Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(11), 1745-1752
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.811204

Hans汉斯

Research on Bipartite Consensus Problems of Multi-Agent Systems

Fang Tang, Moxi Han

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
Email: 530463918@qq.com

Received: Oct. 21st, 2019; accepted: Nov. 6th, 2019; published: Nov. 13th, 2019

Abstract

For a first-order discrete-time multi-agent system in which cooperation and competition mechanism coexist, we establish its bipartite consensus theories under undirected and directed topology graph based on graph theory, nonnegative matrix theory and stability theory through gauge transformation.

Keywords

Multi-Agent System, Signed Graph, Discrete-Time System, Gauge Transformation, Structural Balance, Bipartite Consensus

多智能体系统的二部一致性问题研究

唐　芳，韩摩西

新疆师范大学数学科学学院，新疆　乌鲁木齐
Email: 530463918@qq.com

收稿日期：2019年10月21日；录用日期：2019年11月6日；发布日期：2019年11月13日

摘　要

本文针对合作与竞争机制并存的一阶离散时间多智能体系统，应用符号图理论、非负矩阵理论和稳定性理论，通过规范变换，建立了无向拓扑及有向拓扑下一阶离散时间多智能体系统的二部一致性理论。

关键词

多智能体系统，符号图，离散系统，规范变换，结构平衡，二部一致

文章引用：唐芳，韩摩西. 多智能体系统的二部一致性问题研究[J]. 应用数学进展, 2019, 8(11): 1745-1752.
DOI: 10.12677/aam.2019.811204

1. 引言

随着科学技术的进步，自然界中的生物群体活动现象开始受到人们的关注，如飞鸟迁徙、鱼群游动、蚂蚁搬家以及蜜蜂采蜜等等。这启发了人们对生物群体行为的探究。我们把具有简单群集现象的个体称为智能体，把这些群集的生物群体看成多智能体系统。这些生物的群体行为是如何形成的？生物体之间又是如何进行信息的有效传递的呢？基于上述问题，研究人员从人工智能、计算机科学数学以及生物学等多方面开展了对于多智能体系统的研究。

一致性问题是多智能体系统中各智能体相互协同合作的基础，20 世纪 70 年代，美国学者 Degroot 基于统计学与管理学领域，在文献[1]中首次提出了该问题。此后，国内外众多学者针对该问题在文献[2] [3] [4] [5] [6]中展开了系统研究。

目前，大量学者在对协同控制技术的研究上取得了优秀成果，智能体间通过协同作用进行通信，最终可达到相同的状态值。然而，在现实的社会网络理论中，智能体之间协作与竞争机制并存，我们将其称为具有拮抗作用的网络系统[7] [8]。通常用符号图来表示智能体之间的通信状态，与之前的研究不同，符号图中的连接边可以是负边，其对应的邻接矩阵中的元素可正可负可为 0。在具有拮抗作用的网络中，研究者们最关注的依然是智能体最终能否趋于共同的状态值，即系统能否取得一致性。研究表明，存在一种另类的“一致”现象：所有的智能体状态值的绝对值会收敛到一个相同的数值，称其为二部一致[9]。

二部一致的概念由学者 Altafini 在文献[9]中首先提出，该文献研究了存在拮抗作用时，符号图中的智能体怎样通过分布式协议实现一致及其可以达到何种程度的一致之后，众多学者也从各个角度出发，对多智能体系统的二部一致性开展了系统深入的研究。文献[10]提出了一种基于事件的具有拮抗作用的多智能体系统的二部一致性问题，利用多智能体网络的符号拉普拉斯矩阵的谱性质，分析了系统的二部一致稳定性。文献[11]研究了一般情形下多智能体系统的二部一致性，并给出了利用全局状态信息得到的分布式控制率。文献[12]研究了连续时间多智能体系统在符号有向图上的二部一致性问题，并应用现有的反馈和输出一致性算法直接求解二部一致性问题。

