

The Differential Equation Model for the Novel Coronavirus Pneumonia by Time and Region

Wenwen Zhu¹, Hao Li¹, Yang Lu², Hao Liu¹

¹School of Physical and Mathematical Sciences, Nanjing Tech University, Nanjing Jiangsu

²School of Computer Science and Technology, Nanjing Tech University, Nanjing Jiangsu

Email: 952656623@qq.com

Received: Apr. 7th, 2020; accepted: Apr. 29th, 2020; published: May 6th, 2020

Abstract

Based on Novel coronavirus pneumonia's real-time data from January 23rd to March 5th in 2020 provided by authority and considering the virus's characteristic of infectivity, we establish a differential equation model of its transmission dynamics. Considering the great difference between Hubei and other parts of the country in epidemic situation, we divide the forecast areas into Hubei province and others in China. Since the influence to the parameters of the model caused by changes of diagnostic protocols on February 12th, we consider the different parameters in the model before and after February 12th for Hubei Province to minimize the error, while the parameters are not changed in other parts of China from January 23rd to March 5th. The numerical results of the differential equations are obtained by Runge-Kutta method. The numerical results tell that the national epidemic can end basically at the seventieth day after January 23rd, and there will be more than 82,000 national no-imported cases, about 3300 the death toll.

Keywords

Novel Coronavirus Pneumonia, Transmission Dynamics, Differential Equations, Data Fitting, Runge-Kutta Method

新型冠状病毒肺炎疫情的分时段分地区 微分方程模型

朱雯雯¹, 李浩¹, 卢洋², 刘浩¹

¹南京工业大学数理科学学院, 江苏 南京

²南京工业大学计算机科学与技术学院, 江苏 南京

Email: 952656623@qq.com

收稿日期: 2020年4月7日; 录用日期: 2020年4月29日; 发布日期: 2020年5月6日

摘要

利用2020年1月23日至2020年3月5日官方所给出的新冠肺炎疫情实时数据, 考虑到感染者在潜伏期、发病期不切掉传播途径下均具有传染性, 建立了新型冠状病毒肺炎传播动力学微分方程模型。湖北省较全国其他地区的疫情严重及2月12日确诊方案的改变对模型中各个参数的影响, 为了减小误差, 将预测的地区分为湖北省和湖北省外地区, 并以2月12日为界, 湖北省的模型内使用不同的参数, 湖北省外则利用1月23日至3月5日的数据建模, 运用数据拟合的方法给出该模型中各参数并龙格-库塔法求解微分方程, 预测出全国的疫情在1月23日之后的第70天可基本结束, 全国非输入确诊病例数约82,000多人, 死亡人数约3300。

关键词

新冠肺炎, 传播动力学, 微分方程, 数据拟合, 龙格-库塔法

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

2019年12月, 我国湖北武汉市发现一种由新型冠状病毒引发的传染性肺炎, 后该病毒被称为“COVID-19”, 其传播途径主要是通过咳嗽或打喷嚏的飞沫传播、接触传播。人群普遍易感, 人们是否被感染的概率主要取决于接触病毒与暴露机会的多少。根据目前所公布的信息, 已治愈新型冠状病毒肺炎患者未发现有再次感染新型冠状病毒的情况。

在人类的发展进程中, 曾经遭遇过多次大规模的病毒引起的传染病, 如 SARS, MERS, ZIKA, 埃博拉等, 其中与新型冠状病毒肺炎的规模最为相近的传染病是2002年冬季到2003年8月爆发的 SARS [1] [2], 但此次新型冠状病毒导致的肺炎形势与 SARS 相比更为严峻。该病的平均潜伏期为3~7天, 最短潜伏期为1天, 最长潜伏期为14天。新冠病毒特殊之处在于感染者处于潜伏期时可能无任何不适症状, 但已具有传染性。新冠病毒出现的时间恰逢中国传统春节, 全国人口因为春节春运迅速流动导致该病毒的迅速扩散。

