Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(11), 1802-1808
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.811210

Binomial Option Pricing under Stochastic Interest Rates

Jing Fang, Huisheng Shu

Donghua University, Shanghai
Email: fangjingmxf@163.com

Received: Oct. 30^{th}, 2019; accepted: Nov. 14^{th}, 2019; published: Nov. 21^{st}, 2019

Abstract

This paper discusses the standard binary tree method for European option pricing under the Vasicek stochastic interest rate model. The article makes some transformations based on the Vasicek stochastic interest rate model, which is to simplify the model equation by simplifying the diffusion term coefficients in the stochastic differential equations of stock price and interest rate, and transform the original model into the standard type required for this paper. Then we construct a simple joint binary tree to price European options, and get an iterative formula for the option price.

Keywords

Option Pricing, Stochastic Interest Rate, Binary Tree, Standard Model

随机利率模型下二叉树方法期权定价

方 静，舒慧生

东华大学，上海
Email: fangjingmxf@163.com

收稿日期：2019年10月30日；录用日期：2019年11月14日；发布日期：2019年11月21日

文章引用: 方静, 舒慧生. 随机利率模型下二叉树方法期权定价[J]. 应用数学进展, 2019, 8(11): 1802-1808.
DOI: 10.12677/aam.2019.811210

摘 要

本文讨论了Vasicek随机利率模型下欧式期权定价的标准二叉树方法。通过将股价和利率的随机微分方程中的扩散项系数化简，原始模型转换为“标准型”，构建联合二叉树对欧式期权进行定价，得到了期权价格的数值计算方法。

关键词

期权定价，随机利率，二叉树，标准型

1. 引言

Louis Bacheiler [1]首次提出使用布朗运动(Brown Motion)来描述股票价格的演变行为，并在此基础上推导出了欧式看涨期权的定价公式。F. Black，M. Scholes [2] 公开发表了一篇名为《The Pricing of Options and Corporate Liabilities》论文，文中指出期权的理论价格是不依赖于投资者对股票预期收益率变动的，并给出了著名的Black-Scholes (BS)期权定价公式。期权定价理论迎来了具有革命性意义的时刻。然而，BS公式利率不变的假设显然不符合实际的市场规律，这促使许多学者为研究随机利率模型做了很多努力。1973年，Merton [3]推广了考虑股利和随机利率的模型。1985年，Cox、Ingersoll、Ross [4]放弃了B-S模型中的无风险利率为常数的假设，提出了CIR模型。2009 年，刘敬伟 [5]研究了Vasicek 随机利率模型中一维标准Brown 运动与资产价格服从指数Ornstein-Uhlenbeck 过程下的幂型期权鞅定价问题。2018年，Xin-Jiang He 和Song-Ping Zhu [6]研究了Heston 随机利率模型下欧式期权的定价公式的封闭解形式，并给出解的收敛速度。

鉴于树方法的数值易处理性和良好的性质，Cox [7]等先驱提出二叉树模型，其提出的二叉树模型与Black-Scholes的对数正态扩散收敛，之后，越来越多的人对二叉树模型进行研究，例如Amin [8]，Hilliard and Schwartz [9], Derman and Kani [10]。其中Costabile、Massabo、Russo [11]提出了一种新的算法来为期权定价。任芳玲 [12]等人考虑有交易成本和红利的欧式期权二叉树图法，给出欧式期权二叉树模型。

Lo 等人 [13] 将原始随机模型转换为满足其要求的“标准型”，然后使用树方法为新模型下的欧式期权定价，受此启发，我们将原始模型转换为一个新模型，该模型由扩散项系数为1的两个随机微分方程表达式组成，通过一系列变换，得到我们需要的“标准型”。在新的空间中，我们可以使用二叉树进行定价并获得定价公式。

2. 标准二叉树方法期权定价

首先在Vassicek利率模型基础上做出一些变换，将原始模型中的随机过程中的随机扩散项系数全部化为1。新模型中，期权定价可以通过联合二叉树方法来解决。假设每个小区间$[t, t+\Delta t]$ 的长度是恒定不变的，并且在每个小区间上，只考虑上升概率p的取值变化。这种方法我们把它叫做标准二叉树方法。

$$\begin{cases} dS_t = r_t S_t dt + \sigma S_t dB_t, \\ dr_t = k(\theta - r_t)dt + \delta dW_t. \end{cases} \tag{1}$$