现有文献大多是研究连续情形下系统取得二部一致的解的问题。本文基于一阶离散模型，研究了其二部一致性问题，即从连续时间到离散时间的二部一致问题的推广。

2. 预备知识

令三元组 $G(V,\varepsilon,A)$ 表示(加权)符号图 G，其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为节点集， $\varepsilon\subseteq V\times V$ 表示边集，$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 是与符号图 G 对应的加权邻接矩阵。将邻接矩阵 A 对应的符号图记为 $G(A)$，并约定节点间的通信情况，以信息流方向来表示，即 $(v_j,v_i)\in\varepsilon$ 表示 v_j 的信息可以到达 v_i，且相应的邻接矩阵 A 中对应的元素 $a_{ij}\neq 0$，即 $(v_j,v_i)\in\varepsilon\Leftrightarrow a_{ij}\neq 0$。$N_i=\{v_j\,|\,(v_j,v_i)\in\varepsilon\}$ 表示节点 v_i 的邻居集合。

在无向图中，节点之间没有顺序，边 $(v_j,v_i)\in\varepsilon$ 表示节点 v_i 与 v_j 可进行信息交流并且信息流没有方向性。若从顶点 v_i 到 v_j 有路径，则称 v_i 与 v_j 是连通的。若图中任意两个点都是连通的，我们把这个图称为连通图。在有向图中，若对每一对顶点 v_i 与 v_j，既存在从 v_i 到 v_j 的路径，又存在从 v_j 到 v_i 的路径，则称此有向图为强连通图。

在本文中我们不考虑自环，即对任意 $i=1,2,\cdots,n$， $a_{ii}=0$。如果一个环(半环)包含偶数条负边，即

$a_{i1,i2}a_{i2,i3}\cdots a_{ip,i1} > 0$，则此环为正环；若 $a_{i1,i2}a_{i2,i3}\cdots a_{ip,i1} < 0$，则此环为负环。在有向图中，我们把共享相同节点的一对边 $(v_i,v_j),(v_j,v_i)\in\varepsilon$，称为二边形(digon)。对于一个这样的有向图，我们始终假设 $a_{ij}a_{ji}\ge 0$，这说明所有的二边形不能有相反的符号，我们也把它称为二边符号对称(digon sign-symmetry)。$G(A)$ 中的有向路径 P 是 ε 中的(有向)边的串接，$B=\{(v_{i1},v_{i2}),(v_{i2},v_{i3}),\cdots,(v_{im-1},v_{im})\}\subset\varepsilon$，其中所有节点 $v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{im}$ 是不同的，P 的长度为 $m-1$。$G(A)$ 中的有向环是指一条具有相同起点和终点的有向路径，即 $v_{im}=v_{i1}$。

对于矩阵 $M=[m_{ij}]_{n\times n}$，如果对任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$，$m_{ij}\ge 0$，我们称 M 是一个非负矩阵。若非负矩阵 M 的行(或列)和是 1，则称矩阵 M 是行(或列)随机矩阵，特别地，我们把既是行随机又是列随机的矩阵称为双随机矩阵。如果以非负矩阵 M 为邻接矩阵的有向图是强连通的，则 M 是不可约矩阵。对于一个不可约随机矩阵 M，如果 M 只含有一个具有最大模 $\rho(A)$ 的特征值，则 M 是本原矩阵。

3. 无向拓扑图下的一阶离散系统的二部一致性

考虑一个一阶离散系统

$$x_i(k+1)=x_i(k)+u_i(k) \tag{1}$$

设计控制协议

$$u_i(k)=-\varepsilon\sum_{j\in N_i}|a_{ij}|\left(x_i(k)-\mathrm{sgn}(a_{ij})x_j(k)\right) \tag{2}$$

其中 $\varepsilon>0$ 表示步长，$\mathrm{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数，$a_{ij}>0$ 表示第 i 个智能体与第 j 个智能体相互之间存在合作关系，$a_{ij}<0$ 表示第 i 个智能体与第 j 个智能体相互之间存在竞争关系，$a_{ij}=0$ 表示第 i 个智能体与第 j 个智能体之间不存在信息交流。

