

Construction of PH Splines Based on DP Curves

Jiaojiao Duan, Xiaoxu Cheng, Na Zhang, Shangwei Li, Xingxuan Peng

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 1259817566@qq.com, pengxx126@163.com

Received: Nov. 16th, 2019; accepted: Dec. 5th, 2019; published: Dec. 12th, 2019

Abstract

The PH curve is a special kind of polynomial parameter curve. The most significant advantage is that the arc length function is a polynomial. And the equidistant line can be represented by a rational polynomial curve, which is compatible with the CAD system. Based on the DP curve, a necessary and sufficient condition for a cubic plane DP curve to be a PH curve is obtained. The geometrical characteristics of the edge length and the angle of the control polygon are obtained and the definition of the DP-PH curve is obtained. The geometric feature condition of polygon is controlled by DP-PH. We describe the construction of a control polygon for a cubic DP-PH curve from geometric construction method, based on the procedure for a DP curve. Then the errors between DP curve and DP-PH curve are analyzed.

Keywords

PH Curve, DP Curve, DP-PH Curve, Geometrical Feature

基于DP曲线构建PH样条

段娇娇, 程晓旭, 张娜, 李尚蔚, 彭兴璇

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连
Email: 1259817566@qq.com, pengxx126@163.com

收稿日期: 2019年11月16日; 录用日期: 2019年12月5日; 发布日期: 2019年12月12日

摘要

PH曲线是一类特殊的多项式参数曲线, 其最显著的优点是弧长函数为多项式, 其等距线可由兼容于CAD系统的有理多项式曲线表示。鉴于此, 基于三次DP曲线, 从平面PH曲线的定义出发, 给出了三次DP曲

文章引用: 段娇娇, 程晓旭, 张娜, 李尚蔚, 彭兴璇. 基于 DP 曲线构建 PH 样条[J]. 应用数学进展, 2019, 8(12): 1986-1992.

DOI: 10.12677/aam.2019.812228

线为PH曲线时其控制多边形满足的充分必要条件,得到了关于控制多边形的边长和夹角的几何特征条件,给出DP-PH曲线的定义。通过DP-PH控制多边形几何特征条件,给出可以先通过构造控制多边形进而构造出三次DP-PH曲线的几何构造方法。进一步分析了DP曲线和DP-PH曲线的误差。

关键词

PH曲线, DP曲线, DP-PH曲线, 几何特征

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在计算机辅助几何设计中,非均匀有理B样条(NURBS)方法发展比较成熟,成为现代曲线曲面设计中最广泛流行的技术,但是仍然存在不足:不能准确表示摆线、螺旋线、圆锥、圆弧曲线等工程问题中经常用到的超越曲线曲面。近年来,学者们不仅在非多项式空间构造出了新型曲线,而且在多项式空间也构造出了新型曲线。Delgado和Peña [1]提出了新型参数曲线,称为DP曲线,该曲线不但在数值计算上具有稳定性、在算法上具有线性的计算时间复杂度,而且是由具有曲线保形性的全正基(NTP基)生成的[2] [3] [4] [5]。

在CAD的很多领域涉及到曲线弧长和等距线的计算问题,例如铁路与公路的设计、机械零件的设计以及半智能机器人运动轨迹生成等,往往需要多项式曲线的弧长和等距线具备有理形式。为此,FAROUKI和SAKKALIS [6]引入毕达哥拉斯速端(Pythagorean Hodograph, PH)曲线,具有多项式形式的弧长和有理形式的等距线。到目前为止,对PH曲线的研究过多地侧重于代数结构方面,在几何方面的研究成果很匮乏。众所周知,对于给定Bézier曲线的控制多边形,其相关边长和内角不依赖于坐标选择的固有内在几何参量,具体数据可由实际测量得。因此,从控制多边形的长度和角度来讨论PH曲线的几何性质无论在理论上还是实际应用中都具有重要意义。Farouki和Sakalis [6]给出具有不同控制顶点的3次Bézier曲线为PH曲线分离形式的边长约束条件和角的约束条件。此外,五次PH曲线的几何特征条件也被确立,但对于边长和角度来说这个条件不是分离形式的。近年来,四次[7]、五次[8]和六次[9]PH曲线的充分必要的几何特征条件被确定。

