Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(12), 1881-1884**
Published Online December 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.812218

Hans汉斯

The Solution of a Type of Functional Set-Valued Stochastic Differential Equation

Jungang Li, Zhu Xue

Department of Statistics, North China University of Technology, Beijing
Email: jgli@ncut.edu.cn

Received: Nov. 8th, 2019; accepted: Nov. 25th, 2019; published: Dec. 2nd, 2019

Abstract

In this paper, we shall introduce set-valued and its properties, and discuss the functional set-valued stochastic differential equation. When the initial value is given, we shall prove the existence and uniqueness of solution of the type of functional set-valued stochastic differential equation.

Keywords

Functional, Set-Valued Equation, Solution, Existence, Uniqueness

一类泛函集值随机微分方程的解

李俊刚，薛　竹

北方工业大学理学院，北京
Email: jgli@ncut.edu.cn

收稿日期：2019年11月8日；录用日期：2019年11月25日；发布日期：2019年12月2日

摘　要

本文介绍了集值及其性质，泛函集值随机微分方程，在给定初值的情况下，给出了一类泛函集值随机微分方程的强解的存在性和唯一性的证明。

关键词

泛函，集值方程，解，存在性，唯一性

文章引用: 李俊刚, 薛竹. 一类泛函集值随机微分方程的解[J]. 应用数学进展, 2019, 8(12): 1881-1884.
DOI: 10.12677/aam.2019.812218

1. 前言及基础不等式

在许多金融、医学、控制等实际问题中，随机微分方程有着广泛的应用[1] [2] [3]。

本文给出 $K\left(\mathbb{R}^d\right)$ 表示 d-维欧氏空间的闭子集，$K_k\left(\mathbb{R}^d\right)$ 表示 d-维欧氏空间的紧子集。Hausdorff 距离定义如下：

$$d_H\left(A,B\right)=\max\left\{\sup_{a\in A} d\left(a,B\right),\sup_{b\in B} d\left(b,A\right)\right\}$$

其性质(见[4]引理 1.1.11)

$$d_H\left(A+B,C+D\right)\le d_H\left(A,C\right)+d_H\left(B,D\right) \tag{1}$$

更多的记号详见[4]。

关于集值 Lebesgue 积分的不等式(见[5]定理 5)，

$$d_H^2\left(\int_0^t F\left(s,\omega\right)\mathrm{d}s,\int_0^t G\left(s,\omega\right)\mathrm{d}s\right)\le t\int_0^t d_H^2\left(F\left(s,\omega\right),G\left(s,\omega\right)\right)\mathrm{d}s \tag{2}$$

令 $\tau>0$，$C\left(\left[-\tau,0\right];K\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ 是所有的从 $\left[-\tau,0\right]$ 到 $K\left(\mathbb{R}^d\right)$ 的 Hausdorff 距离连续的集值映射的全体。集值泛函随机微分方程

$$\mathrm{d}F\left(t\right)=b\left(t,F_t\right)\mathrm{d}t+\sigma\left(t,F_t\right)\mathrm{d}G\left(t\right),\ t\in I$$

其中，$F_t=\left\{F\left(t+\theta\right):-\tau\le\theta\le 0\right\}$ 是 $C\left(\left[-\tau,0\right];K\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$-值随机过程，映射 $b:I\times C\left(\left[-\tau,0\right];K\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\to K\left(\mathbb{R}^d\right)$ 是可测的集值随机过程，映射 $\sigma:I\times C\left(\left[-\tau,0\right];K\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\to\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^m$ 是有界可料可测的随机过程，$G\left(t\right)$ 是集值平方可积鞅(见[6])。

2. 初值问题

不同于一般的随机微分方程，它应该是包含 $F\left(t\right)$ 在 $\left[-\tau,0\right]$ 的所有信息，而不是只有 $F\left(0\right)$ 是已知的，因此假设：

$F\left(0\right)=\xi=\left\{\xi\left(\theta\right):-\tau\le\theta\le 0\right\}$ 是 $\mathcal{A}_0$ 可测的 $C\left(\left[-\tau,0\right];K\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$-值的随机映射，且满足 $\mathbb{E}\left(\sup_{\theta\in[-\tau,0]}\|\xi\|_K^2\right)<\infty$。