我们设B_t 和W_t 是两个一维标准布朗运动，且满足$E\left[dB_t dW_t\right] = \rho dt$, 其中$\rho \in (-1, 1)$ 是两个布朗运动的相关系数。

定理 2.1 *Vasicek*随机利率模型下 [14]，假设二叉树中股票价格在每个小区间$[t, t+\Delta t]$上的增量和减量是固定不变的，记$C_{i,n,m}$ 是i 时刻第n 组中第m 个节点位置的期权价格，那么通过变换二叉树方法我们可以得到欧式期权的定价公式：

$$C_{i,n,m} = e^{-r\Delta t}[p_{11}C_{i+1,n,m} + p_{12}C_{i+1,n,m+1} + p_{21}C_{i+1,n+1,m} + p_{22}C_{i+1,n+1,m+1}], \tag{2}$$

其中$i = 0, 1, 2 \ldots n; n = 1, 2 \ldots i+1; m = 1, 2 \ldots i+1.$

证明 2.1 令 $f(S)g(r) = r_t S_t, h_\sigma = \sigma S_t, h_r = k(\theta - r_t)$

所以有

$$\begin{cases} dS_t = f(S)g(r)dt + h_\sigma dB_t, \\ dr_t = h_r dt + \delta dW_t. \end{cases} \tag{3}$$

定义$M = \frac{r_t}{\delta}$ 所以

$$dM = [\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial r_t}h_r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M}{\partial r_t^2}\delta^2]dt + \frac{\partial M}{\partial r_t}\delta dW(t) = \frac{k}{\delta}(\theta - r_t)dt + dW(t)$$

因此有

$$dM = \frac{k}{\delta}(\theta - r_t)dt + dW(t) \tag{4}$$

我们记$h_m = \frac{k}{\delta}(\theta - r_t)$

则有

$$dM = h_m dt + dW(t) \tag{5}$$

定义$N = \frac{\ln S}{\sigma}$

所以有

$$dN = [\frac{1}{\sigma S}f(S)g(r) + \frac{1}{2}(\frac{1}{-\sigma S^2})h_\sigma^2]dt + dB(t) = (\frac{S_t}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})dt + dB(t)$$

令$h_n = \frac{S_t}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$ 则有

$$dN = h_n dt + dB(t) \tag{6}$$

将(S,r)转化为(N,M)空间

$$\begin{cases} dN = h_n dt + dB_t, \\ dM = h_m dt + dW_t \end{cases} \tag{7}$$

其中$Corr(dN, dM) = \rho dt$.

下面我们通过求解二叉树来得到N 和M 的值，然后通过上述变换的反函数可以求得S 和r 的值，进而得到期权的定价公式。

一方面, 我们从二叉树中可以得到以下结果:

$$E(\Delta N) = (2p-1)\sqrt{\Delta t}.$$

另一方面, 从式(7) 中我们也可得知:

$$E(\Delta N) = h_n \Delta t.$$

可以解得$p = \frac{1+h_n\sqrt{\Delta t}}{2}$, 同理, $q = \frac{1+h_m\sqrt{\Delta t}}{2}$. 其中$\Delta t = \frac{T}{n}$ 是时间间隔长度,h_n 和h_m 如上所示.

现在，我们通过M和N的二维树模型得到每个节点(N, M) 的值，然后通过变换关系来找到S 和r 的值，即，

$$N = \frac{\ln S}{\sigma}, M = \frac{r_t}{\delta}, S = e^{N\sigma}, r = \delta M. \tag{8}$$