对于基于三次DP曲线构造PH曲线的问题,本文给出了三次PH-DP曲线的定义,DP曲线成为PH曲线的充分必要条件,关于控制多边形的边长和夹角的几何特征条件,并且是边角完全分离的条件。通过DP-PH控制多边形几何特征条件,我们给出可以先通过构造控制多边形进而构造出三次DP-PH曲线的几何构造方法。最后,分析了DP曲线和DP-PH曲线的误差,给出数值例子。

2. 三次DP-PH曲线的构造

本章基于DP曲线,构造PH曲线(DP-PH曲线),并给出三次DP曲线成为PH曲线的几何特征条件。

2.1. 三次DP曲线

给定控制点 P_k ,对于 $\forall t \in [0,1]$,定义三次DP曲线:

$$P(t) = \sum_i^3 p_i D_{i,3}(t)$$

其中三次 DP 曲线基函数为:

$$[D_{0,3}(t), D_{1,3}(t), D_{2,3}(t), D_{3,3}(t)] = [(1-t)^3, t(1-t)(2-t), t(1-t)(1+t), t^3]$$

2.2. PH 曲线

定义 1 [6]: 给定平面参数多项式曲线 $q(t) = (x(t), y(t))$, 如果存在多项式 $\delta(t)$, 使得, 即 $\delta(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ 是勾股数, 称平面参数多项式曲线 $q(t)$ 为 Pythagorean-hodograph 曲线, 简称 PH 曲线。

定理 1 [6]: 设 $u(t), v(t), w(t)$ 为非常数的实多项式且 $(u(t), v(t)) = 1$, 则导数具有如下形式:

$$x'(t) = w(t)(u^2(t) - v^2(t)), y'(t) = 2w(t)u(t)v(t)$$

的平面参数曲线 $q(t) = (x(t), y(t))$ 为 PH 曲线。

2.3. DP-PH 曲线几何特征条件

下面推导 DP 曲线成为 PH 曲线的条件。

给定两个线性多项式 $a(t)$ 和 $b(t)$:

$$a(t) = a_0 D_0^1(t) + a_1 D_1^1(t)$$

$$b(t) = b_0 D_0^1(t) + b_1 D_1^1(t)$$

假设 $a_0 : a_1$ 和 $b_0 : b_1$ 的比率不等, 利用三次 DP 基函数

$[D_{0,3}(t), D_{1,3}(t), D_{2,3}(t), D_{3,3}(t)] = [(1-t)^3, t(1-t)(2-t), t(1-t)(1+t), t^3]$, 求得:

$$a(t)^2 - b(t)^2 = 2(a_0^2 - b_0^2)D_0^2(t) + 3(a_0 a_1 - b_0 b_1)D_1^2(t) + 2(a_1^2 - b_1^2)D_2^2(t)$$

$$2a(t)b(t) = 4a_0 b_0 D_0^2(t) + 3(a_0 b_1 + a_1 b_0)D_1^2(t) + 4a_1 b_1 D_2^2(t)$$

$$x(t) = \int_0^t a(t)^2 - b(t)^2 dt = \sum_{k=0}^3 x_k D_k^3(t)$$

$$y(t) = \int_0^t 2a(t)b(t) dt = \sum_{k=0}^3 y_k D_k^3(t)$$

所以 PH-DP 曲线的控制点为 $p_k = (x_k, y_k)$

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \frac{1}{3}(2(a_0^2 - b_0^2), 4a_0 b_0) \\ p_2 = p_1 + \frac{1}{3}(3(a_0 a_1 - b_0 b_1), 3(a_0 a_1 + b_0 b_1)) \\ p_3 = p_2 + \frac{1}{3}(2(a_1^2 - b_1^2), 4a_1 b_1) \end{cases}$$

