dynamics of the model can be determined by a threshold parameter R_0^S. Moreover, by constructing suitable Lyapunov functions, we prove that the disease will die out when $R_0^S < 1$; while $R_0^S > 1$, the disease will be persistent. At the same time, a sufficient condition for the existence of stationary distribution is obtained. Finally, the reasonability of the theoretical results is confirmed by numerical simulations.

Keywords

SIQS Epidemic Model, Saturating Contact Rate, Extinction, Persistence, Stationary Solution

具有饱和接触率的随机SIQS流行病模型的阈值动力学

许　洁，张天四

上海理工大学理学院，上海
Email: 819924208@qq.com

收稿日期：2019年11月10日；录用日期：2019年11月15日；发布日期：2019年11月22日

摘　要

本文描述和讨论了具有饱和接触率的随机SIQS模型。研究表明，可以通过一个阈值参数 R_0^S 来确定模型

文章引用：许洁，张天四. 具有饱和接触率的随机 SIQS 流行病模型的阈值动力学[J]. 应用数学进展, 2019, 8(11): 1827-1844. DOI: 10.12677/aam.2019.811213

的动力学。并且通过建立合适的李雅普诺夫函数，我们证明了当 $R_0^S<1$，疾病将灭绝；而 $R_0^S>1$，疾病将持续存在。同时得到了平稳分布存在的一个充分条件。最后，数值模拟被用来阐述理论结果的合理性。

关键词

SIQS流行病模型，饱和接触率，灭绝，持久性，平稳解

1. 引言

传染病不仅严重威胁人类健康，还给人们带来身体上的痛苦。因此，了解它们的传播机制对控制或根除流行病来说至关重要。自从 Kermack 和 Mckendrick 提出 SIR 流行病模型[1]以来，许多学者就其理论研究了各种流行病模型[2] [3] [4] [5]。他们的基本思想是将人群分为易感，感染和康复个体三部分，在 t 时间的数量分别用 $S(t), I(t)$ 和 $R(t)$ 表示，然后通过建立仓室数学模型对传染病进行定性分析。我们知道没有一种模型是能解决所有问题的，具体问题需要具体分析。隔离是控制霍乱，斑疹伤寒，黄热病，结核病，麻疹，腮腺炎，口蹄疫等疾病传播的最有效方法之一。特别地，对于某些病毒性疾病和细菌性疾病，康复后的人们是没有永久性免疫力的。因此，研究 SIQS (易感–感染–隔离–易感)传染病模型[6]很有意义。

在建立模型时，我们需要认真考虑影响模型动态行为的因素，例如媒体报道，信息干预，发病率和环境干扰等。其中，发病率函数是医务人员单位时间内监测新增病例数的指标，在疾病研究中很值得重视。1993 年，Heesterbeek 和 Metz 推导了以下饱和接触率[7]

$$C(N)=\frac{bN}{1+bN+\sqrt{1+2bN}},$$

容易看出 $C(N)$ 是关于 N 的非递减函数，而 $\frac{C(N)}{N}$ 是关于 N 的非递增函数。与双线性和标准发病率相比，该发病率函数的优势在于考虑了总人口的行为变化、避免了无限的接触率，同时它也被广泛用于研究疾病。例如，马知恩等人[8]研究了具有饱和接触率的 SEIR 流行病模型的全局动力学，他们证明了平衡解的全局稳定性；蓝桂杰等人[9]考虑了具有饱和接触率的 SIS 流行病模型，并显示了确定性模型的动力学以及随机解的平稳分布和灭绝。受以上文章的启发，本文考虑具有上述定义的饱和接触率的 SIQS 模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=A-\mu S(t)-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{h(N(t))}+\gamma I(t)+\rho Q(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta S(t)I(t)}{h(N(t))}-(\mu+\mu_1+\delta+\gamma)I(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}=\delta I(t)-(\mu+\mu_2+\rho)Q(t).\end{cases}\tag{1}$$

这里$h(N)=1+bN+\sqrt{1+2bN}$，总人口N被分为三类且$N=S+I+Q$。S是易感人群的数量，I是受感染人群的数量，Q是被隔离人群的数量。A是由于出生或移民等原因导致的招募率；μ是人口的自然死亡率；β表示单位时间内由于人与人接触造成的感染率；γ和ρ分别是$I(t)$和$Q(t)$恢复并重新进入$S(t)$的速率；μ_1和μ_2分别是感染和隔离个体的因病死亡率；δ是$I(t)$中直接被隔离进入$Q(t)$的隔离率。通常假定模型中所有参数均为非负数。我们利用再生矩阵[10]的方法可以推出系统(1)的基本再生数为

$R_0=\dfrac{\beta A}{\mu(\mu+\mu_1+\delta+\gamma)h\left(\dfrac{A}{\mu}\right)}$，再根据[9]中的理论可知系统(1)具有以下特性：当$R_0<1$，无病平衡点$E_0=\left(\dfrac{A}{\mu},0,0\right)$是全局渐近稳定的；否则无病平衡点不稳定。此外，当且仅当$R_0>1$时，系统有唯一的地方病平衡点E^*且是局部渐近稳定的。

实际上，任何系统都不可避免地会受到环境白噪声的影响。因此，研究随机流行病模型比单纯地研究确定性模型更可靠。作为模型(1)的扩展，我们通过用$\beta+\sigma\mathrm{d}B(t)$替换参数$\beta$来引入随机效应，其中$B(t)$定义在全概率空间$(\Omega,F,\mathrm{P})$上，其过滤子$\{F_t\}_{t\ge0}$满足通常条件(即它不断增加且右连续，$F_0$包含P中所有空集)，$\sigma^2$是环境白噪声的强度。故随机SIQS模型描述如下：

$$\begin{cases}\mathrm{d}S(t)=\left(A-\mu S(t)-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{h(N(t))}+\gamma I(t)+\rho Q(t)\right)\mathrm{d}t-\dfrac{\sigma S(t)I(t)}{h(N(t))}\mathrm{d}B(t),\\ \mathrm{d}I(t)=\left(\dfrac{\beta S(t)I(t)}{h(N(t))}-(\mu+\mu_1+\delta+\gamma)I(t)\right)\mathrm{d}t+\dfrac{\sigma S(t)I(t)}{h(N(t))}\mathrm{d}B(t),\\ \mathrm{d}Q(t)=\left(\delta I(t)-(\mu+\mu_2+\rho)Q(t)\right)\mathrm{d}t.\end{cases}\tag{2}$$