新冠肺炎病例在我国最早发现于湖北省武汉市, 由于该病毒为新型病毒, 感染病例爆发初期人们对其了解较少, 导致该病毒传染人的概率在我国湖北省与湖北省外有很大的差异。如果只是利用全国的疫情数据笼统地建立模型, 并估计模型参数, 则对疫情的预测将产生很大的误差。本文根据官方所给出的数据, 分别考虑湖北省与我国湖北省外的情况, 建立数学模型并预测全国不同地区的疫情, 包括确诊人数、疑似人数、死亡人数及未受控制的潜伏期患者等。使得人们对病毒的传播情况有所了解, 做好有效的防疫措施, 也可以供政府及相关部门采取有效措施控制疫情。

2. 模型的建立

根据目前已经各种官方对新冠病毒肺炎的描述, 我们建立新冠肺炎传播模型的一些基本假设如下:

1) 因人群普遍易感新冠病毒, 故假设人群感染病毒的可能性相同, 不考虑个体的体质、年龄等其他因素;

2) 由于新型冠状病毒的传播方式是飞沫传播、接触传播, 目前还没有确定病毒的中间宿主, 也没有发现家畜、宠物等传染的确切病例, 故假设仅是人群体之间的传播, 即病毒由感染的患者或在潜伏期的患者传染给易感人群;

3) 忽略掉该时期的自然出生率和死亡率及其他自然原因对该病毒传播的影响。

根据官方数据, 截止 3 月 5 日, 湖北内累计确诊人数达 67,592 人, 累计死亡人数达 2959 人, 全国除湖北外的其他地区累计确诊为 13,118 人, 累计死亡人数为 46 人。由此可知, 湖北地区的疫情比全国其他地区严重的多。因此, 本文将模型在地理上以湖北为界, 分成湖北省、全国除湖北省的其他地区两个部分。2 月初, “火神山”, “雷神山” 及多所方舱医院建成, 全国各地医护人员、国家军队前去支援湖北。2 月 12 日湖北省紧急调整确诊方案, 实施能收尽收、应收尽收的控制方案, 将疑似病例中有很大可能确诊的病人进行医学隔离治疗。这使得模型中确诊病例和疑似病例的数量有在 2 月 12 日具有突变性, 为了克服突变带来的剧烈影响, 以 2 月 12 日为界, 分别进行数据处理来确定模型中的参数是符合实际情况的, 这种处理方式避免了因为数据突变导致的模型中参数发生剧烈变化造成数据处理困难, 甚至结果误差较大。

官方提供的实时数据, 包括确诊病例、疑似病例、死亡病例、治愈病例等, 考虑到感染病毒到发病具有潜伏期, 本文增加易感染病毒人群和感染处在潜伏期两类人群, 将人群分为如下六类并记如下符号表示相应人群的人数[3] [4]:

S ——人群中易感染病毒的人数

E ——人群中受感染处在潜伏期人数

Y ——人群中疑似病例数

Q ——人群中确诊病例数(死亡和治愈的病人依旧在确诊病例中)

R ——感染者被治愈的人数

D ——感染者发病不治身亡人数

y_1 ——疑似患者每日的被排除人数占疑似病例总数的比例

y_2 ——疑似患者每日的被确诊人数占疑似病例总数的比例

y_3 ——易感者每日进入疑似病例人数占易感者总数的比例

α ——潜伏期患者每日进入疑似病例人数占潜伏者总数的比例(包括因自然发病和因与确诊者解除密切而进入疑似病例的)

