

Some 3-Color Ramsey Numbers $R(C_4, C_4, K_{1,n})$ for Small n

Min Liu, Xuemei Zhang

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: liumin3580@163.com

Received: Nov. 7th, 2019; accepted: Nov. 22nd, 2019; published: Nov. 29th, 2019

Abstract

For k given graphs $G_1, G_2, \dots, G_k, k \geq 2$, the k -color Ramsey number, denoted by $R(G_1, G_2, \dots, G_k)$, is the smallest integer p such that if we arbitrarily color the edges of a complete graph of order p with k colors, then it always contains a monochromatic copy of G_i colored with i , for some $1 \leq i \leq k$. Let C_4 be a cycle of length 4 and $K_{1,n}$ a star of order $n+1$. Zhang *et al.* [1] show that $R(C_4, C_4, K_{1,n}) \leq n + \lceil 4\sqrt{4n+5} \rceil + 3$ for all n and the upper bound can be attained for some n . In this paper, making use of a computer to construct some extremal graphs, we will determine some new values of three-color Ramsey numbers $R(C_4, C_4, K_{1,n})$ for $n = 7, 8, 9, 10$, especially when $n = 7$ the above general upper bound is attained again.

Keywords

Three-Color Ramsey Numbers, Edge Colorings, Four Cycles, Stars

关于小数 n 的若干 3-色 Ramsey 数 $R(C_4, C_4, K_{1,n})$

刘敏, 张雪梅

浙江师范大学, 数学与计算机科学学院, 浙江 金华
Email: liumin3580@163.com

收稿日期: 2019年11月7日; 录用日期: 2019年11月22日; 发布日期: 2019年11月29日

摘要

对于给定的图 $G_1, G_2, \dots, G_k, k \geq 2$, k -色 Ramsey 数 $R(G_1, G_2, \dots, G_k)$ 是最小的正整数 p , 使得对 p 阶完全图

进行任意的 k -边着色, 总是存在某个着 i 色的单色图 G_i , 其中 $1 \leq i \leq k$ 。设 C_4 是长度为4的圈, $K_{1,n}$ 是 $n+1$ 阶的星。张雪梅等[1]证明: 对任意 n 有 $R(C_4, C_4, K_{1,n}) \leq n + \lceil 4\sqrt{4n+5} \rceil + 3$, 并且给出该上界可达的某 n 。本文借助计算机构造极值图, 确定了四个新的3-色Ramsey数, 即 $n = 7, 8, 9, 10$ 时 $R(C_4, C_4, K_{1,n})$ 的确切值, 尤其当 $n = 7$ 时, 该值恰好也达到了上面的上界。

关键词

3-色Ramsey数, 边染色, 4-圈, 星

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文研究的图均为无向的简单图, 且大多数术语均是标准的, 可以在很多书本上看到, 例如[2], 设 $G = (V(G), E(G))$, 其点集和边集分别为 $V(G)$ 和 $E(G)$, 并 $v(G)$ 和 $e(G)$ 分别表示图 G 的阶数和边数。设 $v \in V(G)$, $N(v)$ 表示点 v 的邻点集合, $d(v) = |N(v)|$ 表示点 v 的度, 并称 v 为一个 $d(v)$ -点。用 $(d_1, d_2, \dots, d_t)_v$ 表示 t -点 v 的度序列, 其中 d_1, d_2, \dots, d_t 为点 v 各个邻点的度。类似, k^+ -点表示度数大于等于 k 的点。而 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示 G 的最大度和最小度。对 $A \subseteq V(G)$, 我们记 $N_A(v) = N(v) \cap A$, 而 $d_A(v) = |N_A(v)|$ 即为 v 在 A 中的邻点的个数。设 $S \subseteq E(G)$, 记 $G[S]$ 为由 S 生成的 G 的支撑子图 $(V(G), S)$ 。记长度为 m 的圈为 C_m , 记 $n+1$ 阶星和 N 阶完全图分别为 $K_{1,n}$ 和 K_N 。

对于给定的图 $G_1, G_2, \dots, G_k, k \geq 2$, k -色Ramsey数 $R(G_1, G_2, \dots, G_k)$ 是最小的正整数 p , 使得对 p 阶完全图 K_p 进行任意的 k -边着色, 总是存在某个着 i 色的单色图 G_i , 其中 $1 \leq i \leq k$ 。如果 K_N 的一个 k -边着色不包含任意 i 色的单色图 $G_i, 1 \leq i \leq k$, 那么称 K_N 是可 (G_1, G_2, \dots, G_k) -边着色的, 并将这种着色方案下的 k -边着色完全图 K_N 称为 (G_1, G_2, \dots, G_k) -图。设 $N = R(G_1, G_2, \dots, G_k) - 1$, 如果完全图 K_N 被赋予一个 (G_1, G_2, \dots, G_k) -边着色, 那么称它为 (G_1, G_2, \dots, G_k) -Ramsey图。显然, 它是相对于Ramsey数 $R(G_1, G_2, \dots, G_k)$ 的一个极值图。类似的, 如果图 G 的一个 k -边着色不包含任意 i 色的单色图 $G_i, 1 \leq i \leq k$, 那么称 G 是可 (G_1, G_2, \dots, G_k) -边着色的。