2. 预备知识

在本节中，我们介绍一些已知的符号、定义、引理和关于随机微分方程的一些基本理论，用于后面解决问题。首先，我们定义$\mathbb{R}_+^3=\{x_i>0,\ i=1,2,3\}$和$\mathbb{R}_+=(0,\infty)$。对于$[0,+\infty)$上的可积函数$\chi$，令

$$\langle\chi(t)\rangle=\frac{1}{t}\int_0^t\chi(s)\mathrm{d}s。$$

定义2.1 如果$\liminf_{t\to\infty}\langle I(t)\rangle>0$ a.s.，则系统(2)被认为具有持久性。

引理2.2 令$g\in C([0,\infty)\times\Omega,\mathbb{R}_+)$和$G\in C([0,\infty)\times\Omega,\mathbb{R})$。如果对于所有$t\ge0$，存在两个实数$\lambda_0\ge0$和$\lambda>0$使得

$$\ln g(t)\ge\lambda_0 t-\lambda\int_0^t g(s)\mathrm{d}s+G(t)\text{ 和 }\lim_{t\to\infty}\frac{G(t)}{t}=0\ \text{ a.s.,}$$

则$\liminf_{t\to\infty}\langle g(t)\rangle\ge\dfrac{\lambda_0}{\lambda}$ a.s.。

接下来，我们介绍一些与平稳马尔可夫过程有关的内容。通常，考虑n维随机微分方程

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),t)\mathrm{d}t+\sum_{r=1}^n g_r(x(t),t)\mathrm{d}B_r(t),\quad\forall t\ge t_0,\tag{3}$$

初始值为$x(t_0)=x_0\in\mathbb{R}^n$。$B(t)$是定义在全概率空间$(\Omega,F,\mathrm{P})$上的$n$维标准布朗运动。根据随机微分方

程的定义，方程(3)等效于以下随机积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f\left(x(s),s\right)\mathrm{d}s+\sum_{r=1}^{n}\int_{t_0}^{t} g_r\left(x(s),s\right)\mathrm{d}B_r(s),\quad \forall t\geq t_0. \tag{4}$$

引理 2.3 假设向量 $f(x,t),g_1(x,t),\cdots,g_n(x,t)\ \ \left(t\geq t_0,x\in\mathbb{R}^n\right)$ 是 (x,t) 的连续函数，并且是独立的，则对于某些常数 B，以下条件在 $U_G\ (\forall G>0)$ 中均成立：

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad \left|f(x,t)-f(y,t)\right|+\sum_{r=1}^{n}\left|g_r(x,t)-g_r(y,t)\right|\leq B|x-y|;\\ &\text{(ii)}\quad \left|f(x,t)\right|+\sum_{r=1}^{n}\left|g_r(x,t)\right|\leq B\left(1+|x|\right);\end{aligned} \tag{5}$$

并且在 $\mathbb{R}^n$ 中存在具有以下性质的函数 $V(x)\in C^2$，

$$V(x)\geq 0 \text{ 和 } \sup_{|x|>G} LV(x)=-M_G\to-\infty \text{ as } G\to\infty, \tag{6}$$

其中 C^2 表示 $\mathbb{R}^n$ 中关于 x 是两次连续可微的函数类。进一步假设至少有一个 $x\in\mathbb{R}^n$ 使得过程 $X^x(t)$ 是正规的，则系统(4)存在一个解是平稳马尔可夫过程。

注 1. 条件(5)可以由系统(4)解的全局存在来代替(根据[11]的注释 5)。

注 2. 条件(6)可以用较弱的条件 $LV(x)\leq -1$ 来代替(请参见[12]的第 4 章)。

3. 全局正解的存在唯一性

定理 3.1 对于任何给定的初始值 $X(0)=\left(S(0),I(0),Q(0)\right)\in\mathbb{R}_+^3$，当 $t\geq 0$ 时，模型(2)存在唯一解 $X(t)=\left(S(t),I(t),Q(t)\right)$ 并且该解以 1 为概率存在于 $\mathbb{R}_+^3$ 中。

证明：由于系统(2)的系数满足局部 Lipschitz 条件，那么对于任何初始值 $X(0)\in R_+^3$，系统(2)在 $[0,\tau_e)$ 上具有唯一的局部解 $X(t)$，其中 τ_e 是爆破时间。为了验证这个解是全局的，我们只需要证明 $\tau_e=\infty$ a.s.。现在让 $k_0>0$ 足够大使得 $X(t)$ 属于区间 $\left[\frac{1}{k_0},k_0\right]^3$ 内。对于每个 $k\geq k_0$ 的整数，将停时 τ_k 定义为

$$\tau_k=\inf\left\{t\in[0,\tau_e):\min\left\{S(t),I(t),Q(t)\right\}\leq\frac{1}{k},\ \max\left\{S(t),I(t),Q(t)\right\}\geq k\right\}。$$

令 $\inf\varnothing=\infty$ ($\varnothing$ 表示空集)。显然 τ_k 随着 k 的增加是递增的。令 $\tau_\infty=\lim_{k\to\infty}\tau_k$，则 $\tau_\infty\leq\tau_k$。如果 $\tau_\infty=\infty$ a.s. 是合理的，那么 $\tau_e=\infty$ a.s.。假设这个陈述是假的，那么存在一对常数 $T>0$ 和 $\varepsilon\in(0,1)$ 使得 $\mathbb{P}(\tau_\infty\leq T)>\varepsilon$。因此，存在一个整数 $k_1\geq k_0$ 使得 $\mathbb{P}(\tau_k\leq T)>\varepsilon,\forall k\geq k_1$。

定义 C^2 函数 V：$\mathbb{R}_+^3\to\mathbb{R}$ 为

$$V(S,I,Q)=(S-1-\ln S)+(I-1-\ln I)+(Q-1-\ln Q).$$

运用伊藤公式，我们可得

$$\mathrm{d}V(S,I,Q)\triangleq LV\mathrm{d}t-\frac{\sigma(S-I)}{h(N)}\mathrm{d}B,$$

这里

$$
\begin{aligned}
LV &= \left(1-\frac{1}{S}\right)\left(A-\mu S-\frac{\beta SI}{h(N)}+\gamma I+\rho Q\right)+\frac{\sigma^2 I^2}{2h^2(N)}+\left(1-\frac{1}{I}\right)\left(\frac{\beta SI}{h(N)}-(\mu+\mu_1+\delta+\gamma)I\right) \\
&\quad +\frac{\sigma^2 S^2}{2h^2(N)}+\left(1-\frac{1}{Q}\right)\left(\delta I-(\mu+\mu_2+\rho)Q\right) \\
&\le A+\frac{\beta I}{h(N)}+3\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\mu_2+\rho+\frac{\sigma^2 I^2}{2h^2(N)}+\frac{\sigma^2 S^2}{2h^2(N)} \\
&\le A+\frac{\beta N}{h(N)}+3\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\mu_2+\rho+\frac{\sigma^2 N^2}{2h^2(N)}+\frac{\sigma^2 N^2}{2h^2(N)} \\
&\le A+\frac{\beta}{b}+3\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\mu_2+\rho+\frac{\sigma^2}{b^2} \\
&\triangleq K.
\end{aligned}
$$