β ——每个潜伏期患者每日感染易感者占易感者的比例

γ ——确诊患者每日治愈率

λ ——确诊患者每日死亡率

ε ——直接确诊的潜伏期患者占潜伏期患者总人数的比例

由实际可知, 在新型冠状病毒的传播体系中, 易感者(S)可能被潜伏期患者所感染而成为潜伏期患者(E), 也有可能未被感染但出现类似病症而被怀疑为感染者, 转变为疑似病例(Y), 潜伏期患者(E)有可能自然发病, 出现相关症状; 也有可能没有发病, 但因与感染者密切接触过, 而转化到疑似病例(Y)。同时, 处在潜伏期的患者可能因为症状明显, 经过检查直接进入确诊病例(Q)中。并且, 疑似病例中的患者(Y)经过进一步的检查, 或被排除嫌疑恢复为健康者(S), 或被检测出病毒, 进入确诊病例(Q)。控制后, 被确诊的病人将会在定点医院进行隔离治疗, 无法感染其余健康人, 但有可能出现死亡(D)或被治愈(R)的情况。

根据该病毒的传播过程及各人群的转化关系, 可绘制出新冠肺炎病毒传播动力学关系如图 1。

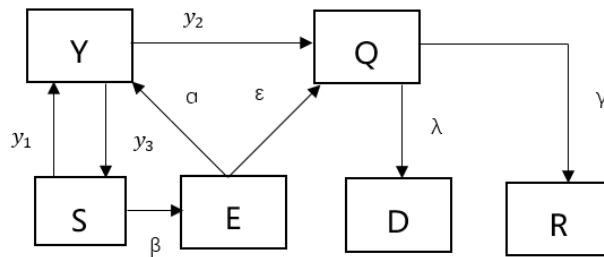


Figure 1. Transmission dynamics of a novel coronavirus

图 1. 新冠病毒传播动力学图

由图 1 可知, 在新型冠状病毒传播体系中, 考虑到采取防控措施后, 已经被确诊病人和疑似病人将会被隔离治疗或观察, 故他们将无法感染其余健康人, 又疑似患者距离确诊具有一定的时滞性, 因此每日易感者人数的变化与每日潜伏者和疑似病例患者人数有关。

每日易感人群数量的减少是因为易感人群被潜伏期患者传染和并未被感染但产生某种类似病症而转化为疑似病例, 而数量的增多是由于疑似病例患者中未感染病毒而被排除嫌疑的人群, 可得

$$\frac{dS}{dt} = y_1 Y - \beta ES - y_3 S. \quad (1)$$

由于易感人群与疑似患者的接触而成为病毒的潜伏者, 而处于潜伏期的患者有可能因自然发病, 出现相关症状而转化为疑似病例, 或直接确诊, 成为确诊病例; 也有可能没有发病, 但因与感染者密切接触过, 而转化为疑似病例, 则可推得

$$\frac{dE}{dt} = \beta ES - \alpha E - \epsilon E. \quad (2)$$

每日疑似病例因易感人群未被感染但出现该疾病的类似症状而增加, 此外, 部分潜伏期患者与感染者有过密切接触, 从而在发病前转化为疑似病例, 而疑似病例患者的进一步检查, 或排除嫌疑恢复为健康人, 或检测出已感染病毒而被确诊而减少, 可得

$$\frac{dY}{dt} = \alpha E - y_1 Y - y_2 Y + y_3 S. \quad (3)$$

由每日确诊病例因为疑似病例患者的确诊和潜伏期患者发病后直接确诊而增加得

$$\frac{dQ}{dt} = y_2 Y + \epsilon E. \quad (4)$$

由于每日死亡人数是每日确诊病例中依旧携带着病毒并幸存的患者数量和确诊病例患者死亡率的乘积, 故有

$$\frac{dD}{dt} = \lambda(Q - R - D). \quad (5)$$

由于每日被治愈的人数是每日确诊病例中依旧携带着病毒并幸存的患者数量和确诊病例患者的治愈率的乘积, 可推得

$$\frac{dR}{dt} = \gamma(Q - R - D). \quad (6)$$

忽略每日自然出生率和死亡率等其他因素的影响, 可以认为我国人口数量在该时期内保持不变, 即

$$S + E + Y + Q + D = K. \quad (7)$$

3. 参数确定

为了确定模型中参数,我们以湖北省数据和全国除湖北省外地区进行分析,给出模型中使用的参数。

由实际数据和一般流行传染病常识[5]可知在确诊病例中,20%来自潜伏期患者,80%来自疑似病例,则每日确诊病例中潜伏期患者和疑似病例患者的比例为

$$\varepsilon E : y_2 Y = 1 : 4.$$

每天增加的疑似病例中的患者一部分会被确诊,一部分会被排除嫌疑,则

$$w_i = \frac{\text{第}i\text{天新增的确诊病例} \times 80\%}{\text{第}i\text{天疑似病例数的减少量}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n \text{ 为统计天数}$$