Ramsey数 $R(G_1, G_2, \dots, G_k)$ 的确定是一个NP-Hard问题。至今, 虽然关于2-色Ramsey数的研究结果比较丰富, 精确值的确定也非常多, 但涉及的图类相对比较少。至于3-色及3-色以上的 k -色Ramsey数的研究结果目前并不多, 精确值确定的图类更少而少之。对图类的Ramsey数研究方法比较常见的数学方法有概率方法[3][4]和数学归纳法[5][6]。概率方法一般是对于一些阶数较大的图给出相应的Ramsey数的上下界比较有效。数学归纳法一般用于Ramsey图成功构造的基础上进行的Ramsey数的确定, 此时往往 N 阶起的Ramsey图用组合法容易构造, 但小阶图的构造还是要踏踏实实的, 纯人工构造小图的极图需要大量的尝试且需要一定的运气, 然而幸运往往不够, 对此, 需要借助计算机。例如, 孙永奇等利用计算机和数学归纳法相结合的方法确定了 $R(C_4, C_4, C_n)$ 的值, 可见文献[6][7][8]。但是, 一般情况我们确定一个Ramsey数 $R(G_1, G_2, \dots, G_k)$ 的确切值都很难, 更不要提确定某些图类对应的Ramsey数, 其原因很大程度上是我们遇到的图类其Ramsey图往往不能通过常规的组合法得以成功构造。这时, 对于阶数不大的图, 我们可采用的方法: 用数学方法对图的结构性质进行分析的基础上, 再借助计算机帮助来

构造需要的 Ramsey 图。

本论文我们仅关注若干 3-色 Ramsey 数 $R(C_4, C_4, K_{1,n})$ 。为了方便, 当我们考虑 3-边着色图 G 时, 默认其边被红蓝绿三色所着色。设 $v \in V(G)$, 我们用 $N_r(v)$, $N_b(v)$ 和 $N_g(v)$ 分别表示 v 通过红边, 蓝边和绿边相邻的邻点集合, 并且记 $d_r(v) = |N_r(v)|$, $d_b(v) = |N_b(v)|$ 以及 $d_g(v) = |N_g(v)|$ 。设 E_r , E_b 和 E_g 分别表示为红色, 蓝色和绿色的边集合, 当然 $G[E_r]$, $G[E_b]$, $G[E_g]$ 分别表示由红边, 蓝边, 绿边导出的子图。

2019 年张雪梅等人不仅给出了 $R(C_4, C_4, K_{1,n})$ 的一个一般的上界, 而且, 确定了某特殊类型 n 的 Ramsey 数 $R(C_4, C_4, K_{1,q^2-q})$ 的精确值, 可见文献[1]。

定理 1 [1] 对所有的 n , 都有 $R(C_4, C_4, K_{1,n}) \leq n + \lceil \sqrt{4n+5} \rceil + 3$ 。如果 $n = l^2 - l$, 其中 $l \geq 2$, 那么 $R(C_4, C_4, K_{1,n}) \leq l^2 + l + 2 = n + \lceil \sqrt{4n+5} \rceil + 2$ 。

定理 2 [1] 对所有的素数幂 q , 都有 $R(C_4, C_4, K_{1,q^2-q}) = q^2 + q + 2$ 。

2-色 Ramsey 数 $R(C_4, K_{1,n})$ 的研究要追溯到上世纪 80 年代, 即使现在仍然是热点, 但相应极值图的构造都尚未找到一般组方法, 至于 3-色 Ramsey 数 $R(C_4, C_4, K_{1,n})$ 的极值图的构造就更没有一般组方法。定理 2 证明中的极值图的构造用的是代数方法。除此之外, 仅为当 $n = 1, 3, 4, 5$ 时(注意当 $n = 2, 6$ 时为定理 2 的两个特例) $R(C_4, C_4, K_{1,n})$ 被确定, 它们的极值图通过人工方法构造而得, 可见文献[1]。

定理 3 [1]

n	1	2	3	4	5	6
$R(C_4, C_4, K_{1,n})$	6	8	9	11	13	14

在本文中, 我们希望对小数 n 借助计算机寻找极值图, 从而可以确定更多的 $R(C_4, C_4, K_{1,n})$ 的值。我们所得结果如下:

定理 4 当 $n = 7, 8, 9, 10$ 时, $R(C_4, C_4, K_{1,n}) = n + 9$ 。

对于定理 1 中一般的上界 $n + \lceil \sqrt{4n+5} \rceil + 3$, 张雪梅等人仅找到 $n = 5$ 时 $R(C_4, C_4, K_{1,n})$ 可以达该上界。由定理 4, 显然, 当 $n = 7$ 时, $R(C_4, C_4, K_{1,n})$ 也取到该上界, 再一次说明上界 $n + \lceil \sqrt{4n+5} \rceil + 3$ 是紧的。

定理 4 的证明请参看本文的第 3 节, 而第 2 节给出一些已知或易证引理, 为定理[DL1]的证明做准备。

2. 一些引理

Turán 数 $ex(k, C_4)$ 表示不包含 C_4 的 k 阶图能达到的最大边数。 $T(k)$ 是由所有不包含 C_4 且边数最大即边数为 $ex(k, C_4)$ 的 k 阶图全体组成的集合。众所周知, Reiman 在 1958 年证明了