并且 K 是一个正常数。从而，

$$
\mathrm{d}V(S,I,Q)\le K\mathrm{d}t-\frac{\sigma(S-I)}{h(N)}\mathrm{d}B.
$$

对于任何 $k\ge k_0$，将上述不等式两边分别从 0 到 $\tau_k\wedge T$ 进行积分并取期望值

$$
\begin{aligned}
&EV\left(S(\tau_k\wedge T),I(\tau_k\wedge T),Q(\tau_k\wedge T)\right) \\
&\le V\left(S(0),I(0),Q(0)\right)+\int_0^{\tau_k\wedge T}K\mathrm{d}t \\
&\le V\left(S(0),I(0),Q(0)\right)+KT \\
&<\infty.
\end{aligned}
$$

设 $\Omega_k=\{\tau_k\le T\}$，则 $\mathbb{P}(\Omega_k)\ge\varepsilon$。注意，对于每个 $\omega\in\Omega_k$，$S(\tau_k,\omega),I(\tau_k,\omega),Q(\tau_k,\omega)$ 中至少有一个等于 k 或 $\frac{1}{k}$，因此

$$
\begin{aligned}
&V\left(S(0),I(0),Q(0)\right)+KT \\
&\ge \mathbb{P}(\tau_k\le T)\min\left\{k-1-\ln k,\frac{1}{k}-1-\ln\frac{1}{k}\right\} \\
&\ge \varepsilon\min\left\{k-1-\ln k,\frac{1}{k}-1-\ln\frac{1}{k}\right\}.
\end{aligned}
$$

让 $k\to\infty$，则

$$
\infty>V\left(S(0),I(0),Q(0)\right)+KT=\infty.
$$

这是矛盾的，因此我们有 $\tau_\infty=\infty$，即证。

注 3. 由于模型(2)具有唯一的全局正解,且总人口满足 $\left(A-(\mu+\mu_1+\mu_2)N\right)\mathrm{d}t\le\mathrm{d}N\le(A-\mu N)\mathrm{d}t$。这表明 $\Gamma=\left\{(S,I,Q)\in\mathbb{R}_+^3:\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\le N\le\frac{A}{\mu}\right\}$ 是系统(2)的正不变集，即如果 $X(0)\in\Gamma$，那么对于任意 $t\ge0$，$X(t)\in\Gamma$ a.s.。从生物意义上讲，我们只考虑有界集 Γ 中系统(2)的疾病动态行为。

4. 疾病的灭绝及持续存在

随机模型中，我们关注的是噪声扰动下的灭绝与持久。在确定模型中，我们知道基本再生数 R_0 是确

定疾病状态的阈值。自然地，联想到随机模型的动态行为可以用某个阈值控制吗？下面我们就讨论这个问题并定义相应的随机阈值如下所示：

$$R_0^s=\frac{\beta A}{\mu\left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\frac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)h\left(\frac{A}{\mu}\right)}.$$

定理 4.1 对任意 $X(0)\in\Gamma$，令系统(2)的一个解为 $X(t)=(S(t),I(t),Q(t))$，则

(I) 当 $R_0^s<1$ 且 $\sigma^2\le\frac{\beta\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)}{A}$ 时，则

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln I(t)}{t}\le\left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\frac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)\left(R_0^s-1\right)<0\ \text{ a.s.},$$

(II) 当 $\sigma^2>\max\left\{\frac{\beta\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)}{A},\frac{\beta^2}{2(\mu+\mu_1+\delta+\gamma)}\right\}$，则

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln I(t)}{t}\le\frac{\beta^2}{2\sigma^2}-(\mu+\mu_1+\delta+\gamma)<0\ \text{ a.s.},$$

这意味着 $I(t)$ 将指数趋于零，即疾病会消失。此外，

$$\lim_{t\to\infty}\langle S(t)\rangle=\frac{A}{\mu}\quad\text{a.s.},$$
$$\lim_{t\to\infty}\langle Q(t)\rangle=0\quad\text{a.s..}$$

证明： 由题意可知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\ln I(t)&=\left[\frac{\beta S}{h(N)}-(\mu+\mu_1+\delta+\gamma)-\frac{\sigma^2S^2}{2h^2(N)}\right]\mathrm{d}t+\frac{\sigma S}{h(N)}\mathrm{d}B\\&=\varphi\left(\frac{S}{h(N)}\right)\mathrm{d}t+\frac{\sigma S}{h(N)}\mathrm{d}B,\end{aligned}\tag{7}$$

这里 $\varphi(x)=-\frac{\sigma^2x^2}{2}+\beta x-(\mu+\mu_1+\delta+\gamma)$。

假设(I)成立。注意 $\varphi(x)$ 在 $x\in\left[0,\frac{\beta}{\sigma^2}\right]$ 上是单调递增的并且 $\sigma^2\le\frac{\beta\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)}{A}$，我们可得

$$0<\frac{S}{h(N)}\le\frac{N}{h(N)}\le\frac{A}{\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)}\le\frac{\beta}{\sigma^2}.$$

那么，

$$\mathrm{d}\ln I(t) \le \varphi\left(\frac{A}{\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)\mathrm{d}t + \frac{\sigma S}{h(N)}\mathrm{d}B.$$

上述不等式两边同时从 0 到 t 积分并除 t 得

$$\frac{\ln I(t)}{t} \le \frac{1}{t}\int_0^t \varphi\left(\frac{A}{\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)\mathrm{d}\theta + \frac{\ln I(0)}{t} + \frac{M(t)}{t}, \tag{8}$$

这里 $M(t) = \sigma\int_0^t \frac{S(\theta)}{h(N(\theta))}\mathrm{d}B(\theta)$。通过局部鞅的强大数定律，我们推出 $\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t} = 0$ a.s.。因为 $R_0^s < 1$，不等式(8)变为

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln I(t)}{t} \le \varphi\left(\frac{A}{\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right) = \frac{\beta A}{\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)} - (\mu+\mu_1+\delta+\gamma) - \frac{\sigma^2 A^2}{2\mu^2 h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}$$

$$= \left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\frac{\sigma^2 A^2}{2\mu^2 h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)\left(\frac{\beta A}{\mu\left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\frac{\sigma^2 A^2}{2\mu^2 h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)h\left(\frac{A}{\mu}\right)} - 1\right)$$

$$= \left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\frac{\sigma^2 A^2}{2\mu^2 h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)\left(R_0^s - 1\right) < 0 \quad \text{a.s..}$$