$$w = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i$$

给出平均每日疑似病例中感染者所占比例。

利用公式

$$y_{2i} = \frac{\text{第}i\text{天疑似病例的减少量}}{\text{第}i\text{天疑似病例总数}} \times w_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n \text{ 为统计天数}$$

$$y_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{2i}$$

可得每日被确诊人数占疑似病例总数的比例,可求得 y_2 的值。

为了确定疑似患者每日被排除人数占疑似病例总数的比例 y_1 , 假设疑似病例中感染者和未感染者所占比例均为定值。由于对疑似患者检测所需条件限制,每天只能对部分人进行检测,而每个人接受检测的概率是一定的,因此受检测的人中,每日确诊疑似病例与每日被排除的疑似病例的比值可以认为是疑似病例中的未感染者与感染者的比值为

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{w}{1-w},$$

则可确定 y_1 的值。

从而直接确诊的潜伏期患者占潜伏期患者总人数的比例为

$$\varepsilon = \frac{y_2 Y}{4E}.$$

潜伏期患者可能因自然发病转化为疑似病例,也可能因与确诊患者有密切接触而被医学观察,在其发病前就转化为疑似病例,因此,潜伏期患者每日转化为疑似病例人数占潜伏者总数的比例 α 和每个潜伏期患者每日感染易感者占易感者的比例 β 根据实际给出的数据进行拟合得出。

由

$$\gamma_i = \frac{\text{第}i\text{天新增治愈数}}{\text{第}i\text{天累计确诊数}}, \quad \lambda_i = \frac{\text{第}i\text{天新增死亡数}}{\text{第}i\text{天累计确诊数}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n \text{ 为统计天数}$$

如果波动较大则采用曲线拟合的方式,得出每日治愈率 γ 和死亡率 λ 与天数 t 的关系,否则直接计算其日平均值得到每日治愈率 γ 和死亡率 λ 。

根据 1 月 23 日至 2 月 11 日和 2 月 13 日至 3 月 5 日官方发布的湖北省内和全国除湖北省外其他地区的疫情数据,按照上述的计算方法确定各模型参数,具体结果见表 1。

Table 1. Parameter values of the model in different periods in Hubei Province**表 1.** 不同时段内湖北省内的参数值

参数	1 月 23 日至 2 月 11 日湖北省内	2 月 13 日至 3 月 5 日湖北省内
w	0.4578	0.3856
y_2	0.0266	0.1370
y_1	0.0315	0.2183
γ	$0.002098 \times \exp(0.09601 \times t)$	0.0274
λ	$0.0145 \times \exp(-0.09385 \times t)$	$0.002752 \times \exp(-0.0874 \times t)$
α	1/3	2/5
β	0.35/S	0.22/S

类似地分析全国除湖北省以外地区自 1 月 23 日至 3 月 5 日是数据，并采用上述参数计算方法可得，结果见表 2。

Table 2. Parameter values of the model in the whole country except Hubei Province**表 2.** 全国除了湖北以外地区的参数值