$ex(k, C_4) < \frac{1}{4}k(1 + \sqrt{4k-3})$, 即给出了 $ex(k, C_4)$ 的一个一般上界, 可见文献[9]。Turán 数 $ex(k, C_4)$ 精确值的确定工作是非常艰巨的, 即使对于小数 k 的情形。1989 年 Clapham 等人确定了 $k \leq 21$ 时 $ex(k, C_4)$ 的值, 并给出 $T(k)$ 的刻画, 可见文献[10]。当然, 到目前为止对于小数 k 已经有更多的 $ex(k, C_4)$ 的值被确定。这里我们仅列出我们需要的 $ex(k, C_4)$ 的值, 以及 $T(k)$ 的情况。

引理 1 [10]

k	14	15	16	17	18	19	20
$ex(k, C_4)$	27	30	33	36	39	42	46

引理 2 [10]

N	14	15	16	17	18	19
$ T(k) $	1	2	2	1	1	5

而且, $T(15)$ 中仅有 2 种非同构图, 且均为 4-正则图。另外, $T(16)$ 中仅有 2 种非同构图如图 1 所示, 显然, $T(16)$ 中的图的所有 5-点组成的集合恰为唯一的 3-点的邻域。

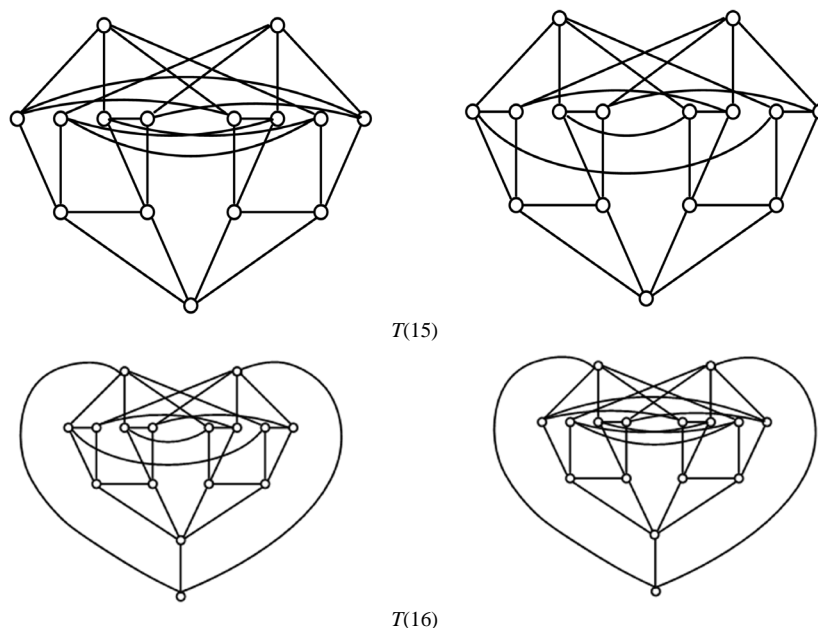


Figure 1. $T(15)$, $T(16)$: Graphs with the maximum number of edges without 4-cycles of order 15, 16
图 1. $T(15)$, $T(16)$: 不含 4-圈的边数最大 15, 16 阶图

2019 年张雪梅等人给出了 Turán 数 $ex(p, C_4)$ 和 Ramsey 数 $R(C_4, C_4, K_{1,n})$ 的一个关系, 可见文献[1], 借助该关系我们确定定理 4 中 Ramsey 数的一个上界。

引理 3 [1] $ex(p, C_4) < \frac{1}{4}p(p-n)$, 则 $R(C_4, C_4, K_{1,n}) \leq p$ 。

为了确定定理 4 中 Ramsey 数的一个下界, 我们分析 $(C_4, C_4, K_{1,n})$ -图的结构性质时, 还需要下面两个引理。

引理 4 设红蓝黄 3-边着色的完全图 K_N 为 $(C_4, C_4, K_{1,n})$ -图, 则

$$\frac{N(N-n)}{2} \leq e(K_N[E_r]) + e(K_N[E_b]) \leq 2ex(N, C_4)。$$

证明 因为 $K_N[E_r]$ 和 $K_N[E_b]$ 都不包含 4-圈, 所以 $e(K_N[E_r])$ 和 $e(K_N[E_b])$ 都不超过 $ex(N, C_4)$, 于是 $e(K_N[E_r]) + e(K_N[E_b]) \leq 2ex(N, C_4)$ 。另一方面, 因为 $K_{1,n} \subseteq K_N[E_g]$, 所以 $\Delta(K_N[E_g]) \leq n-1$, 于是 $\delta(K_N[E_r \cup E_b]) \geq (N-1) - (n-1) = N-n$ 。因此, $e(K_N[E_r]) + e(K_N[E_b]) = e(K_N[E_r \cup E_b]) \geq \frac{N(N-n)}{2}$ 。

