

# Research on Pricing of Foreign Currency Interval Wealth Management Products under Time-Varying Volatility

Hongmei Dai, Liangqiong Jin

School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang Guizhou  
Email: 18084363623@163.com, jinliangqiong@163.com

Received: Apr. 12<sup>th</sup>, 2020; accepted: Apr. 30<sup>th</sup>, 2020; published: May 7<sup>th</sup>, 2020

---

## Abstract

In this paper, under the time-varying exchange rate model, pricing research on foreign currency wealth management products linked to single assets is carried out. Considering that the price of this type of wealth management product is not only affected by the price of linked risk assets, but also by the exchange rate, its pricing is more complicated, and the pricing analytical formula is difficult to obtain, so we use Monte Carlo simulation to study its pricing. In the process of pricing research using Monte Carlo simulation, Cholesky was used to decompose and release the correlation between risk assets and exchange rate, and a foreign currency wealth management product linked to gold was selected for empirical analysis.

## Keywords

Foreign Currency Financial Products, Exchange Rate Model, Monte Carlo Simulation, Cholesky Decomposition

---

# 时变波动率下外币区间理财产品定价研究

代洪梅, 金良琼

贵州民族大学, 数据科学与信息工程学院, 贵州 贵阳  
Email: 18084363623@163.com, jinliangqiong@163.com

收稿日期: 2020年4月12日; 录用日期: 2020年4月30日; 发布日期: 2020年5月7日

---

## 摘要

本文在时变汇率模型下, 对挂钩单资产的外币理财产品进行了定价研究。考虑到该类理财产品的价格不

光受挂钩风险资产价格的影响, 还受汇率的影响, 其定价更加复杂, 定价解析式难以得到, 故利用蒙特卡罗模拟方法对其进行定价研究。在用蒙特卡罗模拟方法进行定价研究的过程中, 利用Cholesky分解释放风险资产和汇率间的相关性, 并且选取了一款挂钩黄金的外币理财产品进行了实证分析。

## 关键词

外币理财产品, 汇率模型, 蒙特卡罗模拟, Cholesky分解

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在“新时代”、“新金融”的背景下, 中国经济迎来了由高速增长到高质量发展的转变, 金融市场逐渐步入成熟阶段。银行作为金融市场的主体机构, 也在不断派生出新的金融理财产品以满足人们投资理财的需要, 其中就包括区间理财产品。区间理财产品作为现代金融工程领域进行金融创新的产物, 由于其类型多样化, 设计人性化, 可以满足人们的各种投资需求, 所以其在金融市场中备受投资者青睐。如果投资者在分析理财产品过程中, 认为其挂钩的风险资产价格在到期时会在某个区间内上下浮动, 则可投资区间型理财产品。其中, 不仅人民币理财产品受欢迎, 外币理财产品也深受投资者追捧。基于此, 本文对区间型外币理财产品的定价问题进行了研究。

理财产品定价的核心是其内嵌期权的定价。目前, 对于期权及理财产品定价方法的理论研究日趋成熟。Satyayitdas 在 2001 综合分析了结构性理财产品的基本原理、定价、构建等, 对结构性理财产品做了一个比较全面的研究, 这促进了结构性理财产品定价理论研究的发展[1]。2006 年, Carolyn W. Chang 等人扩展了二项式期权定价模型, 使其在保持计算简单性的同时, 具有更精确的价格动态。结合杠杆效应得出了效用相关的估值结果, 并对模型进行了实证检验[2]。2007 年, 王文凡利用并行 Monte-carlo 方法对欧式期权定价问题进行模拟, 有效地以较低的成本完成了复杂与大量的计算任务[3]。2011 年, Baule 和 Tallau 用随机波动模型对一款红利证券进行了定价研究, 发现发行商在设计这款债券时已经考虑了波动率的影响[4]。之后在 2016 年, 王国帅和赵佃立首先运用不确定理论推导了相应的不确定风险中性测度, 然后对欧式期权进行了定价研究, 并验证了涨跌期权价格之间的平价关系[5]。2020 年, 杜伟和傅游等人在图形处理器(CPU)上使用最小二乘蒙特卡罗法(Least Squares Monte Carlo, LSM)分别实现了一维美式期权定价和四维美式期权定价的并行化, 实现了整个定价过程的加速[6]。