对于一个给定的带符号(对称)邻接矩阵 A，$L=[l_{ih}]_{n\times n}$ 表示与通信拓扑图 $G(A)$ 相对应的 Laplacian 矩阵，定义如下：$L=C-A$，其中 $l_{ih}=\begin{cases}\sum_{j\in N_i}|a_{ij}|, h=i\\ -a_{ih}, h\ne i\end{cases}$，$C=diag\left\{\sum_{j\in N_1}|a_{1j}|,\sum_{j\in N_2}|a_{2j}|,\cdots,\sum_{j\in N_n}|a_{nj}|\right\}$。

与一般的一致问题不同，本文中邻接矩阵 A 中的元素 a_{ij} 可正可负可为 0，拉普拉斯矩阵 L 也不再是行和为零的对角占优矩阵。与非负邻接矩阵的一般理论的主要区别在于此时的 L 可以是正定的。

为了解决矩阵 A 不是非负矩阵这一问题，我们引入了规范变换。

定义 1 [9]：规范变换(Gauge Transformation)：规范变换是 n 维实数空间 R^n 中的一种正序变换，通过矩阵 $D=diag\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}$，$\sigma_i\in\{\pm1\},i=1,2,\cdots,n$ 改变 R^n 中矩阵的数值符号，用 $D^*=\{D=diag\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\},\sigma_i\in\{\pm1\}\}$ 表示 R^n 中所有规范变换的集合。

设 $x(k+1)=\begin{bmatrix}x_1(k+1) & x_2(k+1) & \cdots & x_n(k+1)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，则

$$x(k+1)=x(k)-\varepsilon Lx(k)=(I-\varepsilon L)x(k)=\hat{P}x(k) \tag{3}$$

其中 $\hat{P}=I-\varepsilon L$，I 是单位矩阵。

对系统(4)，令

$$z(k)=Dx(k),D\in D^* \tag{4}$$

因为 $D^{-1}=D$，所以 $x(k)=Dz(k)$，由(3) (4)可得

$$\begin{aligned}z(k+1)&=Dx(k+1)=D\hat{P}x(k)=D\hat{P}D^{-1}z(k)=D(I-\varepsilon L)D^{-1}z(k)\\&=(I-\varepsilon DLD^{-1})z(k)=(I-\varepsilon L_D)z(k)=P_dz(k)\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $P_d = I - \varepsilon L_D$，我们把带有参数 ε 的矩阵 P_d 称为 Perron 阵。$L_D = DLD^{-1} = DLD$ 是矩阵 L 在规范变换下对应的新的 Laplacian 矩阵，L_D 中的元素 $l_{D,ih}$ 可表示为：

$$l_{D,ih} = \begin{cases} \sum_{j \in N_i} |a_{ij}|, h = i \\ \sigma_i \sigma_h a_{ih}, h \neq i \end{cases} \tag{6}$$

下面给出了结构平衡的定义及其相关等价条件。

定义 2 [9]：对于符号图 $G(A)$，如果存在两个集合 V_1 与 V_2，使得 $V_1 \cap V_2 = \varnothing$，$V_1 \cup V_2 = V$，并且对任意 $v_i, v_j \in V_q, q \in \{1,2\}$，有 $a_{ij} \geq 0$；对任意 $v_i \in V_q$，$v_j \in V_r$，$q \neq r$，$q, r \in \{1,2\}$，有 $a_{ij} \leq 0$，则 $G(A)$ 是结构平衡的。

引理 1 [9]：连通的符号图 $G(A)$ 是结构平衡的当且仅当下列任意一个等价条件成立：

(1) $G(A)$ 的所有环是正环；

(2) 存在 $D \in D^*$，使得 DAD 是非负矩阵，且在规范变换下得到的新的 Laplacian 矩阵

$$L_D = \begin{bmatrix} \sum_{j \in N_1} |a_{1j}| & -|a_{12}| & \cdots & -|a_{1n}| \\ -|a_{21}| & \sum_{j \in N_2} |a_{2j}| & \cdots & -|a_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -|a_{n1}| & -|a_{n2}| & \cdots & \sum_{j \in N_n} |a_{nj}| \end{bmatrix}$$

是行和为零的对角占优矩阵。

(3) 0 是 L 的特征值。

由引理 1 知，对连通的结构平衡图 $G(A)$ 来说，若 $\varepsilon \in (0, 1/\Delta)$，则系统(3)的二部一致性就等价于系统(5)的一致性。