综上所述, $\frac{N(N-n)}{2} \leq e(K_N[E_r]) + e(K_N[E_b]) \leq 2ex(N, C_4)$ 。□

引理 5 设 G 为不包含 4-圈的图, $v \in V(G)$ 。则

$$v(G) \geq 1 + \sum_{u \in N(v)} d(u) - 2 \frac{d(v)}{2}. \tag{1}$$

证明 对任意的 $u \in N(v)$, 设 $A_u = N(u) \setminus N[v]$ 其中 $N[v] = \{v\} \cup N(v)$ 。因为 $C_4 \not\subseteq G$, 显然对任意 $u, u' \in N(v)$ 有 $N(u) \cap N(u') = \{v\}$, 于是 $A_u \cap A_{u'} = \emptyset$ 。因此 $N[v]$ 以及 $A_u, u \in N(v)$ 为 $V(G)$ 的一些不交子集。于是

$$v(G) \geq 1 + d(v) + \sum_{u \in N(v)} |A(u)|. \tag{2}$$

另外, 由 $C_4 \not\subseteq G$, 显然对任意 $u \in N(v)$ 有 $|N(u) \cap N(v)| \leq 1$, 即 $d_{N[v]}(u) \leq 1$, 于是 $d_{N[v]}(u) \leq 2$ 。而且, 如果 $d(v)$ 为奇数, 即 v 为顶点集 $N[v]$ 在 G 中的导出子图 $G[N[v]]$ 的一个奇度点, 由于任意图的奇度点数必为偶数, 故存在某 $u \in N(v)$ 满足 $d_{N[v]}(u)$ 为奇数, 从而该点满足 $d_{N[v]}(u) = 1$ 。因此对任意 $u \in N(v)$ 有 $|A_u| = d(u) - d_{N[v]}(u) \geq d(u) - 2$, 而且, 如果 $d(v)$ 为奇数, 存在某 $u \in N(v)$ 满足 $|A_u| = d(u) - d_{N[v]}(u) = d(u) - 1$ 。于是, 结合不等式(1), 我们立即得到不等式(2)。□

由引理 5 容易知道下列引理 6 成立。

引理 6 设 G 为不包含 4-圈的图, $|V(G)|=16, |E(G)|=32$, 则 G 中有 3-点和 5-点, 则 3-点一定与 5-点相邻。

3. 主要结果的证明

定理 1 的证明: 设 $n = 7, 8, 9, 10, p = n + 9, N = p - 1 = n + 8$ 。

先证明 $R(C_4, C_4, K_{1,n}) \leq p = n + 9$ 。由引理 1 可知 $ex(16, C_4) = 33, ex(17, C_4) = 36, ex(18, C_4) = 39, ex(19, C_4) = 42$ 。容易验证 $(p, n) = (16, 7), (17, 8), (18, 9), (19, 10)$ 均满足不等式 $ex(p, C_4) < \frac{1}{4} p(p - n)$ 。于是, 由引理 3, $R(C_4, C_4, K_{1,n}) \leq p = n + 9$ 。

下面我们将证明 $R(C_4, C_4, K_{1,n}) \geq p = n + 9$ 。为此, 我们需要构造一个 $N = n + 8$ 阶的 $(C_4, C_4, K_{1,n})$ -图。换言之, 我们将用红色, 蓝色和绿色定义 K_N 的一个 3-边着色, 使得 $C_4 \not\subseteq K_N[E_r], C_4 \not\subseteq K_N[E_b], K_{1,n} \not\subseteq K_N[E_g]$ 。在此, 我们将借助计算机构造我们需要的 Ramsey 图。如果直接使用计算机构造, 运行时间将会较长。我们采用的策略是在数学方法分析图结构的基础上利用计算机辅助构造 Ramsey 图, 即先对 $(C_4, C_4, K_{1,n})$ -边着色完全图 K_N 的结构进行分析, 尽可能的确定 $K_N[E_r], K_N[E_b], K_N[E_g]$ 的结构特性, 比如边数, 最大度等; 然后使用计算机辅助我们寻找需要的 Ramsey 图。

设 $V(K_N) = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 。我们将对完全图 K_N 进行红蓝绿三色边着色: 先依次用两个 Lingo 程序确定完全图 K_N 的红边集 E_r 和蓝边集 E_b , 最后, 剩余的边组成绿边集 E_g 。Lingo 程序 1 的目的: 寻找红边集 E_r 使得 $K_N[E_r]$ 满足边数为 m_1 , 最大度为 d_1 且不含 4-圈的图。Lingo 程序 2 的目的: 在红边集的补集 $\overline{E_r}$ 中寻找蓝边集 E_b 使得 $K_N[E_b]$ 满足边数为 m_2 , 最大度为 d_2 且不含 4-圈的图。

设 $K_N[E_r]$ 的邻接矩阵为 X , 其第 i 行第 j 列的元素为 $x(i, j)$ 。 $K_N[E_b]$ 的邻接矩阵为 Y , 其第 i 行第 j 列的元素为 $y(i, j)$ 。于是, $x(i, j), y(i, j)$ 赋值如下:

$$x(i, j) = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E_r \\ 0 & v_i v_j \notin E_r \end{cases}$$

$$y(i, j) = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E_b \\ 0 & v_i v_j \notin E_b \end{cases}$$

程序 1

```

sets:
zb/1..N/;
link(zb,zb):X;
endsets
@for(link(i,j):x(i,j)=x(j,i));
@for(zb(i):x(i,i)=0);
@for(link:@bin(x));
@sum(link(i,j)|i\#j:x(i,j))=2m1;
@for(zb(i):@sum(zb(j):x(i,j))<=d1);
@for(link(i,j):@for(link(m,n)|~i\#ne\#j\#~and~\#i\#ne\#m\#~and~\#i\#ne\#n\#~and~\#j\#ne\#m\#~
~and~\#j\#ne\#n\#~and~\#m\#ne\#n:
x(i,j)+x(j,m)+x(m,n)+x(i,n)<=3;x(i,j)+x(j,n)+x(n,m)+x(m,i)<=3;x(i,m)+x(m,j)+x(j,n)+x(n,i)<=3));