国外学者在期权定价方面的钻研起步较早, 且研究的内容更为广泛和深入, 为我国理财产品的发展提供了一定的参考和借鉴。而我国由于研究时间较短, 因此相关研究相对浅显一点, 随着时代的发展, 对于理财产品的研究逐渐趋于成熟, 但其中对区间型外币理财产品的定价研究较少, 基于此, 本文对区间型外币理财产品进行定价研究。

## 2. 汇率建模

投资者购买外币理财产品时, 需先将本国货币兑换成外国货币, 到期时再将外国货币兑换成美国货币。这意味着, 其到期收益将受到汇率的影响, 故需先知道汇率所遵循的模型。

本节对汇率适合的随机模型进行统计推断。据此, 在新浪财经网收集了 2018 年 5 月 1 日到 2019 年 5 月 1 日的美元兑人民币汇率历史收盘数据。本节利用 R 语言按照以下七个环节对汇率的历史数据的收盘价格进行分析建模。

a) 平稳性检验 - 时序图

绘制美元兑人民币汇率历史收盘价格的时序图, 见图 1。

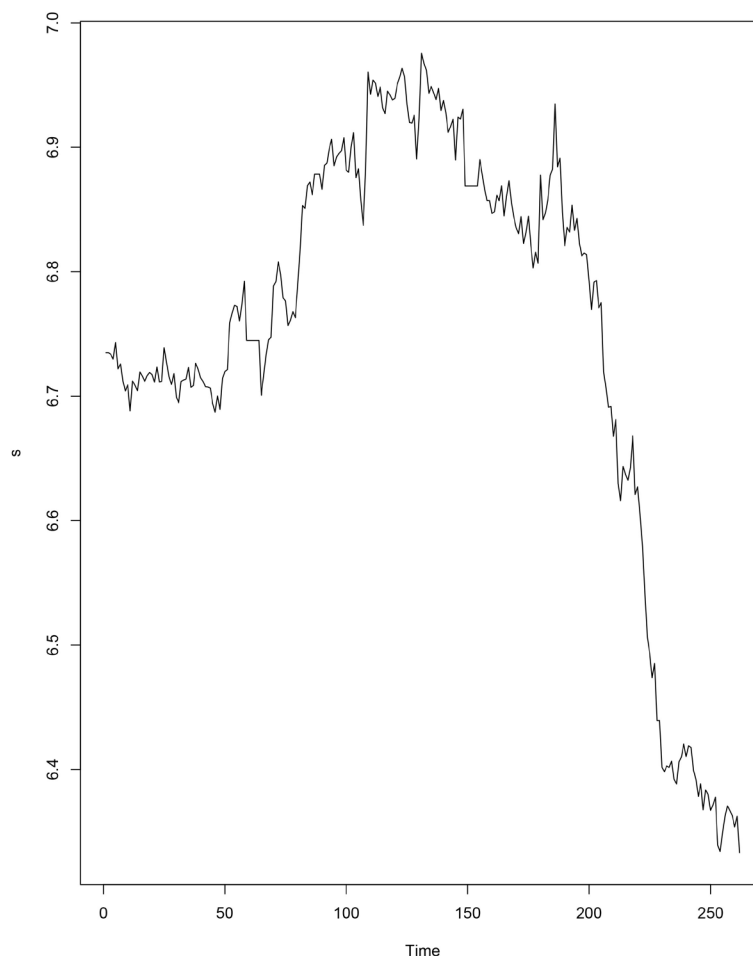


Figure 1. Raw data timing diagram

图 1. 原始数据时序图

由图 1 可以看出, 该美元兑人民币汇率序列呈现先缓慢增长后急速下降的趋势, 并伴随着上下波动, 显著非平稳, 可初步判断该组数据是非平稳的。

b) 平稳性检验 - 单位根检验

接下来采用统计方法明确该序列的平稳性, 为了获得更为准确的平稳性结果, 这里补充 ADF 单位根检验, 即用 ADF 检验来检验含有高阶序列相关的序列是否存在单位根。