由结构平衡的等价条件，我们有：

推论 1 [9]：当且仅当下列任一条件成立时，连通的符号图 $G(A)$ 不是结构平衡的：

(1) $G(A)$ 有一个或多个环是负的；

(2) 不存在 $D \in D^*$，使得 DAD 是非负的；

(3) L 的所有特征值大于零，即 $\phi(x) > 0$。

在结构平衡的情形下，经过规范变换后的新的 Laplacian 矩阵有什么样的性质呢？

定义 3 [13]：若有向图 $G(A)$ 对应的邻接矩阵 A 中的元素 a_{ij} 满足对任意 $i = 1, 2, \cdots, n$，$\sum_{j \neq i} a_{ij} = \sum_{j \neq i} a_{ji}$，则 $G(A)$ 是一个平衡图。

定义 4 [14]：设 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$，记 $R_i = |a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{in}|$，称圆域 $G_i = \{s \,\|\, s - a_{ii}| \leq R_i, s \in \mathcal{C}\}$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 为矩阵 A 的第 i 个 Gershgorin 圆，并称 R_i 为 Gershgorin 圆 G_i 的半径。

引理 2：设 $G(A)$ 是(强)连通的结构平衡图，$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \right), i \in 1, 2, \cdots, n$ 表示图的最大入度，如果 Perron 矩阵 P_d 的参数 $\varepsilon \in (0, 1/\Delta)$，则矩阵 P_d 具有如下性质：

(1) P_d 是一个非负行随机矩阵，并且有一个平凡特征值 1；

(2) P_d 的所有特征值均在一个单位圆内；

(3) 若 $G(A)$ 是平衡的，则 P_d 是一个双随机矩阵；

(4) 若 $0 < \varepsilon < 1/\Delta$，则 P_d 是一个本原矩阵。

证明：(1) 因为$G(A)$是(强)连通的结构平衡图，又由引理 1 可得，$L_D = DLD$是行和为零的对角占优矩阵，且非对角元素均为非正元素，所以$1_n = [1 \ \ 1 \ \ \cdots \ \ 1]^{\mathrm{T}}$为$L_D$的 0 特征值对应的特征向量，$P_d 1_n = 1_n - \varepsilon L_D 1_n = 1_n$，可得$P_d$的行和为 1 且有一个特征值为 1，另外：

$$P_d = I - \varepsilon L_D = I - \varepsilon DLD = I - \varepsilon D(C - A)D = I - \varepsilon DCD + \varepsilon DAD \tag{7}$$

由引理 1 可知，DAD是非负矩阵，又有$\varepsilon \in (0, 1/\Delta)$，因此$\varepsilon DAD$是非负矩阵。当$\varepsilon \in (0, 1/\Delta)$时，$I - \varepsilon DCD$的对角元为$1 - \varepsilon d_i \geq 1 - d_i/\Delta \geq 0$，此时$I - \varepsilon DCD$是非负的。而两个非负矩阵的和还是非负矩阵，因此$P_d$是一个非负行随机矩阵。

(2) 令λ_j是L_D的第j个特征值，则P_d的第j个特征值为$\mu_j = 1 - \varepsilon \lambda_j$。由 Gershgorin 定理，$L_D$的所有特征值在圆$|s - \Delta| \leq \Delta$内，令$z = 1 - s/\Delta$，则有$|z| \leq 1$，即$P_d$的所有特征值均在一个单位圆内。

(3) 若$G(A)$是一个平衡图，则1_n是L_D的左特征向量，即$1_n^{\mathrm{T}} L_D = 0$，可得$1_n^{\mathrm{T}} P_d = 1_n - \varepsilon 1_n L_D = 1_n^{\mathrm{T}}$，这说明$P_d$的列和为 1。又由(1)知，$P_d$是一个非负行随机矩阵，所以$P_d$是一个双随机矩阵。