参数	全国除湖北以外地区
w	0.4736
y_2	0.0078
y_1	0.0087
γ	0.28
λ	0.00386
α	1/2.4
β	0.17/S

由表 1 的参数值可知，2 月 12 日后每日疑似病例中感染者所占比例 w 明显的减少，由 0.4578 降为 0.3856，这说明调整确诊方案，加大收治力度有效地控制了传染源、切断了病毒传播途径。2 月 12 日后确诊患者每日的治愈率 γ 提高了 0.0131，也可得在 2 月 11 日的确诊患者每日的死亡率 λ 为 0.0022，2 月 13 日的死亡率为 0.0021，这说明随着疫情的发展，人们对于病毒传播的认识更加深入，同时，国家制定的防控措施的确有效控制了疫情发展。由于早发现早治疗、能收尽收、应收尽收的政策，高效地减少了感染者不被控制的时间，随着时间的推移，潜伏者的自然发病使得该人群数量逐渐减少。2 月 12 日后潜伏期患者每日转化为疑似病例人数占潜伏者总数的比例 α 较前期提高了 1/15。从表 1 的 β 值可知 1 月 23 日至 2 月 11 日平均每个潜伏期患者在 2 至 3 天内可感染一个正常人，2 月 12 日后平均每个潜伏期患者在 4 至 5 天内方可感染一个正常人。

表 2 的参数至和表 1 对应的参数值意义相同，不再累述。这样就利用了统一模型解决了湖北省两个时段和全国除湖北省以外地区的模型，在有了上述模型参数(见表 1 和表 2)后，我们即可带入模型进行数值计算。

3. 模型求解

将湖北省疫情的模型中设定 1 月 23 日为第一天，易感染者(S)为湖北省内的近似人口数 59,170,000

人, 疑似病例(Y), 确诊病例(Q), 死亡病例(D), 治愈病例(R)由官方公布数据而定, 初始值分别为 6169、51,986、4131、1318。根据 1 月 23 日至 2 月 11 日的的数据, 进行拟合, 拟合结果如图 2, 图 3。

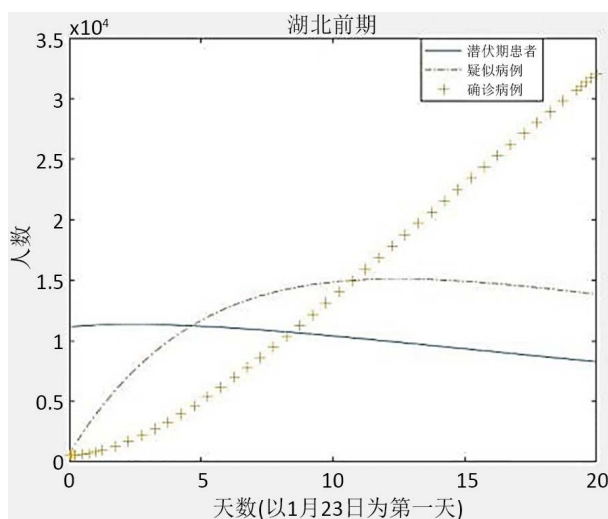


Figure 2. The development tendency of incubation period, suspected case and confirmed case of Hubei

图 2. 湖北省潜伏期、疑似、确诊病例发展趋势

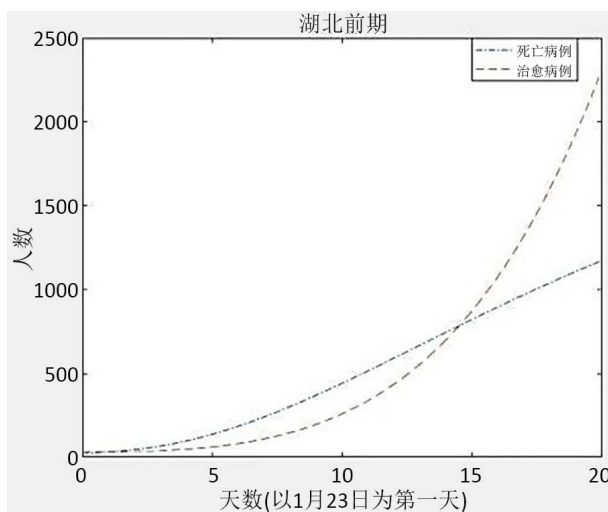


Figure 3. The development tendency of death cases and cured cases of Hubei

图 3. 湖北省死亡、治愈数量的发展趋势

由图 2, 图 3 可知, 本文所建立的模型中各类人群拟合出的结果与官方公布的实时数据相吻合, 因此模型中得出 2 月 13 日潜伏期患者的数量可用于分析后期湖北省的疫情分析。由图 2 知, 2 月 13 日潜伏期患者的数量约为 8000 人。利用 2 月 13 日至 3 月 6 日所给出的数据求解模型, 推测出湖北省 2 月 12 后的疫情发展趋势, 结果如图 4~6 所示。

