

# Asymptotic Behaviors for Some Initial Boundary Value Problems of Singularly Perturbed Equation Possessing Singularity

Yajie Du, Songlin Chen\*

School of Mathematical Science and Engineering, Anhui University of Technology, Ma'anshan Anhui  
Email: 1830225820@qq.com, slchen@ahut.edu.cn

Received: Mar. 19<sup>th</sup>, 2020; accepted: Apr. 2<sup>nd</sup>, 2020; published: Apr. 9<sup>th</sup>, 2020

---

## Abstract

In this paper, two types of singularly perturbed initial boundary value problems with singularity are studied. The research results show that this type of problem has a double-layer phenomenon. The asymptotic solutions of the equation are constructed by the matched asymptotic expansion method, and the uniform validity of the asymptotic solutions is proved by the differential inequality theory.

## Keywords

Singularly Perturbed Problem, Double Layer, Matching Method, Singularity, Uniformly Valid

---

# 几类具有奇性的奇摄动方程的初边值问题的渐近性态

杜亚洁, 陈松林\*

安徽工业大学, 数理科学与工程学院, 安徽 马鞍山  
Email: 1830225820@qq.com, slchen@ahut.edu.cn

收稿日期: 2020年3月19日; 录用日期: 2020年4月2日; 发布日期: 2020年4月9日

---

## 摘 要

本文研究了两类具有奇性的奇摄动初边值问题, 研究结果表明此类问题具有重边界层现象。利用匹配渐近展开法构造出了问题的形式渐近解, 同时, 用微分不等式理论证明了渐近解的一致有效性。

\*通讯作者。

## 关键词

奇摄动问题, 重边界层, 匹配法, 奇性, 一致有效性

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在自然科学中的很多问题都可以用带有小参数的数学模型[1] [2]来进行描述, 这类问题统称为摄动问题。在奇摄动问题中, 很多学者揭示了非一致区域内的各种层性质, 如尖层、内层、双重层[3]等, 出现这种性态变化的原因之一可能是奇摄动问题存在转向点。通常情况下, 奇摄动问题的解在转向点处会产生性态的变化且研究过程较复杂, 又由于带有奇性的奇摄动问题本身就是一个转向点问题[4] [5], 故研究具有奇性的奇摄动问题就变得更有意义、更有趣了。因此, 本文研究了具有奇性的奇摄动初值问题和边值问题, 探讨其解具有怎样的性态。

## 2. 带有奇性的二阶线性奇摄动边值问题

Mark H. Holmes 曾在文献[6]中讨论了如下的带有奇性的奇摄动边值问题:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 y'' + x^3 y' - \varepsilon y &= x^3, \quad x \in (0, 1) \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta \end{aligned} \quad (2.1)$$

Holmes 研究发现, 此奇摄动问题在左边界  $x=0$  处存在重边界层现象, 显然这种现象是由于次高阶导数前具有奇性而产生的。由于上述问题是一个变系数问题, 没有一般的求解公式, 因而寻找其渐近近似解便显得有必要。在此基础上, 我们将讨论上述方程的内层现象。即如下的边值问题:

$$\varepsilon^3 y'' + x^3 y' - \varepsilon y = x^3, \quad x \in (-1, 1) \quad (2.2)$$

$$y(-1) = \alpha \quad (2.3)$$

$$y(1) = \beta \quad (2.4)$$

此奇摄动边值问题与 Holmes 的问题相同之处在于都是具有奇性的奇摄动边值问题。不同之处是 Holmes 的问题的奇性位于区间的端点  $x=0$  处, 而问题(2.2)-(2.4)的奇性位于区间内部的  $x=0$  处, 此时方程中  $y'$  前的系数具有变号的现象, 故而是一个转向点问题, 因而其解的性态可能更复杂。

### 2.1. 外部解展开式

因为  $y'$  的系数在  $(0, 1)$  上为正, 在  $(-1, 0)$  为负。根据经典的奇异摄动研究结果, 可以假设此奇摄动边值问题在  $x=0$  处有内部层, 可分别考虑其左内部层和右内部层。

问题(2.2)-(2.4)的左退化问题为:

$$\begin{aligned} x^3 y_0^{-\prime} &= x^3 \\ y_0^{-}(-1) &= \alpha \end{aligned} \quad (2.5)$$