3. 方程解的存在唯一性证明

$$F\left(t\right)=\xi\left(0\right)+\left(L\right)\int_0^t b\left(s,F_s\right)\mathrm{d}s+\left(M\right)\int_0^t\sigma\left(s,F_s\right)\mathrm{d}G\left(s\right),\ t\in I$$

在集值泛函随机积分方程中，第一部分积分 $\left(L\right)\int_0^t b\left(s,F_s\right)\mathrm{d}s$ 是集值随机 Lebesgue 积分；第二部分积分 $\left(M\right)\int_0^t\sigma\left(s,F_s\right)\mathrm{d}G\left(s\right)$ 是随机过程关于集值平方可积鞅的随机积分(见[6])。为简化，在本文中我们省去了集值随机 Lebesgue 积分前的“(L)”及关于集值平方可积鞅的随机积分前的“(M)”。

1) 线性增长条件：对 $\forall\varphi\in C\left(\left[-\tau,0\right];K_k\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$，$\exists$ 常数 a，s.t.对 $\forall t\in I$

$$\left\|b\left(t,\varphi\right)\right\|_K^2+\left\|\sigma\left(t,\varphi\right)\right\|^2\le a^2\left(1+\sup_{\theta\in[-\tau,0]}\left\|\varphi\left(\theta\right)\right\|_K^2\right)$$

2) Lipschitz 连续条件：对 $\forall \varphi,\phi \in C\left(\left[-\tau,0\right];K_k\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$，$\exists$ 常数 $\bar{a}$，s.t.对 $\forall t \in I$

$$d_H^2\left(b\left(t,\varphi\right),b\left(t,\phi\right)\right)+\left\|\sigma\left(t,\varphi\right)-\sigma\left(t,\phi\right)\right\|^2 \le \bar{a}^2 \sup_{\theta\in[-\tau,0]} d_H^2\left(\varphi\left(\theta\right),\phi\left(\theta\right)\right)$$

3) 集值积分不等式：

$$Ed_H^2\left(\int_0^t \sigma\left(s,\varphi\right)\mathrm{d}G_s,\int_0^t \sigma\left(s,\phi\right)\mathrm{d}G_s\right) \le E\int_0^t \sup_{\theta\in[-\tau,0]} d_H^2\left(\varphi\left(\theta\right),\phi\left(\theta\right)\right)\mathrm{d}s$$

对于任意满足条件且为紧集值的初值 F_0 (即 F_0 为 $C\left(\left[-\tau,0\right];K_k\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ 值映射)，集值泛函微分方程存在唯一强解。

证明：

存在性

定义 $F_0^0=\xi, F^0\left(t\right)=\xi\left(0\right),\forall t\in I$，并且令 $F_0^n=\xi, n=0,1,2,\cdots$，利用 Picard 迭代，对任意 $t\in I$，定义

$$F^{n+1}\left(t\right)=\xi\left(0\right)+\int_0^t b\left(s,F_s^n\right)\mathrm{d}s+\int_0^t \sigma\left(s,F_s^n\right)\mathrm{d}G\left(s\right)$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\sup\nolimits_{r\in[0,t]} d_H^2\left(F^1\left(r\right),F^0\left(r\right)\right)\\&=\mathbb{E}\sup\nolimits_{r\in[0,t]} d_H^2\left(\xi\left(0\right)+\int_0^r b\left(s,F_s^0\right)\mathrm{d}s+\int_0^r \sigma\left(s,F_s^0\right)\mathrm{d}G\left(s\right),\xi\left(0\right)\right)\end{aligned}$$

由(1)式，Hausdorff 距离的性质，

$$\begin{aligned}\text{上式}&=\mathbb{E}\sup\nolimits_{r\in[0,t]}\left(\left\|\int_0^t b\left(s,F_s^0\right)\mathrm{d}s\right\|_K+\left\|\int_0^t \sigma\left(s,F_s^0\right)\mathrm{d}G\left(s\right)\right\|_K\right)^2\\&\le 2\mathbb{E}\sup\nolimits_{r\in[0,t]}\left\|\int_0^t b\left(s,F_s^0\right)\mathrm{d}s\right\|_K^2+2\mathbb{E}\sup\nolimits_{r\in[0,t]}\left\|\int_0^t \sigma\left(s,F_s^0\right)\mathrm{d}G\left(s\right)\right\|_K^2\end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和集值积分不等式，