假设(II)成立，由等式(7)我们得到

$$\frac{\ln I(t)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t\left(\frac{\beta S}{h(N)} - (\mu+\mu_1+\delta+\gamma) - \frac{\sigma^2 S^2}{2h^2(N)}\right)\mathrm{d}\theta + \frac{\ln I(0)}{t} + \frac{M(t)}{t}$$

$$\le \frac{1}{t}\int_0^t\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{S(\theta)}{h(N(\theta))} - \frac{\beta}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{\beta^2}{2\sigma^2} - (\mu+\mu_1+\delta+\gamma)\right)\mathrm{d}\theta + \frac{\ln I(0)}{t} + \frac{M(t)}{t} \tag{9}$$

$$\le \frac{1}{t}\int_0^t\left(\frac{\beta^2}{2\sigma^2} - (\mu+\mu_1+\delta+\gamma)\right)\mathrm{d}\theta + \frac{\ln I(0)}{t} + \frac{M(t)}{t}.$$

因为 $\sigma^2 > \max\left\{\frac{\beta\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)}{A}, \frac{\beta^2}{2(\mu+\mu_1+\delta+\gamma)}\right\}$，不等式(9)变为

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln I(t)}{t} \le \frac{\beta^2}{2\sigma^2} - (\mu+\mu_1+\delta+\gamma) < 0 \text{ a.s..}$$

而且

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0 \text{ a.s..}$$

由系统(2)的前两个方程可得

$$\mathrm{d}(S+I) = \left(A - \mu S - (\mu+\mu_1+\delta)I + \rho Q\right)\mathrm{d}t,$$
$$\frac{\rho}{\mu+\mu_2+\rho}\mathrm{d}Q = \left(\frac{\rho\delta}{(\mu+\mu_2+\rho)}I - \rho Q\right)\mathrm{d}t.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\frac{(S(t)-S(0))}{t} + \frac{(I(t)-I(0))}{t} + \frac{\rho}{\mu+\mu_2+\rho}\frac{(Q(t)-Q(0))}{t} \\
&= A - \frac{\mu}{t}\int_0^t S(\theta)\mathrm{d}\theta - \frac{(\mu+\mu_1+\delta)}{t}\int_0^t I(\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{\rho\delta}{(\mu+\mu_2+\rho)t}\int_0^t I(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= A - \mu\langle S(t)\rangle - \left(\mu+\mu_1+\delta - \frac{\rho\delta}{(\mu+\mu_2+\rho)}\right)\langle I(t)\rangle \\
&= A - \mu\langle S(t)\rangle - \left(\mu+\mu_1 + \frac{\delta(\mu+\mu_2)}{(\mu+\mu_2+\rho)}\right)\langle I(t)\rangle.
\end{aligned}$$

且

$$\langle S(t)\rangle = \frac{A}{\mu} - \left(\frac{\mu+\mu_1}{\mu} + \frac{\delta(\mu+\mu_2)}{\mu(\mu+\mu_2+\rho)}\right)\langle I(t)\rangle + \frac{\psi(t)}{t}, \tag{10}$$

这里 $\frac{\psi(t)}{t} = \frac{1}{\mu}\left[-\frac{(S(t)-S(0))}{t} - \frac{(I(t)-I(0))}{t} - \frac{\rho}{(\mu+\mu_2+\rho)}\frac{(Q(t)-Q(0))}{t}\right]$。显然，$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t} = 0$ a.s.。故

$$\lim_{t\to\infty}\langle S(t)\rangle = \frac{A}{\mu} \quad \text{a.s..}$$

同理

$$\frac{(Q(t)-Q(0))}{t} = \frac{\delta}{t}\int_0^t I(\theta)\mathrm{d}\theta - \frac{\mu+\mu_2+\rho}{t}\int_0^t Q(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

且

$$\langle Q(t)\rangle = \frac{\delta}{\mu+\mu_2+\rho}\langle I(t)\rangle - \frac{(Q(t)-Q(0))}{(\mu+\mu_2+\rho)t}. \tag{11}$$

我们得到

$$\lim_{t\to\infty}\langle Q(t)\rangle = 0 \quad \text{a.s..}$$

定理 4.2 如果 $R_0^s > 1$，对任意 $X(0)\in\Gamma$，系统(2)的解 $X(t)=(S(t),I(t),Q(t))$ 是平均持久的。同时，我们可得

$$\liminf_{t\to\infty}\langle I(t)\rangle \ge I_* > 0,$$

$$\liminf_{t\to\infty}\left\langle \frac{A}{\mu}-S(t)\right\rangle \ge \left(\frac{\mu+\mu_1}{\mu}+\frac{\delta(\mu+\mu_2)}{\mu(\mu+\mu_2+\rho)}\right)I_* > 0,$$

$$\liminf_{t\to\infty}\langle Q(t)\rangle \ge \frac{\delta}{(\mu+\mu_2+\rho)}I_* > 0,$$

这里

$$I_* = \frac{\mu(\mu+\mu_2+\rho)\left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\dfrac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)h\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(R_0^s-1\right)}{\beta\left[(\mu+\mu_1)(\mu+\mu_2+\rho)+\delta(\mu+\mu_2)\right]}.$$

证明：因为 $X\in\Gamma$，由(7)可得

$$\ln I(t)-\ln I(0) \ge \frac{\beta}{h\left(\frac{A}{\mu}\right)}\int_0^t S(\theta)\mathrm{d}\theta-\left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\frac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)t+\int_0^t\frac{\sigma S(\theta)}{h(N(\theta))}\mathrm{d}B(\theta).$$

结合(10)得到

$$\begin{aligned}
\ln I(t) &\ge \frac{\beta}{h\left(\frac{A}{\mu}\right)}\left[\frac{A}{\mu}t-\frac{(\mu+\mu_1)(\mu+\mu_2+\rho)+\delta(\mu+\mu_2)}{\mu(\mu+\mu_2+\rho)}\int_0^t I(\theta)\mathrm{d}\theta\right] \\
&\quad -\left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\frac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)t+\phi(t) \\
&= \left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\frac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)\left(R_0^s-1\right)t \\
&\quad -\frac{\beta\left[(\mu+\mu_1)(\mu+\mu_2+\rho)+\delta(\mu+\mu_2)\right]}{\mu(\mu+\mu_2+\rho)h\left(\frac{A}{\mu}\right)}\int_0^t I(\theta)\mathrm{d}\theta+\phi(t),
\end{aligned}$$

这里 $\phi(t)=\ln I(0)+\int_0^t\frac{\sigma S(\theta)}{h(N(\theta))}\mathrm{d}B(\theta)+\frac{\beta\psi(t)}{h\left(\frac{A}{\mu}\right)}$。显然 $\lim_{t\to\infty}\frac{\phi(t)}{t}=0$ a.s.. 由引理 2.2 推出

$$\liminf_{t\to\infty}\langle I(t)\rangle \geq \frac{\mu(\mu+\mu_2+\rho)\left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\dfrac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)h\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(R_0^s-1\right)}{\beta\left[(\mu+\mu_1)(\mu+\mu_2+\rho)+\delta(\mu+\mu_2)\right]}=I_*>0 \ \text{ a.s..}$$

