Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(3), 408-413**
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.93049

Multiple Online List Coloring

Jiayan Yan

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 673863520@qq.com

Received: Mar. 1st, 2020; accepted: Mar. 16th, 2020; published: Mar. 24th, 2020

Abstract

In online list coloring (introduced by Zhu and by Schauz in 2009), the list configuration of the graph is given online as the online coloring game proceeds. James Carraher, Sarah Loeb and Thomas Mahoney etc. proved a partial result toward the paint analogue of Ohba's Conjecture. We extend this result to multiple online coloring.

Keywords

Multiple Online List Coloring, Ohba's Conjecture

多重在线列表染色

颜嘉燕

浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江 金华
Email: 673863520@qq.com

收稿日期：2020年3月1日；录用日期：2020年3月16日；发布日期：2020年3月24日

摘　要

在2009年Zhu和Schauz分别提出的在线列表染色中，图的列表配置是随着在线染色游戏的进行在线给出的。James Carraher，Sarah Loeb和Thomas Mahoney等人证明了在线版本的Ohba猜想的一部分。我们将这个结果推广到了多重染色中。

关键词

多重在线列表染色，Ohba猜想

文章引用: 颜嘉燕. 多重在线列表染色[J]. 应用数学进展, 2020, 9(3): 408-413.
DOI: 10.12677/aam.2020.93049

1. 引言

设G是一个图，f和g是由$V(G)$映射到$\mathbb{N}$的两个函数，其中对G中的任意一点v都满足$f(v)\ge g(v)$。G的一个f-列表配置是一个映射L，分配给G中的每一点v一个由$f(v)$个正整数组成的集合$L(v)$作为点v可以用的颜色。G的一个g-染色是一个映射S，分配给G中的每一点v一个由$g(v)$个颜色组成的集合$S(v)$，使得对G中任意相邻的两点u和v都满足$S(v)\cap S(u)=\varnothing$。对于$G$的一个列表配置$L$，$G$的一个$(L,g)$-染色是$G$的一个$g$-染色，且对于$G$中每个点$v$都满足$S(v)\subseteq L(v)$。如果$G$有一个$(L,g)$-染色，就称$G$是$(L,g)$-可染的。称$G$是$(f,g)$-可选当且仅当$G$对于任意$f$-列表配置$L$，都是$(L,g)$-可染的。根据定义，我们可以得到如下结论：

- 如果$g\equiv b$，其中b是一个常数，则(f,g)-可选就是(f,b)-可选。
- 如果$b=1$，则(f,b)-可选就是f-可选。
- 如果$f\equiv a,g\equiv b$，其中a和b都是常数，则(f,g)-可选就是(a,b)-可选。

列表染色已经有了很多广泛的研究。一般，我们称最小的使得G是k-可选的正整数k为图G的选择数，用$\chi_l(G)$表示。

在本文中，我们还考虑了列表染色的另一个版本。在2009年，Zhu和Schauz [1]介绍了由列表染色推广而来的一种染色，称为在线列表染色。在线列表染色的定义可以通过一个双人游戏来表示。

定义1：设G是一个图，f和g是两个映射$f,g:V(G)\to\mathbb{N}$，G的(f,g)-列表染色游戏由两个玩家组成，分别叫Lister和Painter。游戏的开始，G中的每个点v都有$f(v)$个筹码。在游戏的每一轮i：

Lister先从$V(G)$中还没有染到$g(v)$个颜色的点中选一个非空子集V_i，同时，V_i中的每个点都将减少一个筹码；而玩家Painter将从V_i中选择一个独立集X_i，给X_i中每个点染颜色i。

如果存在某个正整数m使得在游戏的第m步时，有一个点v已经没有筹码了并且这个点还没有被染到$g(v)$个颜色，那么Lister赢了。

否则，也就是在某一步，每个点v都已经被染了$g(v)$个颜色。这个情况，我们就称Painter赢了游戏。

如果Painter在(f,g)-列表染色游戏中有一个赢的策略，那么我们就称G是在线(f,g)-可选的。当f和g是两个常数函数$f\equiv a,g\equiv b$时，称G是在线(a,b)-可选的。如果$g\equiv 1$，则在线(f,g)-可选就是在线f-可选。