(4) 若$G(A)$是强连通的，则P_d是一个不可约矩阵。对任意$0 < \varepsilon < 1/\Delta$，令$\mu = 1 - \varepsilon s$，将圆$|s - \Delta| = \Delta$映射到严格位于单位圆内的圆，其中$\mu = 1$，这说明在$\mu = 1$时只有一个模长为 1 的单特征值，可得$P_d$是一个本原矩阵。

引理 3 [13]**：**令P_d是一个本原矩阵，其左、右特征向量分别为$\omega = [\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n]$和$\nu = [\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n]^{\mathrm{T}}$，满足$P_d \nu = \nu, \omega^{\mathrm{T}} P_d = \omega^{\mathrm{T}}, \nu^{\mathrm{T}} \omega = 1$，则$\lim_{k \to \infty} P_d^k = \nu \omega^{\mathrm{T}}$。

定义 5 [9]**：**若$\lim_{k \to \infty} |x_i(k)| = \alpha > 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$，系统(1)可取得二部一致。

定理 1：若连通的符号图$G(A)$是结构平衡的，则系统(1)在协议(2)下可以获得二部一致的解。此外，若$D \in D^*$是规范变换中使得DAD非负的矩阵，则系统(1)的二部一致的解为$\lim_{k \to +\infty} x(k) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i x_i(0)\right) D 1_n$。若$G(A)$不是结构平衡的，则对$\forall x(0) \in R^n$，$\lim_{k \to +\infty} x(k) = 0$。

证明：若$G(A)$是结构平衡的，则由引理 1，存在$D \in D^*$使得DAD非负且$L_D = DLD$是行和为零的对角占优矩阵。由于符号图$G(A)$是无向连通图，可得1_n^{T}与1_n分别是L_D的 0 特征值对应的左特征向量与右特征向量，即$1_n^{\mathrm{T}} L_D = 0$，$L_D 1_n = 0$，因而$1_n^{\mathrm{T}} P_d = 1_n^{\mathrm{T}} (I - \varepsilon L_D) = 1_n^{\mathrm{T}}$，$P_d 1_n = (I - \varepsilon L_D) 1_n = 1_n$。由引理 2 (4)可知，$P_d$是一个本原矩阵，令$z(k) = P_d^{\,k} z(0)$，则由引理 3，有：

$$\lim_{k \to +\infty} P_d^k = \nu \omega^{\mathrm{T}} = \frac{1}{n} 1_n 1_n^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

则

$$\begin{aligned} \lim_{k \to +\infty} z(k) &= \lim_{k \to +\infty} P_d^k z(0) = \frac{1}{n} 1_n 1_n^{\mathrm{T}} z(0) \\ &= \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ \vdots \\ z_n(0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i(0) \right) 1_n \end{aligned} \tag{9}$$

由$x(k) = Dz(k)$，得：

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} x(k) &= \lim_{k\to+\infty}\left(Dz(k)\right)=\frac{1}{n}D\left(\sum_{i=1}^{n} z_i(0)\right)1_n \\
&= \frac{1}{n}\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1(0)\\ z_2(0)\\ \vdots \\ z_n(0)\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{n}\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\\ \vdots \\ x_n(0)\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{n}\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 x_1(0)\\ \sigma_2 x_2(0)\\ \vdots \\ \sigma_n x_n(0)\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i x_i(0)\right)D1_n
\end{aligned}
\tag{10}
$$

若 $G(A)$ 不是结构平衡的，则 L_D 为严格对角占优矩阵。由引理 1 (2)知，此时 P_d 的所有特征值均在一个单位圆内，则 $\lim\limits_{k\to+\infty} P_d^k=0$，可得 $\lim\limits_{k\to+\infty} z(k)=\lim\limits_{k\to+\infty} P_d^k z(0)=0$， $\lim\limits_{k\to+\infty} x(k)=\lim\limits_{k\to+\infty} Dz(k)=D\lim\limits_{k\to+\infty} z(k)=0$。