根据(10)和(11)，我们可得

$$\liminf_{t\to\infty}\left\langle \frac{A}{\mu}-S(t)\right\rangle=\left(\frac{\mu+\mu_1}{\mu}+\frac{\delta(\mu+\mu_2)}{\mu(\mu+\mu_2+\rho)}\right)\liminf_{t\to\infty}\langle I(t)\rangle \geq \left(\frac{\mu+\mu_1}{\mu}+\frac{\delta(\mu+\mu_2)}{\mu(\mu+\mu_2+\rho)}\right)I_*>0,$$

$$\liminf_{t\to\infty}\langle Q(t)\rangle=\frac{\delta}{(\mu+\mu_2+\rho)}\liminf_{t\to\infty}\langle I(t)\rangle \geq \frac{\delta}{(\mu+\mu_2+\rho)}I_*>0.$$

5. 平稳解的存在

定理 5.1 对任意 $X(0)\in\Gamma$，如果 $R_0^s>1$，系统(2)的解 $(S(t),I(t),Q(t))$ 是 $\mathbb{R}_+^3$ 上的一个平稳解。

证明：现在我们构建一个 C^2 函数 $H:\Gamma\to\mathbb{R}$ 如下

$$\begin{aligned}H(S,I,Q)&=M\left(-\ln I-l_1\ln S-l_2h^2(N)+\frac{4bl_2\mu_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)}{\mu+\mu_2+\rho}Q\right)-\ln S-\ln Q\\&\quad-\ln\left(N-\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)-\ln\left(\frac{A}{\mu}-N\right)\\&=MV_1+V_2+V_3+V_4+V_5,\end{aligned}$$

这里 $V_1=-\ln I-l_1\ln S-l_2h^2(N)+\dfrac{4bl_2\mu_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)}{\mu+\mu_2+\rho}Q$，$V_2=-\ln S$，$V_3=-\ln Q$，$V_4=-\ln\left(N-\dfrac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)$，

$V_5=-\ln\left(\dfrac{A}{\mu}-N\right)$，$l_1=\dfrac{\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\dfrac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}}{\mu}$，$l_2=\dfrac{\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\dfrac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}}{2Abh\left(\frac{A}{\mu}\right)}$ 并且正常数 M 满足以下条件

$$\begin{aligned}&-3M\left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\frac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)\left(\sqrt[3]{R_0^S}-1\right)+\frac{\beta A}{\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)}+\mu+\frac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\\&+\mu+\mu_2+\rho+\mu+\mu_1+\mu_2+\mu\leq -2.\end{aligned}$$

很容易看出 $H(S,I,Q)$ 是一个连续函数并且有最小值 $H(\hat{S},\hat{I},\hat{Q})$。那么我们定义一个非负 C^2 函数 V 如下：

$$L(S,I,Q)=H(S,I,Q)-H(\hat{S},\hat{I},\hat{Q}).$$

当 x,y,z 大于零时，利用不等式 $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$ 以及伊藤公式，我们得到

$$LV_1=-\frac{1}{I}\left(\frac{\beta SI}{h(N)}-(\mu+\mu_1+\delta+\gamma)I\right)+\frac{\sigma^2S^2}{2h^2(N)}-\frac{l_1}{S}\left(A-\mu S-\frac{\beta SI}{h(N)}+\gamma I+\rho Q\right)+\frac{l_1\sigma^2I^2}{2h^2(N)}$$

$$-2bl_2h(N)\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+2bN}}\right)(A-\mu N-\mu_1I-\mu_2Q)+\frac{4bl_2\mu_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)}{\mu+\mu_2+\rho}(\delta I-(\mu+\mu_2+\rho)Q)$$

$$\le-\frac{\beta S}{h(N)}-\frac{l_1A}{S}-2Abl_2h(N)+\left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\frac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)$$

$$+l_1\mu+\frac{l_1\beta I}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+\frac{l_1\sigma^2I^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+2Abl_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)$$

$$+2bl_2\mu_1h(N)\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+2bN}}\right)I+2bl_2\mu_2h(N)\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+2bN}}\right)Q$$

$$+\frac{4b\delta l_2\mu_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)}{\mu+\mu_2+\rho}I-4bl_2\mu_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)Q$$

$$\le-3\sqrt[3]{2A^2b\beta l_1l_2}+3\left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\frac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)$$

$$+\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4bl_2\mu_1h\left(\frac{A}{\mu}\right)+\frac{4b\delta l_2\mu_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)}{\mu+\mu_2+\rho}\right)I+\frac{l_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}I^2$$

$$=-3\left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\frac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)\left(\sqrt[3]{R_0^S}-1\right)$$

$$+\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4bl_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)I$$

$$+\frac{l_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}I^2.$$

同理，

$$LV_2=-\frac{A}{S}+\mu+\frac{\beta I}{h(N)}-\gamma\frac{I}{S}-\rho\frac{Q}{S}+\frac{\sigma^2 I^2}{2h^2(N)}\le-\frac{A}{S}+\mu+\frac{\beta A}{\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)}+\frac{\sigma^2 A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)},$$

$$LV_3=-\delta\frac{I}{Q}+\mu+\mu_2+\rho,$$

$$LV_4=-\frac{A-\mu N-\mu_1 I-\mu_2 Q}{N-\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}}=\mu+\mu_1+\mu_2-\frac{\mu_1(S+Q)+\mu_2(S+I)}{N-\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}},$$

$$LV_5=\frac{A-\mu N-\mu_1 I-\mu_2 Q}{\frac{A}{\mu}-N}=\mu-\frac{\mu_1 I+\mu_2 Q}{\frac{A}{\mu}-N}.$$

因此，

$$\begin{aligned}LV\le&-3M\left(\mu+\mu_1+\delta+\gamma+\frac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}\right)\left(\sqrt[3]{R_0^S}-1\right)+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4bl_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)I\\&+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}I^2-\frac{A}{S}+\mu+\frac{\beta A}{\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)}+\frac{\sigma^2A^2}{2\mu^2h^2\left(\frac{A}{\mu}\right)}-\delta\frac{I}{Q}+\mu+\mu_2+\rho+\mu+\mu_1+\mu_2\\&-\frac{\mu_1(S+Q)+\mu_2(S+I)}{N-\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}}+\mu-\frac{\mu_1I+\mu_2Q}{\frac{A}{\mu}-N}\\\le&-2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4bl_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)I+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}I^2-\frac{A}{S}-\delta\frac{I}{Q}\\&-\frac{\mu_1(S+Q)+\mu_2(S+I)}{N-\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}}-\frac{\mu_1I+\mu_2Q}{\frac{A}{\mu}-N}.\end{aligned}$$