```

根据程序 1 输出 $K_N[E_r]$ 的邻接矩阵 X 。如果在程序 1 的结果中 $x(s,t)=1$, 那么在程序 2 中限制 $y(s,t)=0$ 。

程序 2

```

sets:
zb/1..N/;
link(zb,zb):Y;
endsets
@for(link(i,j):y(i,j)=y(j,i));
@for(zb(i):y(i,i)=0);
@for(link:@bin(y));
@sum(link(i,j)|i\#j:y(i,j))=2m2;
@for(zb(i):@sum(zb(j):y(i,j))<=d2);
@for(link(i,j):@for(link(m,n)|~i\#ne\#j\#~and~\#i\#ne\#m\#~and~\#i\#ne\#n\#~and~\#j\#ne\#m\#~
~and~\#j\#ne\#n\#~and~\#m\#ne\#n:
y(i,j)+y(j,m)+y(m,n)+y(i,n)<=3;y(i,j)+y(j,n)+y(n,m)+y(m,i)<=3;y(i,m)+y(m,j)+y(j,n)+y(n,i)<=3));
y(s,t)=0;

```

根据程序 2 输出 $K_N[E_b]$ 的邻接矩阵 Y 。

设 K_N 为一个红蓝绿 3-边着色的完全图。如果 $\delta(K_N[E_r \cup E_b]) \geq 8$, 那么 $\Delta(K_N[E_g]) = N - 1 - \delta(K_N[E_r \cup E_b]) \leq N - 9$, 所以 $K_{N-8} \not\subseteq K_N[E_g]$ 。反之亦然。于是, 下面断言是显然。

断言 1 设 $N = n + 8$, K_N 是一个依次经过程序 1 和程序 2 获得红蓝绿 3-边着色的完全图。则 K_N 是一个 $(C_4, C_4, K_{1,n})$ -完全图的充分必要条件是 $\delta(K_N[E_r \cup E_b]) \geq 8$ 。

下面, 对于 $n = 7, 8, 9, 10$, 我们将依次分析相应 $(C_4, C_4, K_{1,n})$ -完全图 K_N 中 $K_N[E_r]$ 和 $K_N[E_b]$ 的结构性质。根据文献, 对 $N = n + 8 = 15, 16, 17, 18$, 不含 4-圈且边数最大的图的全体集合 $T(N)$ 是完全确定的。因此, 在分析 $K_N[E_r]$ 和 $K_N[E_b]$ 的结构时, 先分析它们是否可以属于 $T(N)$ 。也就是说, 根据 $e(K_N[E_r])$ 和 $e(K_N[E_b])$ 的值, 将从大到小分情况进行讨论 $K_N[E_r]$ 和 $K_N[E_b]$ 应具备的结构性质。最终, 在结构分析的基础上, 利用计算机程序 1 和程序 2 成功构建所需的 N 阶 $(C_4, C_4, K_{1,n})$ -完全图。

情形 1. 当 $n = 7$ 时, $N = 15$ 。由引理 1 和引理 4 可知 $60 \leq e(K_{15}[E_r]) + e(K_{15}[E_b]) \leq 2ex(15, C_4) = 60$,

显然, $K_{15}[E_r], K_{15}[E_b] \in T(15)$ 。由引理 2, $K_{15}[E_r], K_{15}[E_b]$ 均为 15 阶的 4-正则图。我们使用 Lingo 程序 1 和程序 2 可寻找到不含 4-圈的 4-正则图, $K_{15}[E_r], K_{15}[E_b]$, 如图 2 所示。显然, $K_{15}[E_r] \cup K_{15}[E_b]$ 是一个 8-正则图。由断言 1, 我们获得一个 15 阶 $(C_4, C_4, K_{1,7})$ -完全图。因此, $R(C_4, C_4, K_{1,7}) \geq 16$ 。

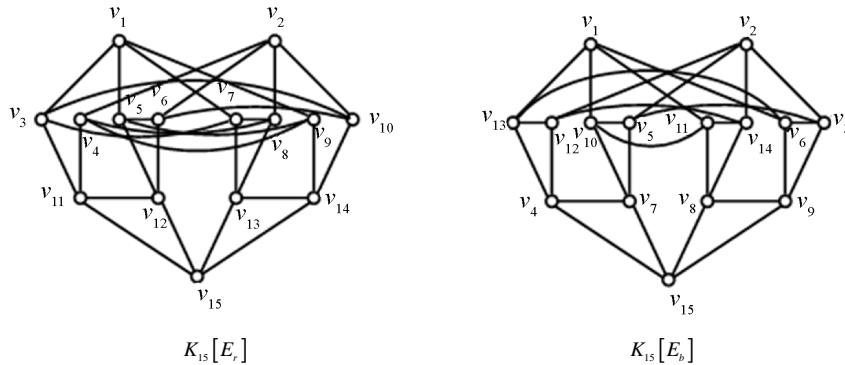


Figure 2. $K_{15}[E_r] \cup K_{15}[E_b]$: A 8-regular graph of 15 order with edge coloring