找到S 和r 的值, 我们就可以对期权进行定价。

设$p_{11} = P\{N\uparrow, M\uparrow\}, p_{12} = P\{N\uparrow, M\downarrow\}, p_{21} = P\{N\downarrow, M\uparrow\}, p_{22} = P\{N\downarrow, M\downarrow\}$

$$\text{由于}\ \ p_{11} + p_{12} = p$$

$$p_{21} + p_{22} = 1-p$$

$$p_{12} + p_{22} = 1-q$$

$$p_{11} + p_{21} = q$$

$$\text{所以有}\ \ p_{21} - p_{12} = q-p$$

$$p_{11} - p_{22} = p+q-1$$

且

$$E[\Delta N \Delta M] = \Delta t(p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22})$$

$$Cov(\Delta N, \Delta M) = 2\Delta t(p_{11} + p_{22} - 2pq + p + q - 1)$$

$$\text{所以}\ \ Corr(\Delta N, \Delta M) = \frac{Cov(\Delta N, \Delta M)}{\sqrt{Var(\Delta N)}\sqrt{Var(\Delta M)}} = \frac{p_{11}+p_{22}-2pq+p+q-1}{2\sqrt{p(1-p)q(1-q)}}$$

记 $a = \sqrt{p(1-p)q(1-q)}$

$$\text{所以}\ \ p_{11} + p_{22} = 2kCorr(\Delta N, \Delta M) + 2pq - p - q + 1$$

$$p_{11} = pq + a\rho$$

$$p_{12} = p(1-q) - a\rho$$
$$p_{21} = q(1-p) - a\rho$$
$$p_{22} = (1-p)(1-q) + a\rho$$

从上述分析可以得知:

S 在0 时刻的状态是$S(N_{0.0}, M_{0.0})$;

S 在Δt 时刻有四个状态，我们将这四个状态从上到下分成两组，分别是:

$$\begin{cases} S(N_{1.1}, M_{1.1}) \\ S(N_{1.1}, M_{1.-1}) \end{cases} \begin{cases} S(N_{1.-1}, M_{1.1}) \\ S(N_{1.-1}, M_{1.-1}) \end{cases}$$

S 在$2\Delta t$ 时刻有九个状态，我们将这九个状态从上到下分成三组，分别是:

$$\begin{cases} S(N_{2.2}, M_{2.2}), \\ S(N_{2.2}, M_{2.0}), \\ S(N_{2.2}, M_{2.-2}), \end{cases} \begin{cases} S(N_{2.0}, M_{2.2}), \\ S(N_{2.0}, M_{2.0}), \\ S(N_{2.0}, M_{2.-2}), \end{cases} \begin{cases} S(N_{2.-2}, M_{2.2}), \\ S(N_{2.-2}, M_{2.0}), \\ S(N_{2.-2}, M_{2.-2}), \end{cases}$$

S 在时刻$i\Delta t$ 有$(i+1)^2$ 个状态，我们将这$(i+1)^2$ 个状态从上带下分成(i+1) 组，分别是:

$$\begin{cases} S(N_{i.i}, M_{i.i}) \\ S(N_{i.i}, M_{i.i-2}) \\ \cdots \\ S(N_{i.i}, M_{i.-i+2}) \\ S(N_{i.i}, M_{i.-i}) \end{cases} \begin{cases} S(N_{i.i-2}, M_{i.i}) \\ S(N_{i.i-2}, M_{i.i-2}) \\ \cdots \\ S(N_{i.i-2}, M_{i.-i+2}) \\ S(N_{i.i-2}, M_{i.-i}) \end{cases} \cdots\cdots \begin{cases} S(N_{i.-i+2}, M_{i.i}) \\ S(N_{i.-i+2}, M_{i.i-2}) \\ \cdots \\ S(N_{i.-i+2}, M_{i.-i+2}) \\ S(N_{i.-i+2}, M_{i.-i}) \end{cases} \begin{cases} S(N_{i.-i}, M_{i.i}) \\ S(N_{i.-i}, M_{i.i-2}) \\ \cdots \\ S(N_{i.-i}, M_{i.-i+2}) \\ S(N_{i.-i}, M_{i.-i}) \end{cases}$$

我们记$C_{i,n,m}$ 是i 时刻第n 组中第m个节点位置出的期权价格，最后，我们可以得到以下欧式期权的定价公式：

$$C_{i,n,m} = e^{-r\Delta t}[p_{11}C_{i+1,n,m} + p_{12}C_{i+1,n,m+1} + p_{21}C_{i+1,n+1,m} + p_{22}C_{i+1,n+1,m+1}], \tag{9}$$