下面考虑一个有界闭集

$$D_\varepsilon=\left\{(S,I,Q)\in\Gamma:\varepsilon\le S\le\frac{A}{\mu},\varepsilon\le I\le\frac{A}{\mu},\varepsilon^2\le Q\le\frac{A}{\mu},\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}+\varepsilon^3\le Q\le\frac{A}{\mu}-\varepsilon^3\right\},$$

这里 $0<\varepsilon<1$ 是使得以下不等式均成立的一个充分小的正常数。

$$-2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4l_2bh\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)\frac{A}{\mu}+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}\left(\frac{A}{\mu}\right)^2-\frac{A}{\varepsilon}\le-1,\qquad(12)$$

$$-2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4l_2bh\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)\varepsilon+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}\varepsilon^2\le -1, \tag{13}$$

$$-2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4l_2bh\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)\frac{A}{\mu}+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}\left(\frac{A}{\mu}\right)^2-\frac{\delta}{\varepsilon}\le -1, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&-2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4l_2bh\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)\frac{A}{\mu}\\&+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}\left(\frac{A}{\mu}\right)^2-\frac{\mu_1\varepsilon+\mu_2\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\le -1,\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&-2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4l_2bh\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)\frac{A}{\mu}\\&+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}\left(\frac{A}{\mu}\right)^2-\frac{\mu_1\left(\varepsilon+\varepsilon^2\right)+\mu_2\left(\varepsilon+\varepsilon\right)}{\varepsilon^3}\le -1.\end{aligned} \tag{16}$$

为了方便，我们将 $\Gamma\setminus D_\varepsilon$ 分为五个区域

$$D_1=\left\{(S,I,Q)\in\Gamma,0<S<\varepsilon\right\},\qquad D_2=\left\{(S,I,Q)\in\Gamma,0<I<\varepsilon\right\},$$

$$D_3=\left\{(S,I,Q)\in\Gamma,I\ge\varepsilon,0<Q<\varepsilon^2\right\},\quad D_4=\left\{(S,I,Q)\in\Gamma,S\ge\varepsilon,I\ge\varepsilon,Q\ge\varepsilon^2,\frac{A}{\mu}-\varepsilon^3<N<\frac{A}{\mu}\right\},$$

$$D_5=\left\{(S,I,Q)\in\Gamma,S\ge\varepsilon,I\ge\varepsilon,Q\ge\varepsilon^2,\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}<N<\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}+\varepsilon^3\right\}.$$

显然 $\Gamma\setminus D_\varepsilon=D_1\cup\cdots\cup D_5$。接下来我们将证明对任意 $(S,I,Q)\in\Gamma\setminus D_\varepsilon$，都有 $LV(S,I,Q)\le -1$。

Case 1: 如果 $(S,I,Q)\in D_1$，从(12)可知

$$\begin{aligned}LV&\le -2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4bl_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)I+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}I^2-\frac{A}{S}\\&\le -2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4l_2bh\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)\frac{A}{\mu}+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}\left(\frac{A}{\mu}\right)^2-\frac{A}{\varepsilon}\\&\le -1.\end{aligned}$$

Case 2: 如果 $(S,I,Q)\in D_2$，(13)表示

$$LV\le -2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4bl_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)I+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}I^2$$

$$\le -2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4l_2bh\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)\varepsilon+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}\varepsilon^2$$

$$\le -1.$$

Case 3: 如果 $(S,I,Q)\in D_3$，则有

$$LV\le -2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4bl_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)I+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}I^2-\delta\frac{I}{Q}$$

$$\le -2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4l_2bh\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)\frac{A}{\mu}+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}\left(\frac{A}{\mu}\right)^2-\frac{\delta}{\varepsilon}$$

$$\le -1.$$

Case 4: 如果 $(S,I,Q)\in D_4$，可得

$$\begin{aligned}LV\le& -2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4bl_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)I\\&+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}I^2-\frac{\mu_1I+\mu_2Q}{\frac{A}{\mu}-N}\\\le& -2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4l_2bh\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)\frac{A}{\mu}\\&+\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}\left(\frac{A}{\mu}\right)^2-\frac{\mu_1\varepsilon+\mu_2\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\\\le& -1.\end{aligned}$$

Case 5: 如果 $(S,I,Q)\in D_5$，则有

$$
\begin{aligned}
LV \le & -2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4bl_2h\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)I \\
& +\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}I^2-\frac{\mu_1(S+Q)+\mu_2(S+I)}{N-\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}} \\
\le & -2+M\left(\frac{l_1\beta}{h\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}+4l_2bh\left(\frac{A}{\mu}\right)\left(\mu_1+\frac{\delta\mu_2}{\mu+\mu_2+\rho}\right)\right)\frac{A}{\mu} \\
& +\frac{Ml_1\sigma^2}{2h^2\left(\frac{A}{\mu+\mu_1+\mu_2}\right)}\left(\frac{A}{\mu}\right)^2-\frac{\mu_1(\varepsilon+\varepsilon^2)+\mu_2(\varepsilon+\varepsilon)}{\varepsilon^3} \\
\le & -1.
\end{aligned}
$$

综上所述

$$LV(S,I,Q)\le -1 \quad \text{for } \forall (S,I,Q)\in \Gamma \setminus D_{\varepsilon},$$

根据引理 2.3，我们可以得到系统(2)的解是平稳马尔可夫过程。

6. 数值模拟

模型动态行为的理论研究已经完成了。为了说明理论结果的有效性，我们使用 Milstein 方法[13]对模型进行数值模拟。

例 6.1 在图 1 中，我们假设 $A=0.9$，$\beta=0.5$，$b=0.5$，$\gamma=0.1$，$\rho=0.2$，$\mu_1=0.2$，$\delta=0.15$，$\mu_2=0.15$，$(S(0),I(0),Q(0))=(3,3,3)$。以下情况的差异在于参数 μ 和白噪声强度 σ 的不同。首先，我们选择 $\mu=0.09$ 和 $\sigma=0$ 使得 $R_0=0.9938<1$，故无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的，这一点可由(a)支撑。然后我们将白噪声的强度增加到 $\sigma=0.3$，在这种情况下，$R_0^S=0.9488<1$ 且 $\sigma^2-\frac{\beta\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)}{A}=-0.3758<0$，根据定理 4.1 的条件(I)，我们知道被感染的种群 $I(t)$ 灭绝，这与模拟结果(b)一致。最后，我们选择 $\mu=0.05$ 和 $\sigma=0.7$，计算得 $\sigma^2-\frac{\beta\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)}{A}=0.0911>0$，$\sigma^2-\frac{\beta^2}{2(\mu+\mu_1+\delta+\gamma)}=0.4275>0$。根据定理 4.1 的条件(II)，疾病灭绝，请参阅(c)。