我们称最小的使得G是在线k-可选的正整数k为图G的在线选择数，用$\chi_p(G)$表示。根据定义我们可以知道对于所有图G，都有$\chi_p(G)\ge\chi_l(G)$且$\chi_l(G)\ge\chi(G)$。

Ohba [2]在2002年提出了一个猜想，一个图G如果满足$|V(G)|\le 2\chi(G)+1$，则这个图就满足$\chi(G)=\chi_l(G)$。这个猜想已经被Noel，Reed和Wu [3]证明了是正确的。

定理1：如果图G满足$|V(G)|\le 2\chi(G)+1$，则$\chi_l(G)=\chi(G)$。

而关于在线选择数$\chi_p(G)$，也有一个类似的猜想。

猜想1：如果图G满足$|V(G)|\le 2\chi(G)$，则$\chi_p(G)=\chi(G)$。

尽管已经有一些结果证明了存在图G满足$|V(G)|=2\chi(G)$是在线选择数等于选择数的，但是在线版本的Ohba猜想目前还没有被证明。关于在线版本的Ohba猜想的一个弱一点的版本的猜想是存在常数$c\in(1,2]$使得当$|V(G)|\le c\chi(G)$时，$\chi_p(G)=\chi(G)$。Kozik，Micek和Zhu [4]证明了如果$|V(G)|\le\chi(G)+\sqrt{\chi(G)}$，

则 $\chi_p(G)=\chi(G)$。Carraher，Loeb 和 Mahoney [5]证明了如果$|V(G)|\le\chi(G)+2\sqrt{\chi(G)-1}$，则 $\chi_p(G)=\chi(G)$。

定理 2： 如果$|V|\le\chi(G)+\sqrt{\chi(G)}$，则 $\chi_p(G)=\chi(G)$。

定理 3： 如果$|V|\le\chi(G)+2\sqrt{\chi(G)-1}$，则 $\chi_p(G)=\chi(G)$。

定理 4： 设 G 是一个独立数为 m 的图，且 $m\ge 2$，若

$$|V(G)|\le\frac{m^2-m+2}{m^2-3m+4}\chi(G)$$

则 $\chi_p(G)=\chi(G)$。

Erdös，Rubin 和 Taylor 提出了猜想如果 G 是 k-可选的，则 G 对于任意正整数 m 是(km,m)-可选的。然而，Zdeněk Dvořák，Xiaolan Hu 和 Jean-Sébastien Sereni [6]证明了若 $k\ge4$，存在图 G 是 k-可选的，但不是$(2k,2)$-可选的。但是这个图是不满足 Ohba 猜想的条件的，因此我们可以思考，在 Ohba 猜想的条件下，Erdös 猜想是否成立。也就是，当$V(G)\le2\chi(G)+1$，如果 $\chi(G)=k$，G 是否对于任意正整数 m 都是是(km,m)-可选的。

问题 1： 设 G 是一个简单图且 $\chi(G)=k$，如果$|V(G)|\le2\chi(G)+1$，G 是否对于任意正整数 m 都是(km,m)-可选的？

根据在线列表染色的定义，我们可以知道如果 G 对任意正整数 m 都是在线(km,m)-可选的，则 G 对任意正整数 m 都是在线(km,m)可选的。

因此对于在线列表染色，我们有类似的问题。

问题 2： 设 G 是一个简单图且 $\chi(G)=k$，如果$|V(G)|\le2\chi(G)$，G 是否对于任意正整数 m 都是在线(km,m)-可选的？

然而，在线版本的 Ohba 猜想目前还没有被证明，因此我们在弱 Ohba 猜想的结果上进行了推广，证明了如果$|V(G)|\le\chi(G)+2\sqrt{\chi(G)-1}$，则 G 是否对于任意正整数 m 都是在线(km,m)-可选的。

2. 主要定理证明

在这个部分，我们将证明如果对任意正整数 m，图 G 都是在线(km,m)列表可选的，那么我们可以通过加上一个点数有限制的独立集来构造一个对于任意正整数 m 都是在线$((k+1)m,m)$-列表可选的图。