Table 1. Raw data ADF test output

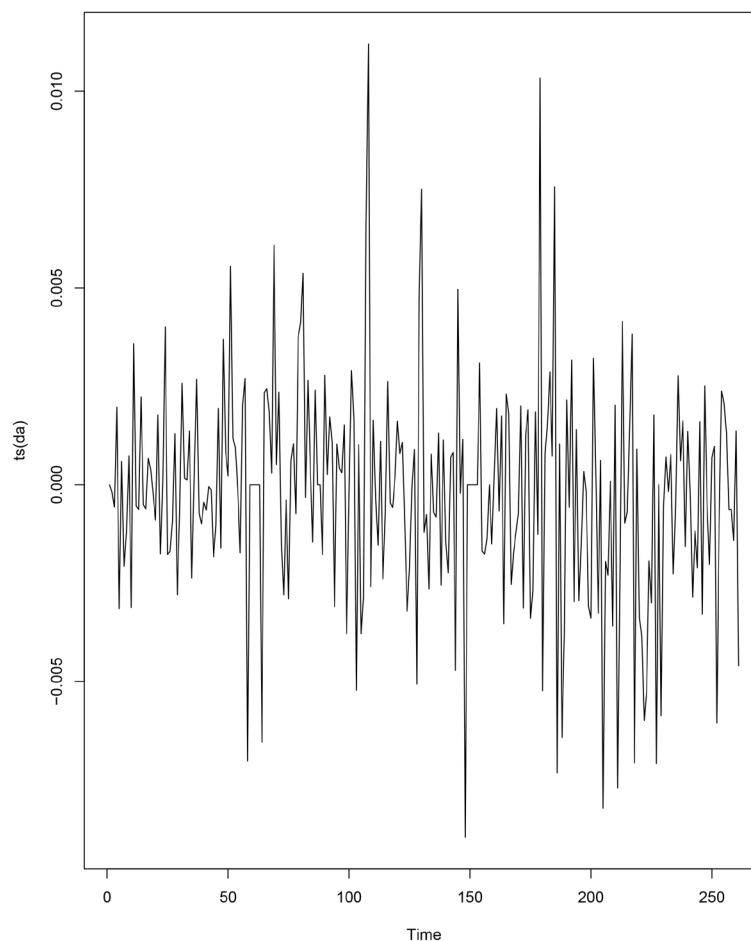
表 1. 原始数据 ADF 检验输出结果

Title: Augmentde Dickey-Fuller Test
P-VALUE: 0.1685

由输出结果表 1 分析, 单位根检验的  $p\text{-value} = 0.1685 > 0.05$ , 从而不能拒绝序列存在单位根, 故而说明该序列不平稳。

#### c) 平稳化处理

由于不平稳的数据不利于建模, 故对 2018 年 5 月 1 日到 2019 年 5 月 1 日的美元兑人民币汇率历史收盘数据进行平稳化处理, 将其分别取对数并差分, 其趋势见图 2。