例 6.2 在图 2 中，我们选择 $A=0.9$，$\mu=0.05$，$\beta=0.5$，$b=0.5$，$\gamma=0.1$，$\rho=0.3$，$\mu_1=0.15$，$\delta=0.1$，$\mu_2=0.1$，$(S(0),I(0),Q(0))=(4,1,1)$ 并以环境噪声强度 $\sigma=0.05$ 开始我们的数值模拟。容易验证 $R_0=1.5670>1$ 和 $R_0^S=1.5649>1$，由此可知疾病将流行，模拟运行的结果在(a)中显示。然后我们将 σ 增加到 0.1（$R_0=1.5670>1$ 以及 $R_0^S=1.5588>1$），在(b)中给出仿真。与(a)相比，随着噪声变大，模型(2)的随机解的波动越来越大。

例 6.3 在保持图 2 中参数不变的情况下，很容易知道满足平稳分布的存在条件。图 3 和图 4 分别给出了 $\sigma=0.05$，$\sigma=0.1$ 下易感，感染和隔离人群的概率密度分布直方图。正如我们所见，随着 σ 的增加，正态分布曲线变得更平坦并且数据分布更加分散。也就是说，噪声强度对平稳分布的统计影响很大。

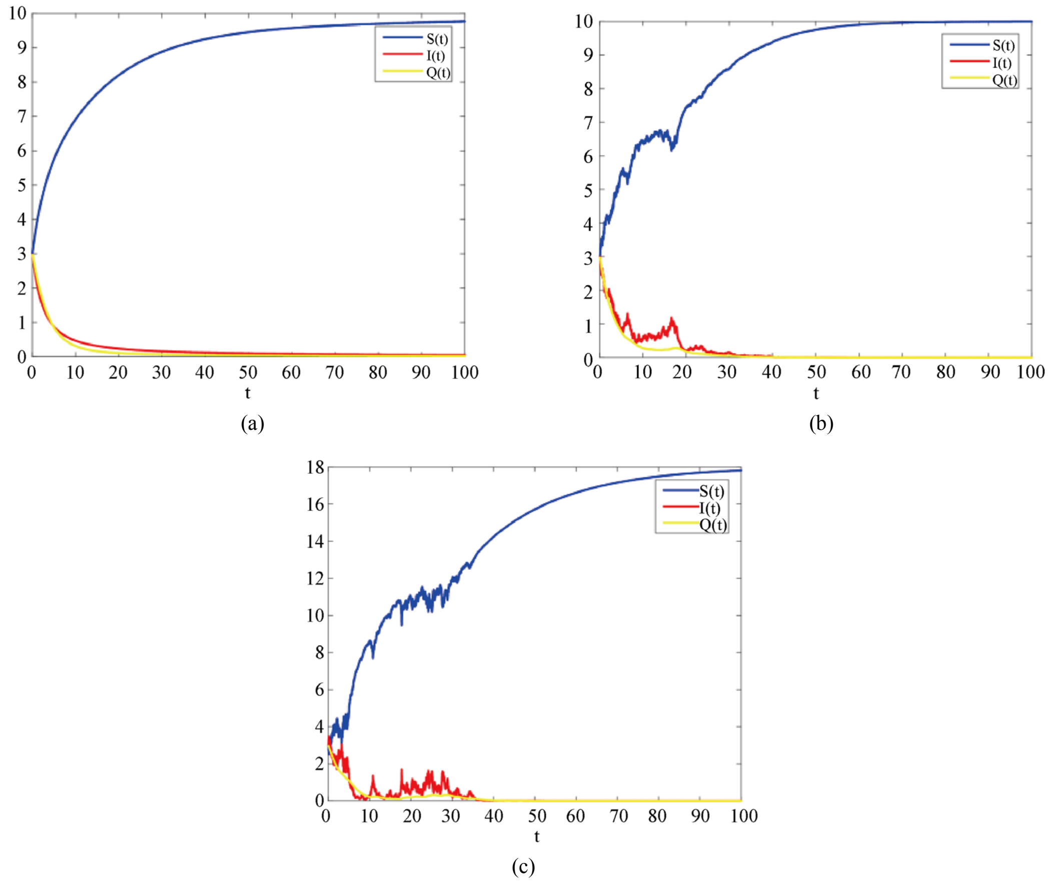

Figure 1. (a) is the path of $S(t), I(t), Q(t)$ for deterministic model (1) when $R_0 < 1$. (b) and (c) are the paths of $S(t), I(t), Q(t)$ for stochastic model (2) with sufficiently small or large enough noise, respectively

图 1. (a)是当 $R_0 < 1$ 时，确定模型(1)中 $S(t), I(t), Q(t)$ 的路径。(b)和(c)分别是针对具有足够小或足够大噪声的随机模型(2)中 $S(t), I(t), Q(t)$ 的路径

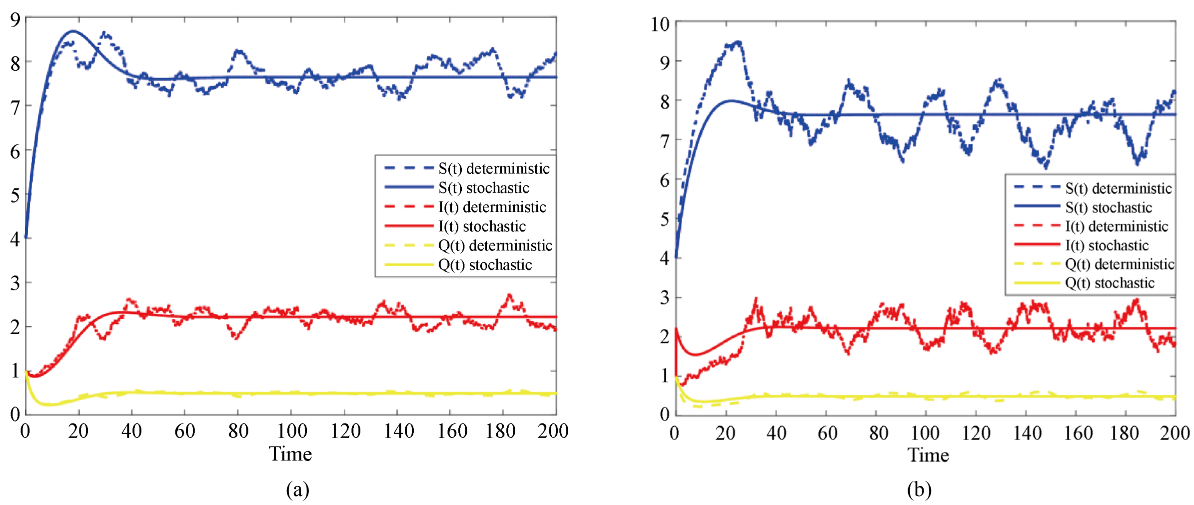

Figure 2. (a) and (b) are the asymptotic behavior of the solution of stochastic model (2) around the endemic equilibrium E^* of model (1) under different noise intensities