右退化问题为:

$$\begin{aligned}x^3 y_0^{+'} &= x^3 \\ y_0^+(1) &= \beta\end{aligned}\quad (2.6)$$

记外部解为  $y(x, \varepsilon)$ , 设其关于  $\varepsilon$  的幂级数的形式展式如下:

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i y_i(x) \quad (2.7)$$

将(2.7)式代入(2.2)式, 合并  $y$  的同次幂项, 并令对应项的系数为零, 便逐次得到外部解满足的方程。特别地, 若分别运用左边界条件和右边界条件, 可分别得到左首次外展式:

$$y_0^-(x) = x + \alpha + 1 \quad (2.8)$$

这里,  $-1 \leq x < 0$ 。

和右首次外展式:

$$y_0^+(x) = x + \beta - 1 \quad (2.9)$$

这里,  $0 < x \leq 1$ 。

## 2.2. 内部解展开式

下面寻找问题的内部解。为了研究解在  $x=0$  处的性态, 我们在  $x=0$  处引入伸展变量:

$$\hat{x} = \frac{x}{\varepsilon^\lambda} \quad (2.10)$$

即  $x = \varepsilon^\lambda \hat{x}$ , ( $\lambda > 0$ ), 将(2.10)式代入(2.2)式, 我们得到:

$$\varepsilon^{3-2\lambda} \frac{d^2 \hat{Y}}{d\hat{x}^2} + \varepsilon^{2\lambda} \hat{x}^3 \frac{d\hat{Y}}{d\hat{x}} - \varepsilon \hat{Y} = \varepsilon^{3\lambda} \hat{x}^3 \quad (2.11)$$

由于  $\lambda > 0$ , 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,  $O(\varepsilon^{3\lambda})$  项与  $O(\varepsilon^{2\lambda})$  项相比为小量, 因此在对式子(2.11)进行平衡时, 这两项只保留  $O(\varepsilon^{2\lambda})$  项。

特异极限可以通过平衡(2.11)中的任意两项确定。

若平衡式子(2.11)中的第一, 二两项, 有  $3-2\lambda = 2\lambda$ , 解得  $\lambda = \frac{3}{4}$ , 则(2.11)式变为:

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 \check{Y}}{d\check{x}^2} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \check{x}^3 \frac{d\check{Y}}{d\check{x}} - \varepsilon \check{Y} = \varepsilon^{\frac{9}{2}} \check{x}^3 \quad (2.12)$$

因为  $1 < \frac{3}{2}$ , 所以(2.12)式左右不能平衡, 因此这种情况舍去。

若平衡式子(2.11)中的第一, 三两项, 有  $3-2\lambda = 1$ , 即  $\lambda = 1$ , 所以(2.11)式变为:

$$\varepsilon \frac{d^2 \check{Y}}{d\check{x}^2} + \varepsilon^2 \check{x}^3 \frac{d\check{Y}}{d\check{x}} - \varepsilon \check{Y} = \varepsilon^3 \check{x}^3 \quad (2.13)$$

此时,  $2, 3 > 1$ , 所以(2.13)式能平衡, 因此这种情况需要考虑在内。

若平衡式子(2.11)中的第二, 三两项, 有  $2\lambda = 1$ , 整理得  $\lambda = \frac{1}{2}$ , 所以(2.11)式变为:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \bar{Y}}{d\bar{x}^2} + \varepsilon \bar{x}^3 \frac{d\bar{Y}}{d\bar{x}} - \varepsilon \bar{Y} = \varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{x}^3 \quad (2.14)$$

因为  $2\frac{3}{2} > 1$ , (2.14)式能平衡, 因此这种情况也需要考虑。

当  $\lambda=1$  时的伸展变量为  $\tilde{x} = \frac{x}{\varepsilon}$ , 刻画了一个接近  $x=0$  的层, 我们称之为内-内层; 当  $\lambda = \frac{1}{2}$  时, 伸展变量为  $\bar{x} = \frac{x}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$ , 刻画了一个介于外部展开式和内-内层之间的一层, 我们称之为内层, 因而该问题在  $x=0$  处呈现重边界层现象。

将(2.13)中的  $\tilde{Y}(\tilde{x}, \varepsilon)$  展开成关于  $\varepsilon$  的幂级数的形式如下:

$$\tilde{Y}(\tilde{x}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i \tilde{Y}_i(\tilde{x})$$