图 2. $K_{15}[E_r] \cup K_{15}[E_b]$: 一个 15 阶可 (C_4, C_4) -边着色的 8-正则图

情形 2. 当 $n=8$ 时, $N=16$ 。由引理 1 和引理 4 可知 $64 \leq e(K_{16}[E_r]) + e(K_{16}[E_b]) \leq 2ex(16, C_4) = 66$ 。

情形 2.1. 假设 $K_{16}[E_r], K_{16}[E_b]$ 中存在之一属于 $T(16)$, 不妨设 $K_{16}[E_r] \in T(16)$ 。由引理 2, $K_{16}[E_r]$ 中有 3 个 5-点, 1 个 3-点, 其余点均为 4-点, 而且唯一 3-点的邻域恰好为 5-点组成的集合。不妨令 $d_r(v_1) = 3, d_r(v_2) = d_r(v_3) = d_r(v_4) = 5$ 且 $N_r(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$ 。因此, $N_b(v_1) \subseteq V(K_{16}) \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 即在 $K_{16}[E_b]$ 中 v_1 的任意邻点 u 都满足 $d_r(u) = 4$ 。于是, 由 $\delta(K_{16}[E_r] \cup K_{16}[E_b]) \geq 8$ (参看断言 1) 知, $d_b(v_1) \geq 5$ 且点 v_1 在 $K_{16}[E_b]$ 中所有邻点的度 ≥ 4 。由引理 5,

$$v(K_{16}[E_b]) \geq 1 + 4d_b(v_1) - 2 \left\lfloor \frac{d_b(v_1)}{2} \right\rfloor = 1 + 2 \left\lfloor \frac{3d_b(v_1)}{2} \right\rfloor \geq 1 + 2 \left\lfloor \frac{3 \times 5}{2} \right\rfloor = 17, \text{ 与 } v(K_{16}[E_b]) = 16 \text{ 矛盾。}$$

情形 2.2. 设 $K_{16}[E_r], K_{16}[E_b]$ 都不属于 $T(16)$, 此时 $e(K_{16}[E_r]) = e(K_{16}[E_b]) = 32$ 。显然 $K_{16}[E_r], K_{16}[E_b]$ 的平均度皆为 4。再结合引理 1 知, 此时 $K_{16}[E_r] \cup K_{16}[E_b]$ 是一个 8-正则图。

假设 $\delta(K_{16}[E_r]) \leq 1$ 。不妨令 v 为 $K_{16}[E_r]$ 的最小度点。于是, $e(K_{16}[E_r] \setminus \{v\}) \geq 32 - 1 = 31$ 。也就是说, 我们得到一个不包含 4-圈且边数大于等于 31 的 15 阶图, 与引理 5 中 $ex(15, C_4) = 30$ 矛盾。

假设 $\delta(K_{16}[E_r]) = 2$ 。不妨设 v 为 $K_{16}[E_r]$ 的最小度点, 即 $d_r(v) = 2$ 。于是, $e(K_{16}[E_r] \setminus \{v\}) = 32 - 2 = 30 = ex(15, C_4)$ 。所以, $K_{16}[E_r] \setminus \{v\} \in T(15)$, 由引理 2, $K_{16}[E_r] \setminus \{v\}$ 是一个 4-正则图。因此 $K_{16}[E_r]$ 中有 1 个 2-点, 2 个 5-点, 其他点均 4-点。又因为 $K_{16}[E_r] \cup K_{16}[E_b]$ 是一个 8-正则图, 故 $K_{16}[E_b]$ 中有 1 个 6-点, 2 个 3-点, 其他点均 4-点。于是, v 满足 $d_b(v) = 6$ 且在 $K_{16}[E_b]$ 中的度序列为 $(3^+, 3^+, 4, 4, 4, 4)$ 。由引理 5, $v(K_{16}[E_r]) \geq 1 + 2 \times 3 + 4 \times 4 - 2 \times \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor = 17$, 与 $v(K_{16}[E_b]) = 16$ 矛盾。

设 $\delta(K_{16}[E_r]) = 3$ 。假设 $K_{16}[E_r]$ 中仅有 1 个 3-点, 由 $K_{16}[E_r]$ 的平均度皆为 4, 此时 $K_{16}[E_r]$ 中有 1 个 3-点, 1 个 5-点, 其他点均 4-点。不妨令 $d_r(u) = 3, d_r(v) = 5$ 。由引理 6, $vu \in E_r$ 。否则, 5-点 v 的每个邻点的度都为 4。由引理 5, $v(K_{16}[E_r]) \geq 1 + 5 \times 4 - 2 \times \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 17$, 与 $v(K_{16}[E_r]) = 16$ 矛盾。另一方面, 由 $K_{16}[E_r] \cup K_{16}[E_b]$ 是一个 8-正则图, 此时 $K_{16}[E_b]$ 中有 3-点 $v, 5$ -点 u , 其他点均 4-点。同理有 $vu \in E_b$ 。故而 $vu \in E_r \cap E_b = \emptyset$ 。矛盾!