在此之前，我们先介绍一些证明中将用到的表示方法。对于图 G 和图G'，将通过加上图 G 的点与图G'的点之间的所有的边联合所获得图称为图 G 和图G'的结合，用$G+G'$表示。对于图 G 的任意一点 v，令 $N_G(v)=\{x:(v,x)\in E(G)\}$，$N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$。

在证明主要定理之前，先介绍多重在线列表染色的一个重要性质。

定理 5: 对于图 G 中的一点 v，如果 $f(v)\ge\sum_{u\in N_G[v]}g(u)$，则 G 是在线(f,g)-列表可选的等价于 $G-v$ 是在线(f,g)-列表可选的。

我们称多重在线列表染色的这个性质为退化。利用这个性质，我们希望能由一个对任意正整数 m 都是在线(km,m)-列表可选的图构造出一个对任意正整数 m 都是在线$((k+1)m,m)$-列表可选的图。

当我们描述两个玩家的策略的时候，称 Lister 标记了集合 M，称 Painter 染了集合 M 中的一个独立集。

定理 6： 图 G 是一个色数为 k 的图，若对于任意正整数 m，G 都是在线(km,m)-列表可选的且 $|V(G)|\le k+\dfrac{1}{t-1}k$，那么$G+\overline{K_t}$ 也是在线$((k+1)m,m)$-列表可选的。

证明： 令$G'=G+\overline{K_t}$，在游戏的第 i 步，我们令 $fi(v)$表示 v 的现有筹码数，$g_i(v)$表示 v 待染的颜色数。所以，$f_0=(k+1)m$，$g_0=m$。如果第 i 轮中，v 被 Lister 选中，则 $f_{i+1}(v)=f_i(v)-1$，若没被 Lister 选中，则 $f_{i+1}(v)=f_i(v)$。若 v 被 Painter 染色，则 $g_{i+1}(v)=g_i(v)-1$，若 v 没被 Painter 染色，则 $g_{i+1}(v)=g_i(v)$，

根据定理 5，如果 $f_i(v) \ge \sum_{u\in N_{G'}[v]} g_i(u)$，则我们可以把 v 点去掉。

记 $\mathrm{diff}_i(v)\, f_i(v) - \sum_{u\in N_{G'}[v]} g_i(u)$。我们关注游戏过程中对于 T 中的点 v，$\mathrm{diff}_i(v)$ 的值。若 $\mathrm{diff} \ge 0$，则点 v 在之后的游戏中就可以忽略不计。

若 $\mathrm{diff}_i(v) < 0$，根据定义我们可以知道对于每个点 v，游戏每进行一轮，$|\mathrm{diff}(v)|$ 的值都不会减小。尤其，如果某一回合点 v 没有被 Lister 选中而点 v 的邻居被 Painter 染色，则 $|\mathrm{diff}(v)|$ 的值至少减少 1。因此，当某一回合点 v 遇到这种情况时，我们就称点 v 赚到了一次。

记 $T = \overline{K_t}$，且 $|V(T)| = t$。我们要证明 G' 是在线 $((k+1)m,m)-$列表可选的，也就是要证明在 G' 的在线 $((k+1)m,m)-$染色游戏中，Painter 有一个赢的策略。

我们用 $\mathcal{S}$ 表示 Painter 在 G 的 $(km,m)-$在线染色游戏中用的策略。Painter 在 G' 的在线 $((k+1)m,m)-$染色游戏中，除了有 m 次的特殊回合出现的时采用其他策略外，其他的回合仍按照策略 $\mathcal{S}$ 进行染色。