代入(2.13)式, 可以得到首项  $\tilde{Y}_0$  的方程:

$$\frac{d^2 \tilde{Y}_0}{d\tilde{x}^2} - \tilde{Y}_0 = 0 \tag{2.15}$$

等式(2.15)两边进行积分, 从而有

$$\tilde{Y}_0(\tilde{x}) = c_1 e^{-\tilde{x}} + c_2 e^{\tilde{x}} \tag{2.16}$$

当  $0 < x < 1$  时, 我们取(2.16)式中的  $c_2 = 0$ , 因为若  $c_2 \neq 0$ ,  $\tilde{Y}_0(\tilde{x})$  会呈现指数增长, 使它无法与内层匹配起来。则(2.16)式变为:

$$\tilde{Y}_0(\tilde{x}) = c_1 e^{-\tilde{x}} \tag{2.17}$$

同理, 当  $-1 < x < 0$  时, 我们取  $c_1 = 0$ , 所以(2.16)式变为:

$$\tilde{Y}_0(\tilde{x}) = c_2 e^{\tilde{x}} \tag{2.18}$$

同理将(2.14)式中的  $\bar{Y}(\bar{x}, \varepsilon)$  展开成关于  $\varepsilon$  的幂级数的形式:

$$\bar{Y}(\bar{x}, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon^j \bar{Y}_j(\bar{x}) \tag{2.19}$$

代入(2.14)式, 得到首项  $\bar{Y}_0$  的方程:

$$\bar{x}^3 \frac{d\bar{Y}_0}{d\bar{x}} - \bar{Y}_0 = 0 \tag{2.20}$$

对等式(2.20)进行积分, 有:

$$\bar{Y}_0(\bar{x}) = c_3 e^{-\frac{1}{2\bar{x}^2}} \tag{2.21}$$

(2.17), (2.18)和(2.21)式中的未知常数将在匹配过程中确定。

### 2.3. 匹配内外部解

因为在  $x=0$  处存在内-内层, 所以除了外部解与内层匹配之外, 还要将内层与内内层进行匹配。我们先在区域  $0 < x < 1$  中进行解的匹配。

首先匹配内层解与外部解:

将内层解  $\bar{Y}(\bar{x})$  中的  $\bar{x}$  用  $x$  替换, 得出

$$(\bar{Y}_0^+(\bar{x}))^0 = \left( c_3 e^{-\frac{1}{2\bar{x}^2}} \right)^0 = c_3 e^{-\frac{\varepsilon}{2x^2}} \tag{2.22}$$

同样, 将外部解  $y_0^+(x)$  中的  $x$  用  $\bar{x}$  替换, 得到

$$\left(y_0^+(x)\right)^i = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{x} + \beta - 1 \quad (2.23)$$

根据匹配原理, 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, (2.22)式和(2.23)式相等, 即得

$$c_3 = \beta - 1 \quad (2.24)$$

再匹配内层与内 - 内层:

$$\left(\tilde{Y}_0^+(\tilde{x})\right)^i = \left(c_1 e^{-\tilde{x}}\right)^i = c_1 e^{-\frac{\tilde{x}}{\varepsilon^2}} \quad (2.25)$$

$$\left(\bar{Y}_0^+(\bar{x})\right)^{ii} = \left(c_3 e^{-\frac{1}{2\bar{x}^2}}\right)^{ii} = c_3 e^{-\frac{1}{2\bar{x}^2}} \quad (2.26)$$

当(2.25)式中的  $\bar{x}$  和(2.26)式中的  $\tilde{x}$  固定,  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, (2.25)式和(2.26)式都趋于零, 满足

$$\left(\tilde{Y}_0^+(\tilde{x})\right)^i = \left(\bar{Y}_0^+(\bar{x})\right)^{ii}$$

综合上述, 就得到了奇摄动问题(2.2)~(2.4)在  $0 < x \leq 1$  区域内的渐近展开式如下:

$$\begin{aligned} y_+(x, \varepsilon) &\sim \tilde{Y}_0^+(\tilde{x}) + \bar{Y}_0^+(\bar{x}) + y_0^+(x) - \left(\bar{Y}_0^+(\bar{x})\right)^0 \\ &= c_1 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + (\beta - 1) e^{-\frac{\varepsilon}{2x^2}} + x \end{aligned} \quad (2.27)$$