4. 有向拓扑图下一阶离散系统的二部一致性

定义 6 [9]：给定一个符号图 $G(A)$，记 $C_r=diag\left\{\sum\limits_{j\in N_1}|a_{1j}|,\sum\limits_{j\in N_2}|a_{2j}|,\cdots,\sum\limits_{j\in N_n}|a_{nj}|\right\}$ 为 A 的行连接矩阵，$C_r=diag\left\{\sum\limits_{j\in N_1}|a_{j1}|,\sum\limits_{j\in N_2}|a_{j2}|,\cdots,\sum\limits_{j\in N_n}|a_{jn}|\right\}$ 是 A 的列连接矩阵。若 $G(A)$ 是无向图，则 $C_r=C_c=C$。一般而言，若 $C_r=C_c$，则符号图 $G(A)$ 是加权平衡的。

对于有向图 $G(A)$，记 $L=C_r-A$ 为邻接矩阵 A 对应的行 Laplacian 矩阵。若 A 是二边符号对称的，则可在无向图下定义一个对称的邻接矩阵 $A_u=\dfrac{A+A^{\mathrm{T}}}{2}$。注意，$L_u=\dfrac{L+L^{\mathrm{T}}}{2}=C_r-C_c$ 一般与 $\hat{L}_u=C_u-A_u$ 是不同的，这里 $C_u=\dfrac{C_r+C_c}{2}$。当且仅当 $G(A)$ 结构平衡时，有 $L_u=\hat{L}_u$。

下面给出了有向图中结构平衡与结构不平衡的相关引理。

引理 4 [9]：一个强连通且二边符号对称的有向图 $G(A)$ 是结构平衡的，当且仅当下列等价条件成立：

(1) $G(A_u)$ 是结构平衡的；

(2) $G(A)$ 的所有环是正环；

(3) 存在 $D\in D^*$，使得 DAD 是非负矩阵；

(4) 0 是 L 的特征值。

引理 5 [9]：一个强连通且二边符号对称的有向图 $G(A)$ 不是结构平衡的，当且仅当下列等价条件成立：

(1) $G(A_u)$ 不是结构平衡的；

(2) $G(A)$ 至少有一个负有向环；

(3) 不存在 $D \in D^*$，使得 DAD 是非负矩阵。

若 $G(A)$ 是结构平衡的，令 v 是 DLD 的一个非零左特征向量，且满足 $v^{\mathrm{T}} 1_n = 1$，结合定理 1 建立有向拓扑下的二部一致性理论。

定理 2：对于强连通且二边符号对称的有向图 $G(A)$，设 $\varepsilon \in (0, 1/\Delta)$，若 $G(A)$ 是结构平衡的，则系统(1)可以获得二部一致的解。此外，若系统(1)在协议(2)下可达二部一致，则其二部一致的解为 $\lim_{k\to+\infty} x(k) = \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \sigma_i x_i(0)\right) Dv$。若 $G(A)$ 是加权平衡的，则 $\lim_{k\to+\infty} x(k) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i x_i(0)\right) D1_n$。若 $G(A)$ 不是结构平衡的，则对 $\forall x(0) \in R^n$，$\lim_{k\to+\infty} x(k) = 0$.

证明：由引理 4 知，$G(A)$ 是结构平衡的等价于 $G(A_u)$ 是结构平衡的，对于矩阵 $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 与矩阵 $A_u = \frac{A + A^{\mathrm{T}}}{2} = \left[a_{u,ij}\right]_{n\times n} = \left[\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}\right]_{n\times n}$，显然 A_u 对应的符号图 $G(A_u)$ 是一个无向连通图，则由定理 1 类似可得，系统(1)可获得二部一致性。引理 4 (3)保证了 D 的存在，由定理 1 知，$\lim_{k\to+\infty} z(k) = v\left(\omega^{\mathrm{T}} z(0)\right)$，由 $x(k) = Dz(k)$，可得：

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} x(k) &= \lim_{k\to\infty}\left(Dz(k)\right) = Dv\left(\omega^{\mathrm{T}} z(0)\right) \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ \vdots \\ z_n(0) \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 x_1(0) \\ \sigma_2 x_2(0) \\ \vdots \\ \sigma_n x_n(0) \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \sigma_i x_i(0)\right) Dv
\end{aligned}
\tag{11}
$$