$$\begin{aligned}\text{上式}&\le 2\mathbb{E}\left(\int_0^t |1|^2\,\mathrm{d}s\int_0^t\left\|b\left(s,F_s^0\right)\right\|_K^2\,\mathrm{d}s\right)+2\mathbb{E}\int_0^t \sup\nolimits_{\theta\in[-\tau,0]}\left\|F_s^0\right\|_K^2\,\mathrm{d}s\\&=2t\mathbb{E}\int_0^t\left\|b\left(s,F_s^0\right)\right\|_K^2\,\mathrm{d}s+2\mathbb{E}\int_0^t \sup\nolimits_{\theta\in[-\tau,0]}\left\|F_s^0\right\|_K^2\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

由线性增长条件，可知

$$\begin{aligned}\text{上式}&\le 2t\mathbb{E}\int_0^t a^2\left(1+\sup\nolimits_{\theta\in[-\tau,0]}\left\|F_s^0\right\|_K^2\right)\mathrm{d}s+2\mathbb{E}\int_0^t \sup\nolimits_{\theta\in[-\tau,0]}\left\|F_s^0\right\|_K^2\,\mathrm{d}s\\&\le 2a^2t^2\left(1+\mathbb{E}\sup\nolimits_{\theta\in[-\tau,0]}\left\|\xi\left(\theta\right)\right\|_K^2\right)+2t\mathbb{E}\sup\nolimits_{\theta\in[-\tau,0]}\left\|\xi\left(\theta\right)\right\|_K^2\\&\le 2a^2T^2+2\left(a^2T+1\right)T\mathbb{E}\sup\nolimits_{\theta\in[-\tau,0]}\left\|\xi\left(\theta\right)\right\|_K^2<\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\sup\nolimits_{r\in[0,t]} d_H^2\left(F^{n+1}\left(r\right),F^n\left(r\right)\right)\\&=\mathbb{E}\sup_{r\in[0,t]} d_H^2\left(\xi\left(0\right)+\int_0^r b\left(s,F_s^n\right)\mathrm{d}s+\int_0^r \sigma\left(s,F_s^n\right)\mathrm{d}G\left(s\right),\xi\left(0\right)+\int_0^r b\left(s,F_s^{n-1}\right)\mathrm{d}s+\int_0^r \sigma\left(s,F_s^{n-1}\right)\mathrm{d}G\left(s\right)\right)\\&\le\mathbb{E}\sup_{r\in[0,t]}\left(d_H\left(\int_0^r b\left(s,F_s^n\right)\mathrm{d}s,\int_0^r b\left(s,F_s^{n-1}\right)\mathrm{d}s\right)+d_H\left(\int_0^r \sigma\left(s,F_s^n\right)\mathrm{d}G\left(s\right),\int_0^r \sigma\left(s,F_s^{n-1}\right)\mathrm{d}G\left(s\right)\right)\right)^2\\&\le 2\mathbb{E}\sup_{r\in[0,t]} d_H^2\left(\int_0^r b\left(s,F_s^n\right)\mathrm{d}s,\int_0^r b\left(s,F_s^{n-1}\right)\mathrm{d}s\right)+2\mathbb{E}\sup_{r\in[0,t]} d_H^2\left(\int_0^r \sigma\left(s,F_s^n\right)\mathrm{d}G\left(s\right),\int_0^r \sigma\left(s,F_s^{n-1}\right)\mathrm{d}G\left(s\right)\right)\end{aligned}$$

由(2)式，闭集值 Lebesgue 积分的不等式和集值积分不等式可得

$$上式 \le 2t\mathbb{E}\int_0^t d_H^2\left(b\left(s,F_s^n\right),b\left(s,F_s^{n-1}\right)\right)\mathrm{d}s + 2\mathbb{E}\int_0^t \sup_{\theta\in[-\tau,0]} d_H^2\left(F_s^n,F_s^{n-1}\right)\mathrm{d}s$$