用同样的方法, 可以推出奇摄动问题(2.2)~(2.4)在  $-1 \leq x < 0$  区域内的渐近展开式如下:

$$\begin{aligned} y_-(x, \varepsilon) &\sim \tilde{Y}_0^-(\tilde{x}) + \bar{Y}_0^-(\bar{x}) + y_0^-(x) - \left(\bar{Y}_0^-(\bar{x})\right)^0 \\ &= c_2 e^{\frac{x}{\varepsilon}} + (\alpha + 1) e^{-\frac{\varepsilon}{2x^2}} + x \end{aligned} \quad (2.28)$$

为了使  $y(x, \varepsilon)$  光滑, 我们需要设置如下的衔接条件:

$$\begin{cases} y_+(0, \varepsilon) = y_-(0, \varepsilon) \\ y'_+(0, \varepsilon) = y'_-(0, \varepsilon) \end{cases} \quad (2.29)$$

将(2.27)式和(2.28)式代入(2.29)式, 能够得到:

$$\begin{cases} c_1 = c_2 \\ c_1 = -c_2 \end{cases}$$

即:

$$c_1 = c_2 = 0 \quad (2.30)$$

结合(2.27), (2.28)和(2.30), 就得到了奇摄动边值问题(2.2)~(2.4)的形式渐近展开式如下:

$$y \sim \begin{cases} (\alpha + 1) e^{-\frac{\varepsilon}{2x^2}} + x, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ (\beta - 1) e^{-\frac{\varepsilon}{2x^2}} + x, & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (2.31)$$

### 2.4. 形式渐近解的一致有效性

通过以上的构造, 得到了奇摄动边值问题(2.2)~(2.4)的形式渐近解(2.31)。为讨论其一致有效性, 给出如下定理。

**定理 1** 奇摄动边值问题(2.2)~(2.4)存在重边界层解, 且形式渐近解(2.31)是一致有效的, 其中  $\varepsilon > 0$ 。

证明: 首先构造两个辅助函数  $\underline{y}$  和  $\bar{y}$ :

$$\underline{y} = Z(x, \varepsilon) - \gamma\varepsilon \tag{2.32}$$

$$\bar{y} = Z(x, \varepsilon) + \gamma\varepsilon \tag{2.33}$$

其中,  $\gamma$  为一个足够大的正常数, 其中函数

$$Z(x, \varepsilon) \sim \begin{cases} (\alpha+1)e^{-\frac{\varepsilon}{2x^2}} + x, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ (\beta-1)e^{-\frac{\varepsilon}{2x^2}} + x, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

现在证明  $\underline{y}$  和  $\bar{y}$  为奇异摄动边值问题(2.2)~(2.4)当  $-1 < x < 1$  时的下, 上解。

因为  $\gamma$  为足够大的正数, 显然有  $\underline{y} \leq \bar{y}$ , 且由(2.31), (2.32)式和(2.33)式, 成立:

$$\underline{y}(-1, \varepsilon) \leq \alpha \leq \bar{y}(-1, \varepsilon)$$

$$\underline{y}(1, \varepsilon) \leq \beta \leq \bar{y}(1, \varepsilon)$$

还需证明:

$$\varepsilon^3 \underline{y}'' + x^3 \underline{y}' - \varepsilon \underline{y} - x^3 \geq 0, \quad -1 < x < 0 \tag{2.34}$$

$$\varepsilon^3 \underline{y}'' + x^3 \underline{y}' - \varepsilon \underline{y} - x^3 \geq 0, \quad 0 < x < 1 \tag{2.35}$$

下面只对(2.34)式进行证明, (2.35)式同理可证。将(2.31)式中的第一式和(2.32)式代入(2.34)式的左端得

$$\frac{\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{2x^2}} \left[ (1+\alpha)\varepsilon^4 - 3(1+\alpha)\varepsilon^3 x^2 + \varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{2x^2}} \gamma x^6 - e^{\frac{\varepsilon}{2x^2}} x^7 \right]}{x^6} \tag{2.36}$$

由于  $-1 < x < 0$ , 所以  $x^6$  为正, 又因为  $\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{2x^2}}$  为正, 故只要证明

$$(1+\alpha)\varepsilon^4 - 3(1+\alpha)\varepsilon^3 x^2 + \varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{2x^2}} \gamma x^6 - e^{\frac{\varepsilon}{2x^2}} x^7 \tag{2.37}$$