由图 4 可见, 以 2 月 13 日为第一天, 确诊病例数量在 20 天后增速减慢, 在第 50 天, 可基本结束, 感染病例约 6.8 万左右。另外由图 4 和图 6 分别可知治愈人数持续增加, 死亡率逐渐降低, 死亡人数在第 50 天后基本不再增加, 死亡人数约 3100 人。

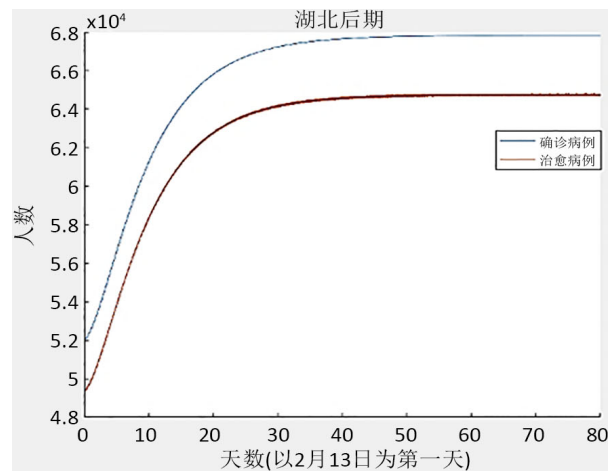


Figure 4. The development tendency of confirmed case and cured cases of Hubei

图 4. 湖北地区确诊与治愈病例的发展趋势

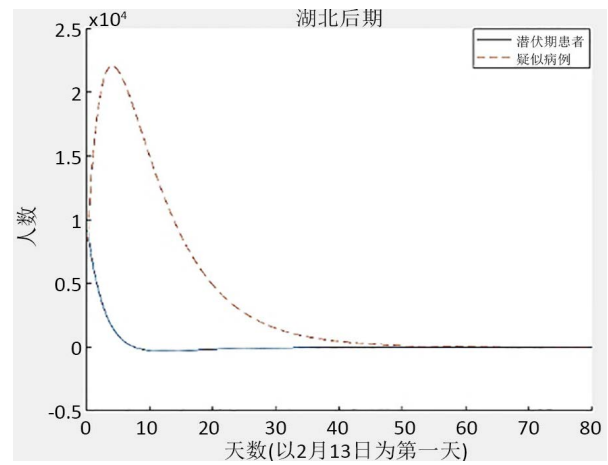


Figure 5. The development tendency of incubation period and suspected case of Hubei