Painter 采取的策略是：每次都根据策略 $\mathcal{S}$ 选择 $M \cap V(G)$ 中的点染，除非情况(*)发生：

$T - M$ 中的每个点都已经至少赚了 μ 次，其中 $\mu = \dfrac{km}{t-1}$。

当(*)发生的时候，Painter 染 $M \cap T$ 否则，Painter 将根据策略 $\mathcal{S}$ 染 $M \cap G$。

下面我们证明该策略是 Painter 的一个赢的策略。假设 Painter 使用该策略，Lister 赢得游戏。

首先我们证明情形(*)至多发生了 $(m-1)$ 次。

假设情形(*)发生了 m 次，发生在游戏的第 j_1 轮，第 j_2 轮，...，j_m 轮。记第 i 轮时，Lister 选取的顶点的集合为 M_i，Painter 染色的顶点集为 I_i。令

$$Y_i = \{x \in T : 第i轮时, x赚了\mu次机会\}$$

对任意 $x \in Y_i$，$i = 1,2,\cdots,m$，根据定义，x 至少赚了 μ 次机会，而由于当 x 没有赚到时，即因为它被 Lister 选中了，因此 x 至多被 Lister 选中了 $(i-\mu)$ 次。即有 $f_i(x) \ge (k+1)m - (i-\mu)$。

根据定义，

$$\sum_{u\in N_{G'}[x]} g_i(u) \le (V(G)+1)m - i \le \left(k + \frac{1}{t-1}k + 1\right)m - i$$

因此 $f_i(x) \ge \sum_{u\in N_{G'}[x]} g_i(u)$。

根据情形(*)的定义，对 $i = 1,2,\cdots,m$，有

$$I_{j_i} \supseteq M_{j_i} \supseteq T - Y_{j_i}$$

且有，

$$Y_{j_1} \subseteq Y_{j_2} \subseteq \cdots \subseteq Y_{j_m}$$

所以 $I_{j_1}, I_{j_2}, \cdots, I_{j_m}$ 包含 $T - Y_{j_m}$。即 $T - Y_{j_m}$ 中的顶点在第 j_m 轮均已染色 m 次。而根据引理??，Y_{j_m} 中的顶点均不需再考虑，故 Painter 只需将 G 中的顶点染色即可。因为 G 的每个顶点有 $(k+1)m$ 枚筹码，扣除上述 m 次情形(*)，G 的每个顶点还有 km 枚筹码。因此根据策略 $\mathcal{S}$，Painter 可以将 G 的顶点染好。

即根据这个策略，Painter 可以将 G' 中的每个点都染到 m 个颜色。这与我们的假设相矛盾，因此情况(*)至多发生了 $(m-1)$ 次。

由于情况(*)至多发生了 $(m-1)$ 次。对于 T 中的每一个点 v 而言，点 v 被标记同时被染色的次数至多有 $(m-1)$ 次。且每当 Painter 染了 T 中的点时，T 中没有点赚到一次机会。并且，对于 Painter 染了 G 中点时的每一回合，T 中至少有一个点还没有赚到 μ 次机会。故 T 中的每一个点 v 被 Lister 标记但是没被 Painter 染色的次数至多为 $(t-1)\mu$ 次。

否则$T-v$中的每个点都赚了μ次机会，根据命题?? ，同理，$T-v$中的每个点都不需再考虑。在之后的游戏中，只要v被 Lister 选中，Painter 就将其染色直到点 v 被 Painter 染了 m 次。这样 Painter 将赢得游戏，不符合假设条件。

则此时v一共被 Lister 选中的次数至多为$(m-1)+(t-1)\mu$次。我们可以发现对于T中的每一点v，v一共被 Lister 选中的次数少于$(k+1)m$。因此 Lister 不可能赢得游戏。

综上，在G'的在线$((k+1)m,m)$−染色游戏中，Painter 有一个赢的策略。定理得证 ■

定理 7： 设G是一个图且$\chi(G)=k$，如果$|V(G)|\le\chi(G)+2\sqrt{\chi(G)-1}$，则对任意正整数$m$，$G$都是在线$(km,m)$-列表可选。

证明： 令$|V(G)|=n$。由于$\chi(G)=k$，我们可以假设G是一个完全k-部图。设s为图G中点数为 1 的部集的个数，其中$s>0$。否则，G中没有点数为 1 的部集，则$V(G)\ge2\chi(G)$，这和图G的点数矛盾。称图G中点数为 1 的部集中的点为单点。我们将对$k-s$进行归纳。