若 $G(A)$ 是加权平衡的，则 $C_r = C_c$，因此 A 为对称矩阵，此时 A 对应的符号图 $G(A)$ 是无向图，系统(1)在协议(2)下取得的二部一致的解即为定理 1 中的结果.若 $G(A)$ 不是结构平衡的，由引理 1 (2)知，此时 P_d 的所有特征值均在一个单位圆内，因此 $\lim_{k\to+\infty} P_d^k = 0$，$\lim_{k\to+\infty} z(k) = v\left(\omega^{\mathrm{T}} z(0)\right)$。由 $x(k) = Dz(k)$，有：$\lim_{k\to+\infty} z(k) = \lim_{k\to+\infty} P_d^k z(0) = 0$，$\lim_{k\to+\infty} x(k) = \lim_{k\to+\infty} Dz(k) = D \lim_{k\to+\infty} z(k) = 0$.

5. 有向拓扑图下一阶离散系统的二部一致性

本文对合作与竞争机制并存的一阶离散时间多智能体系统，建立了其在无向拓扑及有向拓扑的二部一致性的理论框架。本文的核心思想是对系统进行规范变换，在此变换下会得到一个新的Laplacian矩阵，并经由这个新的 Laplacian 矩阵的性质来研究系统的一致性问题。未来，我们将研究具有时延或采样的多智能体系统的二部一致性问题。

参考文献

[1] DeGroot, M.H. (1974) Reaching a Consensus. *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 118-121. https://doi.org/10.1080/01621459.1974.10480137

[2] Li, B., Li, J. and Huang, K.W. (2013) Modeling and Flocking Consensus Analysis for Large-Scale UAV Swarms. *Mathematical Problems in Engineering*, **2013**, Article ID: 368369. https://doi.org/10.1155/2013/368369

[3] Shi, H., Wang, L. and Chu, T. (2009) Flocking of Multi-Agent Systems with a Dynamic Virtual Leader. *International Journal of Control*, **82**, 43-58. https://doi.org/10.1080/00207170801983091

[4] Benediktsson, J.A. and Swain, P.H. (1992) Consensus Theoretic Classification Methods. *IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics*, **22**, 688-704. https://doi.org/10.1109/21.156582

[5] Reynolds, C.W. (1987) Flocks, Herds and Schools: A Distributed Behavioral Model. *ACM Siggrapy Computer Graphics*, **21**, 25-34. https://doi.org/10.1145/37402.37406

[6] Vicsek, T., Czir, D.K.A., Ben-Jacob, E., *et al*. (1995) Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles. *Physical Review Letters*, **75**, 1226-1229. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.1226

[7] Jiang, Y., Zhang, H. and Chen, J. (2016) Sign-Consensus of Linear Multi-Agent Systems over Signed Directed Graphs. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **64**, 5075-5083. https://doi.org/10.1109/TIE.2016.2642878

[8] Hu, J. and Zhu, H. (2015) Adaptive Bipartite Consensus on Coopetition Networks. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **307**, 14-21. https://doi.org/10.1016/j.physd.2015.05.012

[9] Altafini, C. (2012) Consensus Problems on Networks with Antagonistic Interactions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **58**, 935-946. https://doi.org/10.1109/TAC.2012.2224251

[10] Zhou, Y. and Hu, J. (2013) Event-Based Bipartite Consensus on Signed Networks. *IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation*, *Control and Intelligent Systems*, Nanjing, 26-29 May 2013, 326-330. https://doi.org/10.1109/CYBER.2013.6705467

[11] Yang, D., Ren, W., Liu, X., *et al*. (2016) Decentralized Event-Triggered Consensus for Linear Multi-Agent Systems under General Directed Graphs. *Automatica*, **69**, 242-249. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.03.003

[12] Zhang, H. and Chen, J. (2017) Bipartite Consensus of Multi-Agent Systems over Signed Graphs: State Feedback and Output Feedback Control Approaches. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **27**, 3-14. https://doi.org/10.1002/rnc.3552

[13] Olfati-Saber, R., Fax, J.A. and Murray, R.M. (2007) Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems. *Proceedings of the IEEE*, **95**, 215-233. https://doi.org/10.1109/JPROC.2006.887293

[14] Franklin, J.N. (2012) Matrix Theory. Courier Corporation, North Chelmsford.