为正的即可。因此将上式进行整理:

$$\begin{aligned} & (1+\alpha)\varepsilon^4 - 3(1+\alpha)\varepsilon^3 x^2 + \varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{2x^2}} \gamma x^6 - e^{\frac{\varepsilon}{2x^2}} x^7 \\ & = (1+\alpha)\varepsilon^3 (\varepsilon - 3x^2) + x^6 (\varepsilon \gamma - x) e^{\frac{\varepsilon}{2x^2}} \end{aligned} \tag{2.38}$$

(2.38)式中,  $x^6 (\varepsilon \gamma - x) e^{\frac{\varepsilon}{2x^2}} > 0$ , 由量级的比较, 只要  $\varepsilon - 3x^2 > 0$  即  $-\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} < x < 0$  时, 上式大于零。下

面分析  $-1 < x < -\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$ 。我们取极值来进行比较, 当  $x$  越靠近  $-\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$  时, 第一部分的量级是  $o(\varepsilon^4)$ , 第二部

分为 $o\left(\varepsilon^{\frac{7}{2}}\right)$ , 因此(2.38)式的主项为第二部分, 其大小由第二部分决定, 所以, 当 $x$ 越靠近 $-\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$ 时, (2.38)式为正, 由此有(2.36)式也为正。用同样的方法也可以分析出当 $x$ 越靠近 $-1$ 时, (2.38)式为正。至此, 不管 $x$ 取何值, (2.36)式恒为非负的, 因此(2.34)式得证。

我们从(2.36)式中的函数图像(见图1), 也验证了上面的结论。

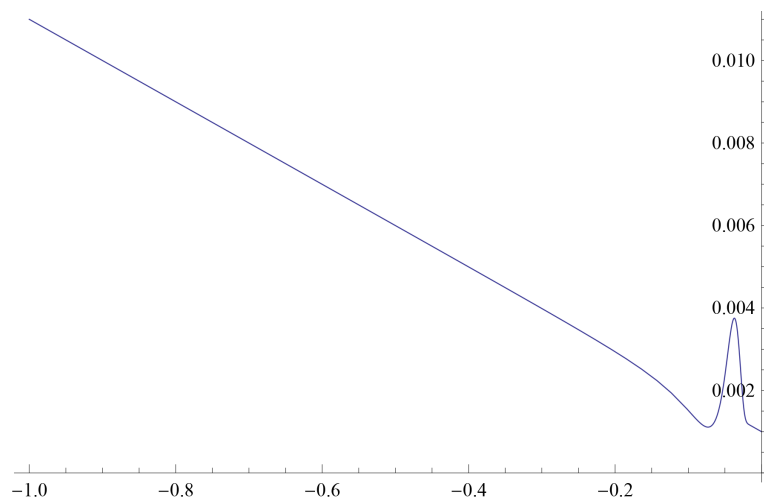


Figure 1. Image of function (2.36)  
图 1. 函数(2.36)的图像

同理, 也可以证明 $\bar{y}$ 满足下面的不等式

$$\varepsilon^3 \bar{y}'' + x^3 \bar{y}' - \varepsilon \bar{y} - x^3 \leq 0, \quad -1 < x < 0 \quad (2.39)$$

$$\varepsilon^3 \bar{y}'' + x^3 \bar{y}' - \varepsilon \bar{y} - x^3 \leq 0, \quad 0 < x < 1 \quad (2.40)$$

根据 Nagumo [7]定理, 奇摄动边值问题(2.2)~(2.4)存在一个解, 且满足:  $\underline{y}(x, \varepsilon) \leq y(x, \varepsilon) \leq \bar{y}(x, \varepsilon)$ ,  $-1 < x < 1$ ,  $\varepsilon > 0$ , 再根据(2.32)式和(2.33)式, 就得证(2.31)式是问题(2.2)~(2.4)的一致有效的渐近展开式。

## 2.5. 实例仿真

下面给出实例, 通过`matlab`画出微分方程的函数图形, 来验证所探讨的问题存在重边界层解。考虑如下奇摄动问题:

$$\varepsilon^3 y'' + x^3 y' - \varepsilon y = x^3, \quad x \in (-1, 1)$$

$$y(-1) = -4, \quad y(1) = 9$$

有如下的解的图像(见图2):

综合以上的分析可以发现奇摄动问题(2.2)~(2.4)的解具有以下特性:

- 1) 奇摄动问题(2.2)~(2.4)的解在 $x = 0$ 处呈现重边界层现象。
- 2) 虽然奇摄动问题(2.2)~(2.4)的渐近解(2.31)中未显示多层变量, 但有内-内层隐含其中, 事实上其内-内层解渐近式为0, 正如图2, 图3中, 在 $x = 0$ 附近, 解呈现平坦状态。这表明了所得渐近解的正确性。
- 3) 无论奇摄动问题(2.2)~(2.4)的边值如何给定, 它的解在 $x = 0$ 处都会靠近 $(0, 0)$ 点, 即当两端边值同号时, 解会出现钩形(Hook)现象(见图3), 这也是 Holmes 曾经得到过的现象。

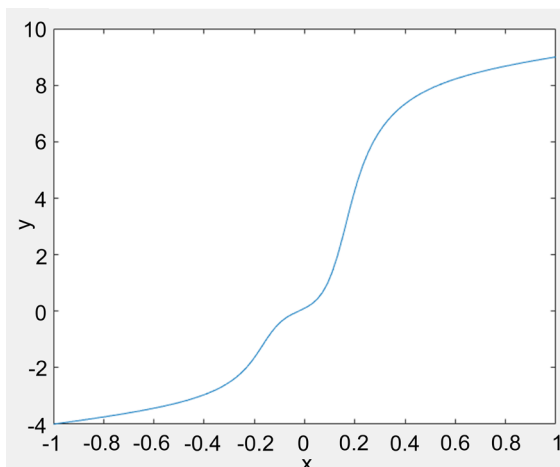


Figure 2. Matlab solution of (2.2) - (2.4)  
 图 2. (2.2)~(2.4)的 matlab 解(取  $\alpha = -4, \beta = 9$ )

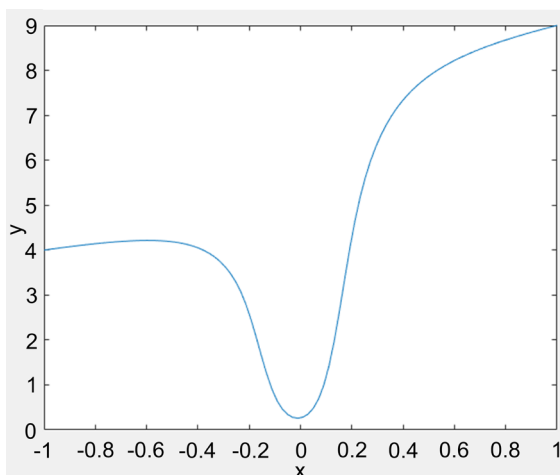


Figure 3. Matlab solution of (2.2) - (2.4)  
 图 3. (2.2)~(2.4)的 matlab 解(取  $\alpha = 4, \beta = 9$ )

### 3. 具有奇性的一阶非线性奇摄动初值问题

V.F. Butuzov, N.N. Nefedov [8]曾用修正的边界层函数法探讨了具有重退化根的一阶奇摄动初值问题:

$$\varepsilon^2 \frac{dy}{dx} = f(y, x, \varepsilon)$$

$$y(0, \varepsilon) = y^0$$

其中  $f(y, x, \varepsilon) = -h(x)(y - \varphi(x))^2 + \varepsilon f_1(y, x, \varepsilon)$ ,  $h(x) > 0$ , 即退化方程具有二重根。该文揭示了当  $f_1$  不同时, 对应渐近解的不同性态。但由于修正的边界层函数法使用时的技巧性相对较强, 所以本文试图用匹配法来研究该类问题, 探究其解呈现的性态。

受该文的启发, 考虑如下带有奇性的奇摄动一阶非线性微分方程:

$$\varepsilon^2 \frac{dy}{dx} = -x^3(y + 2x)^2 - \varepsilon(y + 2x) + \varepsilon^2 y^3, \quad x \in (0, +\infty) \tag{3.1}$$



$$y(0)=1 \quad (3.2)$$

这类方程的退化方程具有重根, 而且方程(3.1)在  $x=0$  处有奇性, 故而不满足文[8]中的条件(A1)。这里  $\varepsilon$  为很小的正常数。

### 3.1. 外部解

将函数  $y(x, \varepsilon)$  展开成关于  $\varepsilon$  的幂级数的形式如下:

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i y_i(x) \quad (3.3)$$

将(3.3)式代入(3.1)式, 合并  $y$  的同次幂项, 并令对应的系数为零, 可得首次近似:

$$-x^3 (y_0(x) + 2x)^2 = 0 \quad (3.4)$$

由于  $x \in (0, +\infty)$ , 则(3.4)式变为:

$$y_0(x) + 2x = 0 \quad (3.5)$$

即得到了奇摄动问题(3.1)~(3.2)的外部解:

$$y_0(x) = -2x \quad (3.6)$$

当  $x=0$  时,  $y_0(0)=0$ , 不满足初值条件  $y(0)=1$ , 故奇摄动问题在  $x=0$  处存在边界层。

### 3.2. 内部解

下面来寻找问题的内部解。为了研究解在  $x=0$  处的性态, 我们在  $x=0$  处引入伸展变量:

$$\hat{x} = \frac{x}{\varepsilon^\alpha} \quad (3.7)$$

即  $x = \varepsilon^\alpha \hat{x}$ , 其中  $\alpha > 0$ 。将(3.7)式代入(3.1)式中, 并记

$$\hat{Y}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i \hat{Y}_i(x)$$

得到:

$$\varepsilon^{2-\alpha} \frac{d\hat{Y}}{d\hat{x}} = -\varepsilon^{3\alpha} \hat{x}^3 (\hat{Y} + 2\varepsilon^\alpha \hat{x})^2 - \varepsilon (\hat{Y} + 2\varepsilon^\alpha \hat{x}) + \varepsilon^2 \hat{Y}^3 \quad (3.8)$$

将(3.8)式展开, 即变为:

$$\varepsilon^{2-\alpha} \frac{d\hat{Y}}{d\hat{x}} = -\varepsilon^{3\alpha} \hat{x}^3 (\hat{Y}^2 + 4\varepsilon^\alpha \hat{x} \hat{Y} + 4\varepsilon^{2\alpha} \hat{x}^2) - \varepsilon (\hat{Y} + 2\varepsilon^\alpha \hat{x}) + \varepsilon^2 \hat{Y}^3$$

进一步的整理可以得到:

$$\varepsilon^{2-\alpha} \frac{d\hat{Y}}{d\hat{x}} = -\hat{x}^3 (\varepsilon^{3\alpha} \hat{Y}^2 + 4\varepsilon^{4\alpha} \hat{x} \hat{Y} + 4\varepsilon^{5\alpha} \hat{x}^2) - (\varepsilon \hat{Y} + 2\varepsilon^{1+\alpha} \hat{x}) + \varepsilon^2 \hat{Y}^3 \quad (3.9)$$

由于  $\alpha > 0$ , 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,  $O(\varepsilon^{5\alpha})$  项,  $O(\varepsilon^{4\alpha})$  项与  $O(\varepsilon^{3\alpha})$  项相比较为小量。同样,  $O(\varepsilon^2)$  项,  $O(\varepsilon^{1+\alpha})$  项与  $O(\varepsilon)$  项比较,  $O(\varepsilon^2)$  项和  $O(\varepsilon^{1+\alpha})$  项为小量, 故(3.9)式的主要部分为:

$$\varepsilon^{2-\alpha} \frac{d\hat{Y}}{d\hat{x}} = -\varepsilon^{3\alpha} \hat{x}^3 \hat{Y}^2 - \varepsilon \hat{Y} \tag{3.10}$$

我们可以通过平衡(3.10)式中的任意两项来求得特异极限, 即得: 当  $\alpha=1$  时,  $\bar{x} = \frac{x}{\varepsilon}$ , 刻画了一个最靠近  $x=0$  附近的层, 即内-内层。当  $\alpha = \frac{1}{3}$  时,  $\tilde{x} = \frac{x}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}}$ , 此时为内层。

同样, 运用上一节的方法, 我们可以求出当  $\alpha=1$  时和当  $\alpha = \frac{1}{3}$  时的首项函数表达式分别为:

$$\bar{Y}_0(\bar{x}) = ce^{-\bar{x}} \tag{3.11}$$

$$\tilde{Y}_0(\tilde{x}) = -\frac{1}{\tilde{x}^3} \tag{3.12}$$

### 3.3. 匹配内外解

综合以上的过程, 我们可以看出, 只要确定了内-内层表达式中的常数  $c$ , 就可以得到非线性奇摄动问题(3.1)~(3.2)的形式渐近解。

由于内-内层需要满足初值条件, 故将(3.2)式代入(3.11)中, 有:

$$\bar{Y}_0(0) = ce^0 = 1$$

即

$$c = 1 \tag{3.13}$$

结合(3.6)式, (3.11)~(3.13)式, 便得到了非线性奇摄动问题(3.1)~(3.2)的形式渐近展开式为:

$$y(x, \varepsilon) \sim y_0(x) + \bar{Y}_0(\bar{x}) + \tilde{Y}_0(\tilde{x}) = -2x + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - \frac{\varepsilon}{x^3} \tag{3.14}$$