由 Lipschitz 连续条件，可得

$$\begin{aligned}
上式 &\le 2t\mathbb{E}\int_0^t \bar{a}^2 \sup_{\theta\in[-\tau,0]} d_H^2\left(F_s^n,F_s^{n-1}\right)\mathrm{d}s + 2\mathbb{E}\int_0^t \sup_{\theta\in[-\tau,0]} d_H^2\left(F_s^n,F_s^{n-1}\right)\mathrm{d}s \\
&\le 2\left(\bar{a}^2T+1\right)\mathbb{E}\int_0^t \sup_{\theta\in[-\tau,0]} d_H^2\left(F_s^n,F_s^{n-1}\right)\mathrm{d}s \\
&\le 2\left(\bar{a}^2T+1\right)\mathbb{E}\int_0^t \sup_{r\in[-\tau,s]} d_H^2\left(F^n(r),F^{n-1}(r)\right)\mathrm{d}s \\
&\le 2\left(\bar{a}^2T+1\right)\mathbb{E}\int_0^t \left(\sup_{r\in[-\tau,0]} d_H^2\left(F^n(r),F^{n-1}(r)\right) + \sup_{r\in[0,s]} d_H^2\left(F^n(r),F^{n-1}(r)\right)\right)\mathrm{d}s \\
&\le 2\left(\bar{a}^2T+1\right)\mathbb{E}\int_0^t \sup_{r\in[0,s]} d_H^2\left(F^n(r),F^{n-1}(r)\right)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

定义 $\Delta_n(t) = \mathrm{E}\sup_{r\in[0,t]} d_H^2\left(F^{n+1}(r),F^n(r)\right)$，因此有

$$\begin{aligned}
\Delta_n(T) &\le 2\left(\bar{a}^2T+1\right)\mathbb{E}\int_0^T \sup_{0\le r\le s_1} d_H^2\left(F^n(r),F^{n-1}(r)\right)\mathrm{d}s_1 \\
&\le \left(2\left(\bar{a}^2T+1\right)\right)^n \int_0^T\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{n-1}} \Delta_1(s_n)\,\mathrm{d}s_n\mathrm{d}s_{n-1}\cdots\mathrm{d}s_1 \\
&\le \left(2\left(\bar{a}^2T+1\right)\right)^n \frac{1}{n!}\Delta_1(T)T^n
\end{aligned}$$

故有 $\sum_{k=n}^{\infty}\Delta_k(T)\to 0\ (n\to\infty)$ 且 $\left(K_k\left(\mathbb{R}^d\right),d_H\right)$ 为完备距离空间，则存在 $F(t)\in K_k\left(\mathbb{R}^d\right)$，使得，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I} d_H\left(F^n(t),F(t)\right) = 0,\ a.s.,$$

容易证明 $F(t)$ 满足集值泛函随机微分方程且 $F(t)$ 为连续适应的。

唯一性

采用反证法，假设存在 $X(t),Y(t)\in K_k\left(\mathbb{R}^d\right)$ 均为集值泛函随机微分方程的强解，$X(t)\ne Y(t)$，记

$$\Delta(t) = \mathrm{E}\sup_{r\in[0,t]} d_H^2\left(X(r),Y(r)\right)$$

利用上面同样的方法，得

$$\Delta(t) \le 2\left(\bar{a}^2T+1\right)\mathbb{E}\int_0^t \sup_{r\in[0,s]} d_H^2\left(X(r),Y(r)\right)\mathrm{d}s$$

由 Gronwall 不等式，有 $\Delta(T)\le 0$，即唯一性成立。

参考文献

[1] 蒲兴成，张毅. 随机微分方程及其在数理金融中的应用[M]. 北京：科学出版社, 2010.

[2] 厄克森达尔，刘金山，吴付科. 随机微分方程导论与应用[M]. 北京：科学出版社, 2012.

[3] Mao, X.R. (2003) Numerical Solutions of Stochastic Functional Differential Equations. *Journal of Computation and Mathematics*, **6**, 141-161. https://doi.org/10.1112/S1461157000000425

[4] Li, S.M., Ogura, Y. and Kreinovich, V. (2002) Limit Theorems and Applications of Set-Valued and Fuzzy Set-Valued Random Variables. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9932-0

[5] Li, J.G. and Li, S.M. (2009) Ito Type Set-Valued Stochastic Differential Equation. *Journal of Uncertain Systems*, **3**, 52-63.

[6] Li, S.M., Li, J.G. and Li, X.H. (2010) Stochastic Integral with Respect to Set-Valued Square Integrable Martingales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **370**, 659-671. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.04.040