其中 p_0 是任意给定的。进一步的, 给出上述条件公式(2.1)的几何解释, 即 DP-PH 曲线几何特征条件。

定理 2: 对于任意给定的一个三次 DP 曲线 $q(t)$, 其控制顶点 $p_k (k = 0, 1, 2, 3)$, 控制多边形的各边长为 L_1, L_2, L_3 , $d_{j,k}$ 表示 p_j 和 p_k 之间的距离, $(j \neq k)$, $L_1 = d_{01}, L_2 = d_{12}, L_3 = d_{23}, L = d_{02}$ 顶点 p_1, p_2 对应的角为 θ_1, θ_2 若满足条件

$$2L = 3\sqrt{L_1 L_3} \text{ 和 } \theta_1 = \theta_2$$

$q(t)$ 就是 PH-DP 曲线。

证明

若 $q(t)$ 满足 PH 曲线的条件公式(2.1), 可以得到:

$$\begin{cases} d_{01} = \frac{2(a_0^2 + b_0^2)}{3} \\ d_{12} = \sqrt{2(a_0^2 a_1^2 + b_0^2 b_1^2)} \\ d_{23} = \frac{2(a_1^2 + b_1^2)}{3} \end{cases}$$

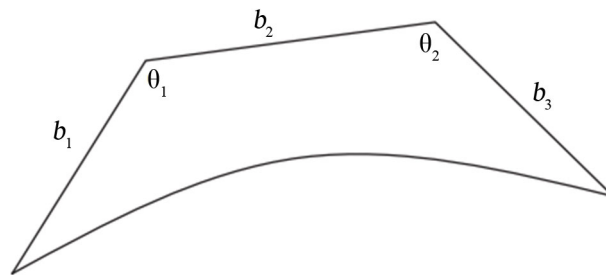


Figure 1. The geometric form of the cubic DP-PH curve
图 1. 三次 DP-PH 曲线控制多边形

如图 1 可以得出:

$$\cos \theta_1 = \frac{d_{01}^2 + d_{12}^2 - d_{02}^2}{2d_{12}d_{23}}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{d_{12}^2 + d_{23}^2 - d_{13}^2}{2d_{12}d_{23}}$$

根据公式(2.1)给出 d_{02}, d_{13} , 则

$$d_{02}^2 = \frac{4}{9}(a_0^2 + b_0^2)[9(a_0 + a_1)^2 + 9(b_0 + b_1)^2]$$

$$d_{13}^2 = \frac{4}{9}(a_1^2 + b_1^2)[9(a_0 + a_1)^2 + 9(b_0 + b_1)^2]$$

得

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = \frac{-4(a_0 a_1 + b_0 b_1)}{3\sqrt{a_0^2 a_1^2 + b_0^2 b_1^2}}$$

可以推得 $\theta_1 = \theta_2$ 或 $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$, 进而比较与 $\sin \theta_1$ 和 $\sin \theta_2$, 计算两个角的正弦值, 即

$$\sin \theta_1 = \frac{(\Delta p_1 \times \Delta p_0) \cdot z}{d_{12}d_{01}}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{(\Delta p_2 \times \Delta p_1) \cdot z}{d_{23}d_{12}}$$

其中 z 是与 $q(t)$ 平面正交的单位向量, 将上述带入, 可得到

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 = \frac{4(a_1 b_0 - a_0 b_1)}{3\sqrt{a_0^2 a_1^2 + b_0^2 b_1^2}}$$

由此得出 $\theta_1 = \theta_2$ 。

并且根据条件公式(2.1)可得控制多边形边长之间的关系满足 $2L = 3\sqrt{L_1 L_3}$ 。

证毕。

3. 三次 DP-PH 曲线的几何构造方法

通过 DP-PH 控制多边形几何特征条件, 我们给出可以先通过构造控制多边形进而构造出三次 DP-PH 曲线的几何构造方法。

给定始末控制顶点 P_0, P_3 和任意点 O , 依次连接给定的三点, 并且令 $\frac{\|OP_3\|}{\|P_0O\|} = \rho \geq 1$, 角的范围为 $\pi > \angle P_0OP_3 = \theta > 0$ 。在边 P_0O 和 OP_3 分别取点 P_1, P_2 。设单位向量 $e_1 = O - P_0$, $e_2 = P_3 - O$ 。得到 P_1, P_2 坐标为:

$$\begin{cases} P_1 = \lambda e_1 + P_0 \\ P_2 = P_3 - \mu e_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