其中$i = 0, 1, 2 \ldots n; n = 1, 2 \ldots i+1; m = 1, 2 \ldots i+1$

$$C_{i+1,n,m} = e^{-r\Delta t}[p_{11}C_{i+2,n,m} + p_{12}C_{i+2,n,m+1} + p_{21}C_{i+2,n+1,m} + p_{22}C_{i+2,n+1,m+1}],$$

$$C_{i+1,n,m+1} = e^{-r\Delta t}[p_{11}C_{i+2,n,m+1} + p_{12}C_{i+2,n,m+2} + p_{21}C_{i+2,n+1,m} + p_{22}C_{i+2,n+1,m+2}],$$

$$C_{i+1,n+1,m} = e^{-r\Delta t}[p_{11}C_{i+2,n+1,m} + p_{12}C_{i+2,n+1,m+1} + p_{21}C_{i+2,n+2,m} + p_{22}C_{i+2,n+2,m+1}],$$

$$C_{i+1,n+1,m+1} = e^{-r\Delta t}[p_{11}C_{i+2,n+1,m+1} + p_{12}C_{i+2,n+1,m+2} + p_{21}C_{i+2,n+2,m+1} + p_{22}C_{i+2,n+2,m+2}].$$

3. 总结

本文主体内容分为两块。第一块是对随机利率模型的改造，通过一系列变量替换，简化模型，得到了我们所需要的“标准型”，以及变换过后的新模型中两个布朗运动的相关系数；第二块是构造联合二叉树模型，在每个小区间上，由于增量和减量不变，所以上升因子和下降因子是显而易见的，因此只考虑了参数的变化，经过计算得到了欧式期权定价的迭代公式。不足之处是，本文未考虑波动率同时为随机变量的情况，在此方法基础上，利率和波动率同时随机化是一个值得研究的课题，感兴趣的学者可以继续研究。

参考文献

[1] Bachelier, L. (1900) Théorie de la spéculation. Gauthier-Villars, Paris. https://doi.org/10.24033/asens.476

[2] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654.

[3] Merton, R. C. Influence of Mathematical Models in Finance on Practice: Past, Present and Future[J]. Mathematical Model in Finance, 1995, 48 (22): 190-208.

[4] Cox, J.C., Ingersoll, J.E. and Ross, J. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rate. *Econometrica*, **53**, 385-407.

[5] 刘敬伟. Vasicek随机利率模型下指数O-U过程的幂型期权鞅定价[J]. 数学的实践与认识, 39(1): 31-39.

[6] He, X.-J. and Zhu, S.-P. (2018) A Closed-Form Pricing Formula for European Options under the Heston Model with Stochastic Interest Rate. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **335**, 323-333. https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.12.011

[7] Cox, J.C., Ross, S.A. and Rubinstein, M. (1979) Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, **7**, 229-263. https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1

[8] Amin, K.I. (1993) Jump Diffusion Option Valuation in Discrete Time. *The Journal of Finance*, **48**, 1833-1863. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1993.tb05130.x

[9] Hilliard, J.E. and Schwartz, A. (2005) Pricing European and American Derivatives under a Jump-Diffusion Process: A Bivariate Tree Approach. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **40**, 671-691. https://doi.org/10.1017/S0022109000001915

[10] Derman, E. and Kani, I. (1998) Stochastic Implied Trees: Arbitrage Pricing with Stochastic Term and Strike Structure of Volatility. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **1**, 61-110. https://doi.org/10.1142/S0219024998000059

[11] Costabile, M., Massabo, I. and Russo, E. (2006) An Adjusted Binomial Model for Pricing Asian Options. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, **27**, 285-296. https://doi.org/10.1007/s11156-006-9432-9

[12] 任芳玲, 蒋登智. 基于交易成本和红利的欧式期权二叉树模型及算法[J]. 山东科学, 2018, 31(5): 101-108.

[13] Lo, C., Nguyen, D. and Skindilias, K. (2017) A Unified Tree Approach for Options Pricing under Stochastic Volatility Models. *Finance Research Letters*, **20**, 260-268. https://doi.org/10.1016/j.frl.2016.10.009

[14] Vasicek, O. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, **5**, 177-188. https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2