当$k-s=1$时，图G可以看成是由K_{k-1}联合一个点数为$n-k+1$的独立集T得到的图。根据定理 6，G是在线(km,m)-列表可选的。

当$k-s>1$时，令T是点数最少的非单点的部集，其中$|T|=t$，并且令$G'=G-T$。接下来我们将证明对任意正整数m，G'都是在线(km,m)-列表可选的，并且t的大小一定满足定理 2.1 的条件。

我们希望G'的点足够小使得我们可以利用归纳假设，也就是

$$n-t\le(k-1)+2\sqrt{k-2}$$

事实证明这是对的，因为当$t\ge2$且$k\ge3$时，

$$k+2\sqrt{k-1}-t\le k-1+2\sqrt{k-2}$$

接下来，我们将证明 t 的大小满足定理 6 的条件。我们希望$n-t\le k+\frac{1}{t-1}k$。也就是需要证明$k+2\sqrt{k-1}-t\le k+\frac{1}{t-1}k$，也就是

$$2\sqrt{k-1}\le t-1+\frac{k-1}{t-1}$$

该不等式成立且当$t-1=\sqrt{k-1}$时，等号成立，定理得证。 ■

对于一个图G，如果把图中的每个点替换成一个完全图K_m，如果两点在原图中是邻点，则在新图中对应的两个K_m完全图中的点也对应是邻点，我们将由图 G 都经过这样变换得到的新图记为$G[K_m]$。如果对于任意正整数m，$\chi(G[K_m])=\chi_p(G[K_m])$，则说明对任意正整数$m$，$G$都是在线$(\chi m,m)$-可选的。

定理 8： 设G是一个独立数为a的图，且$a\ge2$，若

$$|V(G)|\le\frac{a^2-a+2}{a^2-3a+4}\chi(G)$$

则对任意正整数m来说，G都是在线$(\chi m,m)$-可选的。

证明： 因为$|V(G[K_m])|=m|V(G))|$且$\chi(G[K_m])=m\chi(G)$，所以

$$|V(G[K_m])|=m|V(G)|\le m\frac{a^2-a+2}{a^2-3a+4}\chi(G)$$

因此$|V(G[K_m])|\le\frac{a^2-a+2}{a^2-3a+4}\chi(G[K_m])$。根据定理可知，$\chi(G[K_m])=\chi_p(G[K_m])$。则对任意正整数$m$来说，$G$都是在线$(\chi m,m)$-可选的。 ■

但是，这种方法不适用于 Ohba 猜想的多重列表染色的推广，只适用于点数与色数关系成比例的条件下列表染色的推广。同时，用此方法我们还可以得到以下结果。

定理 9： 设 G 是一个独立数为 a 的图，如果 $|V(G)| \le 2\chi(G)$ 且 $a \le 3$，则对任意正整数 m 来说，G 都是在线 $(\chi m, m)$-可选的。

参考文献

[1] Zhu, X. (2009) On-Line List Colouring of Graphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, **16**, 3665-3677. https://doi.org/10.37236/216

[2] Ohba, K. (2002) On Chromatic-Choosable Graphs. *Journal of Graph Theory*, **40**, 130-135. https://doi.org/10.1002/jgt.10033

[3] Noel, J.A.; Reed, B.A. and Wu, H. (2015) A Proof of a Conjecture of Ohba. *Journal of Graph Theory*, **79**, 86-102. https://doi.org/10.1002/jgt.21819

[4] Kozik, J., Micek, P. and Zhu, X. (2014) Towards an On-Line Version of Ohba's Conjecture. *European Journal of Combinatorics*, **36**, 110-121. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2013.07.003

[5] Carraher, J., Loeb, S., Mahoney, T., *et al.* (2014) Three Topics in Online List Coloring. *Journal of Combinatorics*, **5**, 115-130. https://doi.org/10.4310/JOC.2014.v5.n1.a5

[6] Dvořák, Z., Hu, X. and Sereni, J.-S. (2017) A 4-Choosable Graph That Is Not (8:2)-Choosable. *Journal of Graph Theory*, 1-4.