图 5. 湖北地区潜伏期及疑似病例的发展趋势

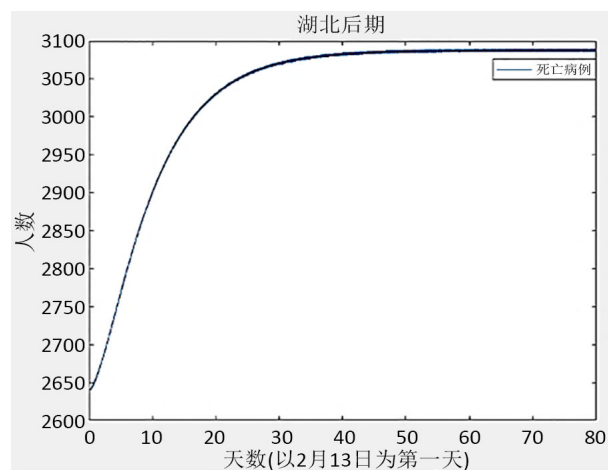


Figure 6. The development tendency of death cases of Hubei

图 6. 湖北地区死亡病例数的发展趋势

由中国的人口数量可得全国除了湖北地区的人口数量大约为 1,340,880,000。类似于以上湖北地区疫情的发展情况的分析, 结果见图 7、图 8。

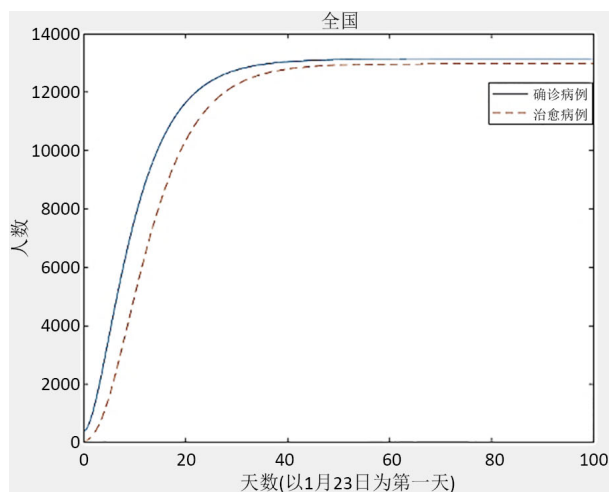


Figure 7. The development tendency of confirmed and cured cases of the whole country except Hubei

图 7. 全国除湖北地区确诊治愈人数的发展趋势

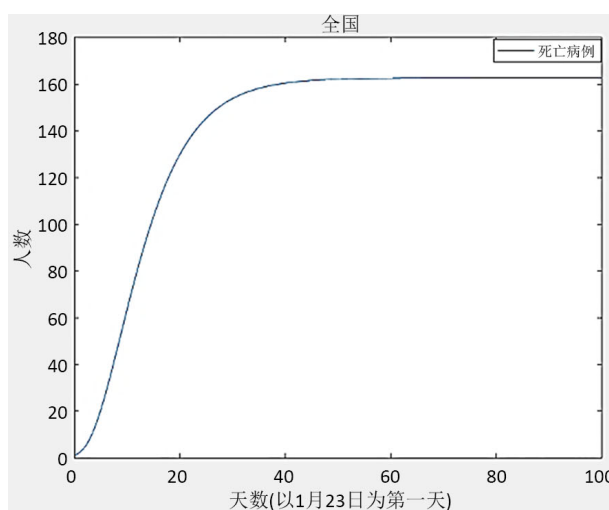


Figure 8. The development tendency of death cases the whole country except Hubei

图 8. 全国除湖北死亡病例数的发展趋势

由图 7 可见, 确诊病例数量在 1 月 23 日的 25 日后已经到达峰值, 确诊病例约为 1.4 万, 治愈人数持续增加, 而死亡率逐渐降低, 死亡人数在第 30 天后基本不再增加, 死亡人数约 150 多人。

4. 结论

考虑到湖北省在 2 月 12 日实施的能收尽收、应收尽收的控制方案使得确诊病例在该日前后发生突变, 模型参数在 2 月 12 日前后发生变化, 本文仅利用一种模型, 根据官方数据分别给出湖北省不同时期内以及全国除了湖北省以外三组不同的参数, 快速准确地预测出全国的疫情在 1 月 23 日之后的第 70 天可基本结束, 全国非输入确诊病例数约 8 万 2 千多, 死亡人数约 3300。

参考文献

- [1] 曾德荣, 成晓红. 对 SARS 疫情预测与控制的数学模型研究[J]. 中国安全科学学报, 2004, 14(2): 41-45.
- [2] 王建锋. SARS 流行预测分析[J]. 北京: 中国工程科学, 2003, 5(8): 23-29.
- [3] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [4] 赵静, 但琦. 数学模型与数学实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [5] 王议锋, 田一, 等. 非典数学模型的建立与分析[J]. 工程数学学报, 2003, 20(7): 45-62.