**Figure 2.** Timing diagram after data logarithmic parallel difference

**图 2.** 数据对数并差分后的时序图

从图 2 上来看处理后的数据趋于平稳且在均值在 0 附近波动, 进而再次对其进行 ADF 检验。

**Table 2.** ADF test output

**表 2.** ADF 检验输出结果

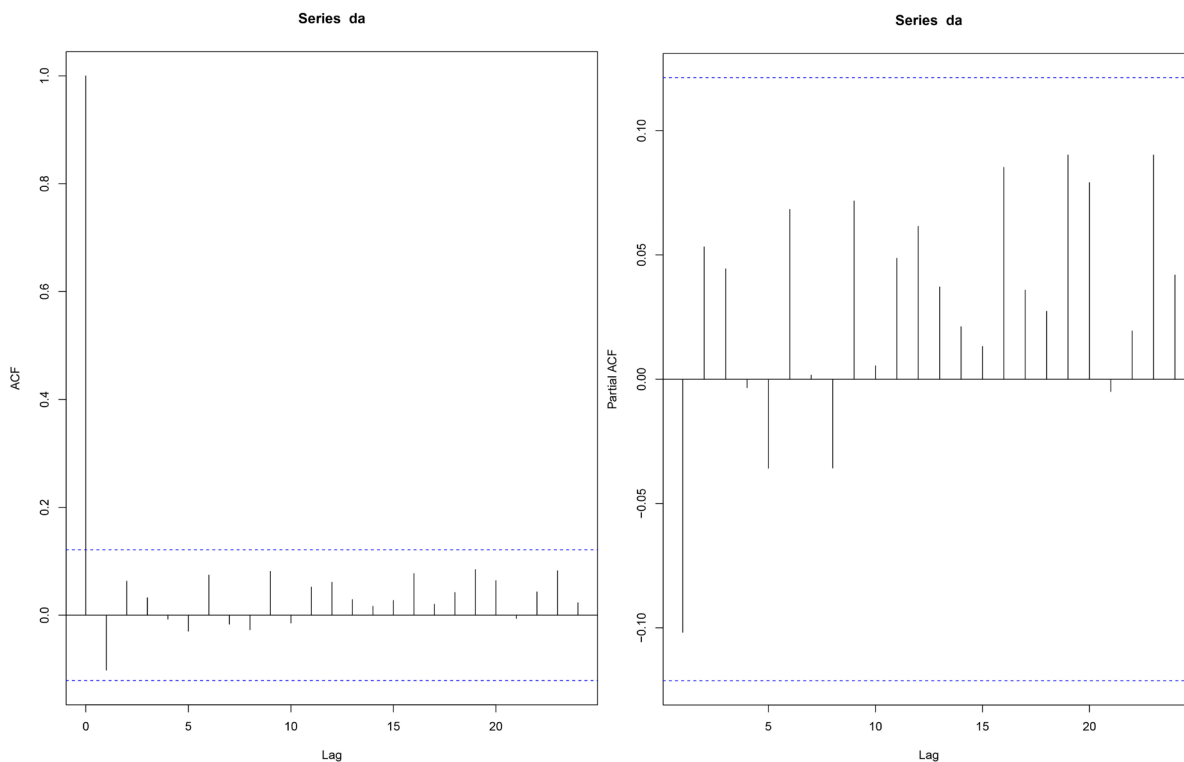
Title: Augmentde Dickey-Fuller Test
P-VALUE: 0.01

由输出结果表 2 看到, 该汇率序列进行 ADF 检验的  $p\text{-value} = 0.01 < 0.05$ , 拒绝原假设, 说明不存在单位根, 故美元兑人民币汇率对数差分序列显著平稳, 这和时序图的直观观察一致。

#### d) 相关性检验

数据趋于平稳, 意味着美元兑人民币汇率对数差分序列的均值及方差为常数, 且协方差仅与时间间

隔有关, 进一步刻画数据特征, 进行相关性检验。



**Figure 3.** Autocorrelation graph and partial autocorrelation graph after data is logarithmic and differential  
**图 3.** 数据取对数并差分后的自相关图及偏自相关图

由图 3 可知, 所有处理后的数据都在 2 倍标准差内, 可以看出该序列不存在相关性, 可初步判断该序列属于白噪声序列。相应 Box 检验的结果见表 3。

**Table 3.** Box test output  
**表 3.** Box 检验输出结果

Title: Box-Pierce test	
X-squared = 5.7007	X-squared = 9.4197
Df = 6	Df = 12
p-value = 0.4575	p-value = 0.6667

得到 Box 检验结果的 p-value = 0.4575 (延迟 6 期), p-value = 0.6667 (延迟 12 期), 其 p 值均大于 0.05, 可以判定该序列为白噪声序列。

e) 正态一致性检验

由上文分析已得到平稳化后的汇率序列是白噪声序列, 为了分析该白噪声序列的类型, 还需用 K-S 检验进行正态性分析。

**Table 4.** K-S test output  
**表 4.** K-S 检验输出结果

Title: One-sample Kolmogorov-Smirnov test
p-value = 0.1183

由输出结果表 4 可以看到, K-S 检验的  $p\text{-value} = 0.1183 > 0.05$ , 因此可以判断该序列为正态白噪声序列。

#### f) 独立性检验

在上一环节中已经证实该美元兑人民币汇率对数差分序列遵循正态分布, 加之序列不存在相关性, 从而依据正态分布的统计特征, 该美元兑人民币汇率对数差分序列相互独立。这里进一步验证独立性结果, 进行 BDS 检验。