通过以上的讨论, 我们就得到了奇摄动初值问题(3.1)~(3.2)的形式渐近解(3.14)式, 并用 mathematic 作图, 所得结果与图像保持一致(见图 4)。下面定理中的一致有效性可以仿照定理 1 进行证明。

**定理 2** 奇摄动初值问题(3.1)~(3.2)存在重边界层解, 且形式渐近解(3.14)是一致有效的, 其中  $\varepsilon > 0$ 。

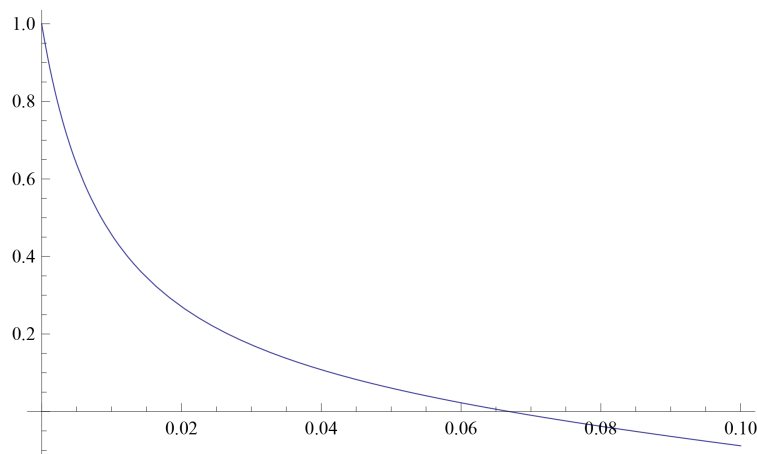


Figure 4. Mathematic solution of (3.1) - (3.2)  
图 4. (3.1)~(3.2)的 Mathematic 解

综合以上分析可以发现:

- 1) 由于本章的初值问题具有奇性, 由此得出的解的性态与 V.F. Butuzov 文中解的性态呈现了不同。
- 2) V.F. Butuzov 一文中初值问题的解先是呈幂率衰减, 然后是指数衰减; 而本章的一阶奇摄动初值问题在边界层区域先是呈指数衰减, 再是幂率衰减。

## 致 谢

感谢审稿老师和编辑老师提出宝贵意见。

## 基金项目

安徽省高校自然科学研究重点项目(KJ2019A0062)。

## 参考文献

- [1] 莫嘉琪. 非线性向量微分方程初值问题的奇摄动[J]. 应用数学学报, 1989(12): 397-402.
- [2] 蒋小惠, 陈松林. 广义 Logistic 模型奇摄动问题的渐近分析[J]. 生物数学学报, 2016(3): 311-318.
- [3] Shen, L.S. and Lian, P.Y. (2015) A Class of Cover Layer Phenomenon of Solution for Third Order Nonlinear Initial Value Problem. *Journal of Liaoning Technical University: Natural Science*, **34**, 285-288.
- [4] 莫嘉琪. 一类具有二个转向点的大参数奇摄动方程[J]. 系统数学与科学, 2007(5): 684-690.
- [5] 杜冬青, 杜香寒. 具有高阶转向点的二次 Dirichlet 问题的尖层解[J]. 淮北师范大学学报(自然科学版), 2016(3): 12-15.
- [6] Holmes, M.H. (2010) *Introductions to Perturbation Methods*. Springer, New York.
- [7] 瓦西里耶娃, 布图洛夫著, 倪明康, 林武忠, 译. 奇异摄动方程解的渐近展开[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [8] Butuzov, V.F. and Nefedov, N.N. (2013) On a Singularly Perturbed Initial Value Problem in the Case of a Double Root of the Degenerate Equation. *Nonlinear Analysis*, **83**, 1-11. <https://doi.org/10.1016/j.na.2013.01.013>