$0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ 。

以点 O 为原点, P_0O 为 x 轴建立直角坐标系。令 $P_1 = (1, 0)$, $e_1 = (-1, 0)$, $e_2 = \rho(\cos \theta, \sin \theta)$, 代入式(3.1)得到四个控制顶点的坐标为

$$\begin{cases} P_0 = (1, 0) \\ P_1 = (1 - \lambda, 0) \\ P_2 = (1 - \mu)\rho(\cos \theta, \sin \theta) \\ P_3 = \rho(\cos \theta, \sin \theta) \end{cases} \quad (3.2)$$

通过定理 2 中边 P_0O 和 OP_3 关系之比和推导出的控制多边形几何特征条件可以得出 DP 曲线控制顶点的中间两点 D_1, D_2 , 并得到如下关系式:

$$\angle D_2 D_1 P_0 = \angle P_3 D_2 D_1 \text{ 和 } 4|D_1 D_2|^2 = 9|D_1 P_0| * |P_3 D_2|,$$

由 $\frac{\|OP_3\|}{\|P_0O\|} = \rho \geq 1$ 得到 λ, μ 表达关系式如下:

$$1 - \lambda = \rho(1 - \mu) \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} |D_1 P_0| = \lambda \\ |P_3 D_2| = \rho + \lambda + 1 \\ |D_1 D_2|^2 = 2(1 - \lambda)^2 (1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (3.4)$$

由式(4), 得到关于参数 λ 的方程

$$(1 + 8 \cos \theta) \lambda^2 + (7 + 9\rho - 16 \cos \theta) \lambda + (8 \cos \theta - 8) = 0 \quad (3.5)$$

式(3.4)存在解

$$\lambda = \frac{(16 \cos \theta - 7 - 9\rho) \pm \sqrt{81(1 + \rho)^2 - 36\rho(8 \cos \theta + 1)}}{2(1 + 8 \cos \theta)} \quad (3.6)$$

令 $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\rho = 1$ 由式(3.3)得到 $\lambda = \mu = \frac{2}{5}$, 把式(3.3)和(3.6)代入式(3.2)中, 从而得出 $D_1 = \left(\frac{3}{5}, 0\right)$, $D_2 = \left(\frac{1}{5}, \frac{\sqrt{3}}{5}\right)$, 取点 p_0, D_1, D_2, P_3 , 画图如图 2 和图 3:

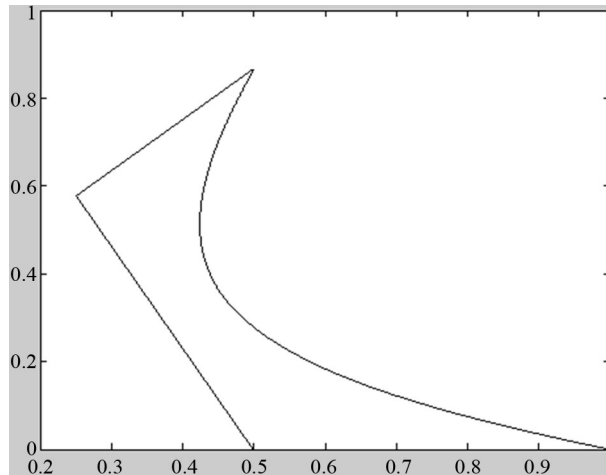


Figure 2. DP curve
图 2. DP 曲线

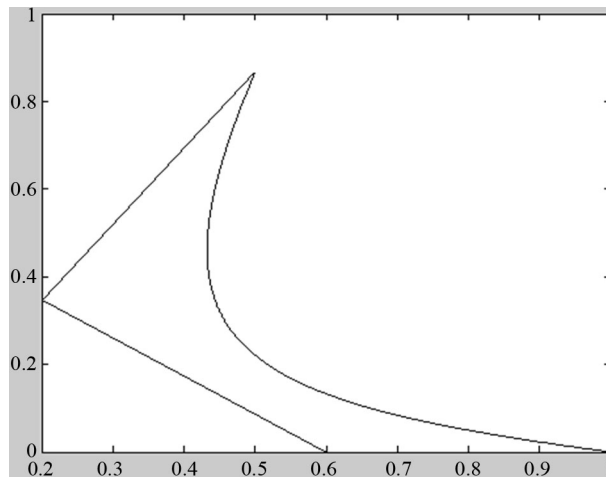


Figure 3. DP-PH curve
图 3. DP-PH 曲线

4. 误差分析和举例

定义 2: 设 $P(t)$, $D(t)$ 是两条三次曲线, 这两条曲线误差定义如下:

$$\varepsilon = \max_{t \in D} \sqrt{\langle P(t) - D(t), P(t) - D(t) \rangle} \quad (4.1)$$

给定控制顶点 P_i, D_i

定义三次 DP-PH 曲线为:

$$D(t) = \sum_{i=0}^3 D_i u_{i,3}(t)$$

则 DP 曲线和 DP-PH 曲线的误差表示如下:

$$\varepsilon = \int_0^a \left\| \sum_{i=0}^3 P_i u_{i,3}(t) - \sum_{i=0}^3 D_i u_{i,3}(t) \right\|^2 dt \leq a \max_{i=0,1,2} \|P_i - D_i\|$$

令 $n = \left\| \sum_{i=0}^3 P_i u_{i,3}(t) - \sum_{i=0}^3 D_i u_{i,3}(t) \right\|^2$, 则

$$n = (t^2 - 2t^3 + t^4) \left(\frac{(3+\sqrt{3})^2}{400} - \frac{3}{5} + \frac{(\sqrt{3}-3)^2}{400} t^2 \right),$$

从而

$$\varepsilon = \frac{6-3\sqrt{3}}{1400} a^7 - \frac{2-\sqrt{3}}{200} a^6 + \frac{27}{250} a^5 - \frac{126+3\sqrt{3}}{400} a^4 - \frac{19}{100} a^3$$

$$m = a \max_{t \in D} = \frac{3+\sqrt{8}}{60} a$$

当 $a < 0, \varepsilon < 0$, 当 $0 < a < 1, \varepsilon < m$, 当 $a > 1, \varepsilon < m$, 则得出两条曲线之间误差较小。

利用定理 2 中通过控制多边形几何特征条件求出的 DP-PH 曲线更逼近其控制多边形, 具有更好的逼近效果。

基金项目

国家自然科学基金(61702244,61502217); 辽宁省教育厅项目(901132)。

参考文献

- [1] Delgado, J. and Pena J.M. (2003) A Shape Preserving Representation with an Evaluation Algorithm of Linear Complexity. *Computer Aided Geometric Design*, **20**, 1-10.
- [2] Barsky, B.A. (1981) The Beta-Spline: A Local Representation Based on Shape Parameters and Functional Geometric Measures. PhD Dissertation. University of Utah, Salt Lake City.
- [3] 陈杰, 王国瑾. 一类带形状参数的 DP-NTP 曲线及其应用[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2011, 23(6): 1055-1060.
- [4] 陈福来, 吴晓勤, 朱秀云. 广义三次 DP 曲线[J]. 计算机科学, 2012, 39(12): 264-267.
- [5] 彭兴璇, 蒋欣昕, 谢宇迪. 一类带形状参数的三次 DP 曲线[J]. 计算机辅助设计和图形学报, 2018, 30(9): 1712-1718.
- [6] Farouki, R.T. and Sakkalis, T. (1990) Pythagorean-Hodograph Curves. *IBM Journal of Research and Development*, **34**, 736-752.
- [7] 郑志浩, 汪国昭. 基于 PH 曲线插值的圆锥曲线逼近[J]. 浙江大学学报, 2015, 49(12): 2290-2297.
- [8] 张伟红, 蔡亦青, 冯玉瑜. 圆弧的五次 PH 曲线等弧长逼近[J]. 计算机辅助几何设计与图形学报, 2010, 22(7): 1082-1086.
- [9] 方林聪, 汪国昭. 六次 PH 曲线 C^1 Hermite 插值[J]. 中国科学: 数学, 2014, 44(7): 799-804.