因此, $e(K_{16}[E_r]) = e(K_{16}[E_b]) = 32$, $K_{16}[E_r] \cup K_{16}[E_b]$ 是一个 8 正则图, $\delta(K_{16}[E_r]) = 3$ 且 $K_{16}[E_r]$ 中至少有 2 个 3-点。在此条件下, 根据 Lingo 程序 1 和 Lingo 程序 2 构造图 $K_{16}[E_r], K_{16}[E_b]$ 如图 3 所示。由断言 1, 我们获得一个 16 阶 $(C_4, C_4, K_{1,8})$ -完全图。因此, $R(C_4, C_4, K_{1,8}) \geq 17$ 。

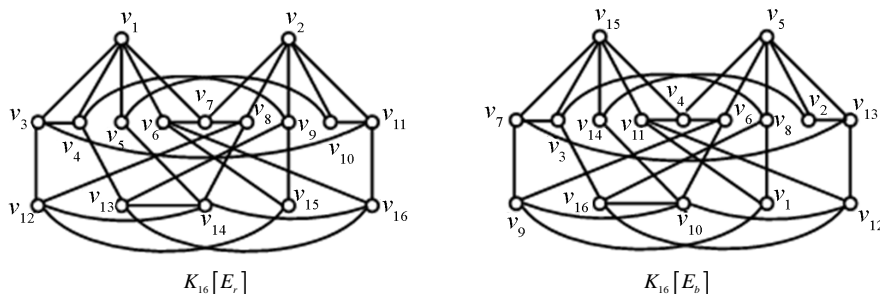


Figure 3. $K_{16}[E_r] \cup K_{16}[E_b]$: A 8-regular graph of 16 order with edge coloring

图 3. $K_{16}[E_r] \cup K_{16}[E_b]$: 一个 16 阶可 (C_4, C_4) -边着色的 8-正则图

情形 3. 当 $n = 9$ 时, $N = 17$ 。由引理 1 和引理 4 可知 $68 \leq e(K_{17}[E_r]) + e(K_{17}[E_b]) \leq 2ex(17, C_4) = 72$ 。

设 $K_{17}[E_r], K_{17}[E_b] \in T(17)$, 即 $e(K_{17}[E_r]) = e(K_{17}[E_b]) = 36$ 。由引理 2, 可知 $T(17)$ 只有一种结构。见图 4, 根据 Lingo 程序 1 和程序 2 构造同构图 $K_{17}[E_r], K_{17}[E_b]$ 如图 5 所示。

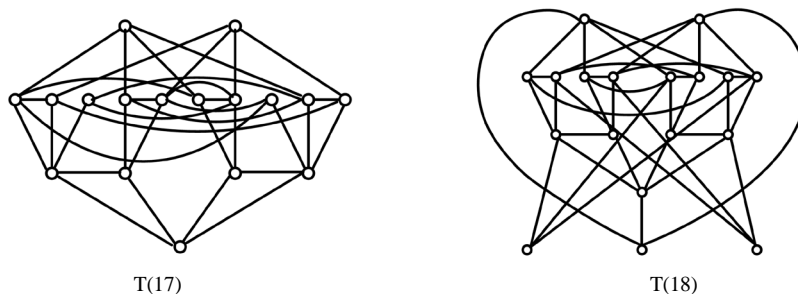


Figure 4. $T(17), T(18)$: Graphs with the maximum number of edges without 4-cycles of order 17 and 18

图 4. $T(17), T(18)$: 不含 4-圈的边数最大的 17 阶图和 18 阶图

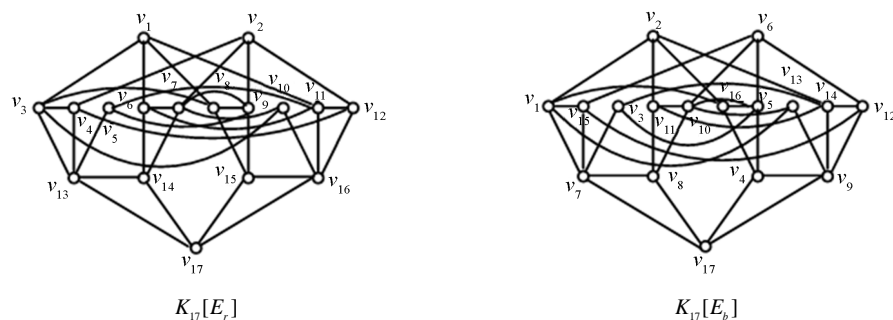


Figure 5. $K_{17}[E_r] \cup K_{17}[E_b]$: A graph of 17 order with edge coloring

图 5. $K_{17}[E_r] \cup K_{17}[E_b]$: 一个 17 阶可 (C_4, C_4) -边着色的图

根据图 5 可以列出点 $v_i, 1 \leq i \leq 17$ 分别在 $K_{17}[E_r], K_{17}[E_b]$ 中的度, 如表 1 所示。易检验每点 v_i 满足 $d_r(v_i) + d_b(v_i) \geq 8$, 由断言 1, 我们获得一个 17 阶 $(C_4, C_4, K_{1,9})$ -完全图。因此, $R(C_4, C_4, K_{1,9}) \geq 18$ 。

Table 1. The degrees of v_i in $K_{17}[E_r], K_{17}[E_b]$, $1 \leq i \leq 17$

表 1. v_i 在 $K_{17}[E_r], K_{17}[E_b]$ 的度数, $1 \leq i \leq 17$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}
$d_r(v_i)$	4	4	5	4	3	4	5	4	5	3	5	4	5	4	4	5	4
$d_b(v_i)$	5	4	3	4	5	4	5	4	5	5	4	4	3	5	4	4	4