图 2. (a)和(b)是在不同噪声强度下，随机解在确定模型的地方性平衡点 E^* 附近的渐近行为

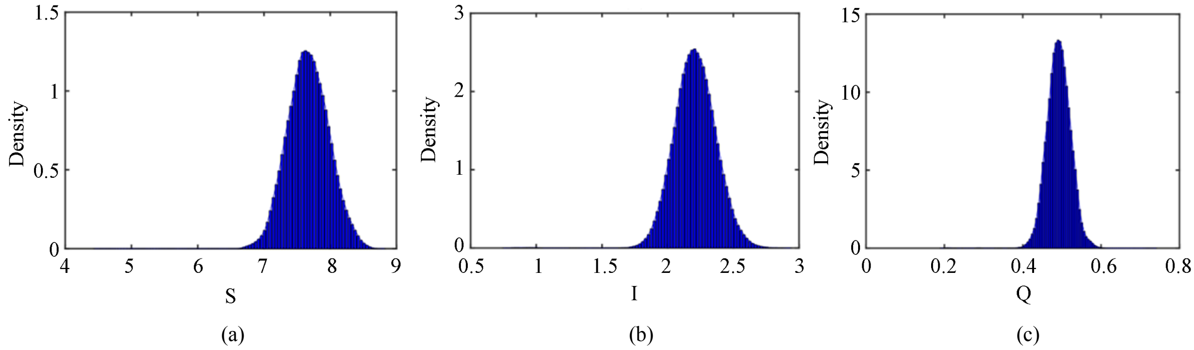

Figure 3. The path of $S(t), I(t), Q(t)$ for the histogram of the probability density function with the parameter $\sigma = 0.05$

图 3. 在参数 $\sigma = 0.05$ 时，$S(t), I(t), Q(t)$ 的概率密度函数分布直方图

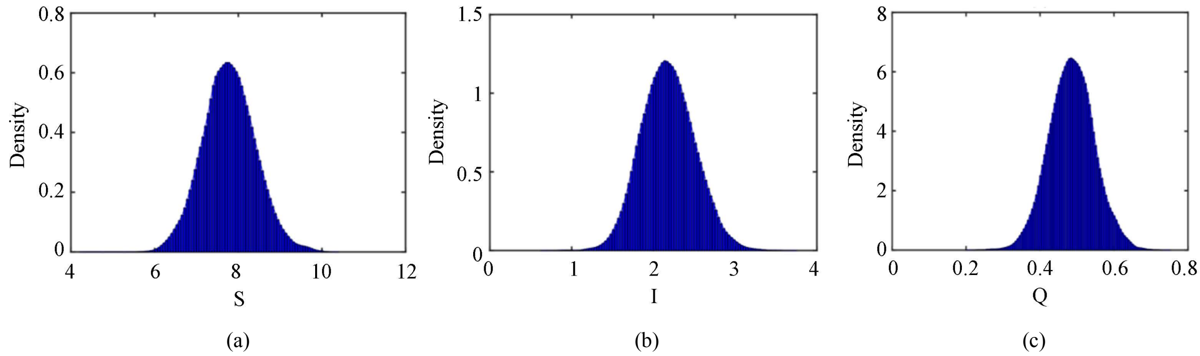

Figure 4. The path of $S(t), I(t), Q(t)$ for the histogram of the probability density function with the parameter $\sigma = 0.1$

图 4. 在参数 $\sigma = 0.1$ 时，$S(t), I(t), Q(t)$ 的概率密度函数分布直方图

7. 总结

在这项工作中，我们研究了没有永久免疫力随机 SIQS 流行病模型的动态行为。该模型吸引人的一个特点是引入了饱和接触率，意味着考虑了总人口随时间的变化，这比仅考虑疾病传播中常用的双线性形式和标准形式的发病率更真实，也更有趣。我们首先使用李雅普诺夫函数的方法来证明全局正解的存在性和唯一性。其次，通过建立一个重要参数 R_0^S 来研究随机阈值的动力学，包括疾病在人群中的灭绝和持久性。最后，证明系统存在平稳分布，这又间接地表明该疾病将流行。

还有一些有趣的问题值得进一步研究，例如，媒体报道和电报噪音可能会影响疾病的传播。我们将这些问题留给以后的工作。

参考文献

[1] Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. (1991) Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics-I. *Bulletin of Mathematical Biology*, **53**, 33-55. https://doi.org/10.1016/S0092-8240(05)80040-0

[2] Liu, Q. and Chen, Q.M. (2015) Analysis of the Deterministic and Stochastic SIRS Epidemic Models with Nonlinear Incidence. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **428**, 140-153. https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.01.075

[3] Meng, X.Z., Zhao, S.N., Feng, T. and Zhang, T.H. (2016) Dynamics of a Novel Nonlinear Stochastic SIS Epidemic Model with Double Epidemic Hypothesis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **433**, 227-242. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.07.056

[4] Liu, Q., Jiang, D.Q. and Shi, N.Z. (2017) Stationary Distribution and Extinction of a Stochastic SEIR Epidemic Model

with Standard Incidence. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **476**, 58-69. https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.02.028

[5] Lan, G.J., Chen, Z.W., Wei, C.J. and Zhang, S.W. (2018) Stationary Distribution of a Stochastic SIQR Epidemic Model with Saturated Incidence and Degenerate Diffusion. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **511**, 61-77. https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.07.041

[6] Chen, Y.L., Wen, B.Y. and Teng, Z.D. (2018) The Global Dynamics for a Stochastic SIS Epidemic Model with Isolation. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **492**, 1604-1624. https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.11.085

[7] Heesterbeek, J. and Metz, J. (1993) The Saturating Contact Rate in Marriage and Epidemic Models. *Journal of Mathematical Biology*, **31**, 529-539. https://doi.org/10.1007/BF00173891

[8] Zhang, J. and Ma, Z.E. (2003) Global Dynamics of an SEIR Epidemic Model with Saturating Contact Rate. *Mathematical Biosciences*, **185**, 15-32. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(03)00087-7

[9] Lan, G.J., Chen, Z.W., Wei, C.J. and Zhang, S.W. (2019) A Stochastic SIS Epidemic Model with Saturating Contact Rate. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **529**, Article ID: 121504. https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.121504

[10] Driessche, P.V.D. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Subthreshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **180**, 29-48. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6

[11] Xu, D., Huang, Y. and Yang, Z. (2009) Existence Theorems for Periodic Markov Process and Stochastic Functional Differential Equations. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **24**, 1005-1023. https://doi.org/10.3934/dcds.2009.24.1005

[12] Hasminskii, R.Z. (1980) Stochastic Stability of Differential Equations. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn.

[13] Higham, D.J. (2001) An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, **43**, 525-546. https://doi.org/10.1137/S0036144500378302