情形 4. 当 $n = 10$ 时, $N = 18$ 。由引理 1 和引理 4 可知 $72 \leq e(K_{18}[E_r]) + e(K_{18}[E_b]) \leq 2ex(18, C_4) = 78$ 。

设 $K_{18}[E_r], K_{18}[E_b] \in T(18)$, 即 $e(K_{18}[E_r]) = e(K_{18}[E_b]) = 39$ 。由引理 2 可知 $T(18)$ 只有一种结构。根据 Lingo 程序 1 和程序 2 构造同构图 $K_{18}[E_r], K_{18}[E_b]$ 如图 6 所示。根据图 6 可以列出点 $v_i, 1 \leq i \leq 18$ 分别在 $K_{18}[E_r], K_{18}[E_b]$ 中的度, 如表 2 所示。易检验每点 v_i 满足 $d_r(v_i) + d_b(v_i) \geq 8$, 由断言 1, 我们获得一个 18 阶 $(C_4, C_4, K_{1,10})$ -完全图。因此, $R(C_4, C_4, K_{1,10}) \geq 19$ 。

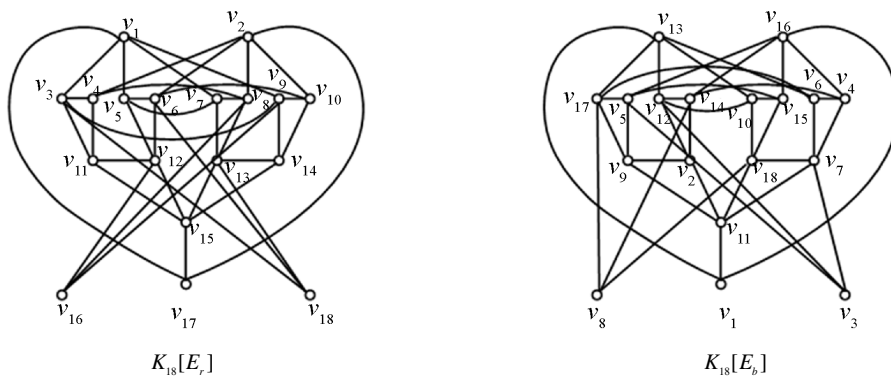


Figure 6. $K_{18}[E_r] \cup K_{18}[E_b]$: A graph of 18 order with edge coloring

图 6. $K_{18}[E_r] \cup K_{18}[E_b]$: 一个 18 阶可 (C_4, C_4) -边着色的图

Table 2. The degrees of v_i in $K_{18}[E_r], K_{18}[E_b]$, $1 \leq i \leq 17$

表 2. v_i 在 $K_{18}[E_r], K_{18}[E_b]$ 的度数, $1 \leq i \leq 17$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}
$d_r(v_i)$	5	5	5	4	4	5	4	5	5	4	4	5	5	4	5	3	3	3
$d_b(v_i)$	3	4	3	4	5	4	5	3	4	4	5	5	5	5	4	5	5	5

综上所述, $R(C_4, C_4, K_{1,n}) = n + 9$, 其中 $n = 7, 8, 9, 10$ 。 □

致 谢

该文作者受国家自然科学基金项目 11801520 资助。

参考文献

[1] Zhang, X.M., Chen, Y.J. and Edwin Cheng, T.C. (2019) On Three Color Ramsey Numbers $R(C_4, C_4, K_1, n)$. *Discrete Mathematics*, **342**, 285-291. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2018.09.030>

[2] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) *Graph Theory*. Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5>

-
- [3] Erdős, P. (1947) Some Remarks on the Theory of Graph. *Bulletin American Mathematical Society*, **53**, 292-294. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1947-08785-1>
- [4] 单传辉. 高维 Ramsey 数问题[J]. 理论数学, 2015(5): 189-206.
- [5] Burr, S., Erdős, P., Faudree, J., Rousseau, C.C. and Schelp, R.H. (1989) Some Complete Bipartite Graph-Tree Ramsey Numbers. *Annals of Discrete Mathematics*, **41**, 79-90. [https://doi.org/10.1016/S0167-5060\(08\)70452-7](https://doi.org/10.1016/S0167-5060(08)70452-7)
- [6] Sun, Y.Q., Yang, Y.S., Lin, X.H. and Zheng, W.P. (2007) On the Three Color Ramsey Numbers $R(C_4, C_4, C_n)$. *Ars Combinatoria*, **84**, 3-11.
- [7] 孙永奇, 杨元生, 王伟, 李炳习, 徐峰. 三色 Ramsey 数 $R(C_{m_1}, C_{m_2}, C_{m_3})$ 研究[J]. 大连理工大学学报, 2006, 46(3): 428-433.
- [8] 赵文飞, 冷洪泽, 罗海鹏, 许晓东. 关于路与圈的 6 个广义 Ramsey 数的值[J]. 广西科学学报, 2010(7): 100-101.
- [9] Reiman, I. (1958) Über ein Problem von K. Zarankiewicz. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **9**, 269-273. <https://doi.org/10.1007/BF02020254>
- [10] Clapham, C.R.J., Flockhart, A. and Sheehan, J. (1989) Graphs without Four-Cycles. *Journal of Graph Theory*, **13**, 29-47. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190130107>