**Table 5.** BDS test output  
**表 5.** BDS 检验输出结果

Title: BDS test
p-value = 0.0545

由输出结果表 5 可知,  $p\text{-value} = 0.0545 > 0.05$ , 故而认为该数据之间是独立的。

#### g) t 检验

为了进一步判断汇率遵循的模型, 还需进行 t 检验。

**Table 6.** t test output  
**表 6.** t 检验输出结果

Title: One Sample t-test
p-value = 0.1782

由 t 检验输出结果表 6 可知,  $p\text{-value} = 0.1782 > 0.05$ , 从而对数差分汇率数据的均值为 0。

根据以上分析, 我们可以认为美元兑人民币汇率对数差分序列为正态白噪声序列, 从而汇率在风险中性测度下应当遵循如下模型:

$$dq_t = \sigma_q q_t dW_q \quad (1)$$

其中  $q_t$  表示  $t$  时刻的美元兑人民币的汇率,  $W_q$  为标准布朗运动,  $\sigma_q$  表示汇率的波动率, 由文献[7]可知, 其矩估计满足

$$\hat{\sigma}_q = \frac{\hat{s}}{\sqrt{\Delta_t}}$$

这里  $\hat{s}$  是表示汇率的对数差分序列  $u_{iq}$  的标准差

$$\hat{s}_q = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, u_{iq} = \ln \left( \frac{q_i}{q_{i-1}} \right)$$

本节已得到人民币兑美元汇率在未来时刻所遵循的随机模型, 接下来, 将考虑当理财产品价格受汇率波动影响时其收益情况。

## 3. 外币理财产品定价

### 3.1. 相关假设

对外币理财产品的定价研究之前, 需要先做如下假设:

假设 1 市场是完全的, 所有资产是完全可以无限细分, 且没有卖空限制。

假设 2 在衍生证券生命期内, 无风险利率采用连续复利的方式计算考虑我国区间理财产品大多期限

较短的实际情况, 因此假定利率为固定利率。

假设 3 市场是无套利的[7]。

假设 4 黄金价格也遵循修正后的几何布朗运动模型。

### 3.2. 外币理财产品收益函数

外币区间理财产品收益函数较为复杂, 其随机因素除了受挂钩风险资产价格的影响, 还受到汇率因素的制约, 获取解析定价结果是困难的。考察一种常见的区间外币理财产品, 当理财产品不受汇率影响时, 其到期日的收益  $f(S)$  为

$$f(S) = \begin{cases} F \cdot (1 + r_1 T) & \min S_i \leq K \\ F \cdot (1 + r_2 T) & \min S_i > K \end{cases}$$

其中,  $i=1,2,\dots,T$ ,  $S_i$  为观察期黄金价格,  $F$  是投资人的本金,  $r_1$  和  $r_2$  为区间理财产品事先约定好的投资收益率,  $K$  为理财产品事先约定好的观察水平,  $T$  表示理财产品约定好的到期日。当理财产品的收益受汇率影响时, 其到期日的收益  $F(S)$  可以表示为

$$F(S) = \frac{q_0}{q_T} f(S) = \begin{cases} \frac{F \cdot q_0 \cdot (1 + r_1 T)}{q_T} & \min S_i \leq K \\ \frac{F \cdot q_0 \cdot (1 + r_2 T)}{q_T} & \min S_i > K \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $q_0$  为期初汇率,  $q_T$  为到期时汇率, 依据文献[7], 本章假定黄金价格遵循几何 Brown 运动模型

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

其中,  $W_t$  是标准布朗运动,  $\mu_t$  表示黄金价格的收益率, 这里用无风险利率  $r$  表示,  $\sigma_t$  表示黄金价格的波动率。

### 3.3. 蒙特卡罗模拟算法

风险中性测度定价方法的一个优点是, 它可以有效地把蒙特卡罗模拟思想引进来, 尤其对一些结构比较复杂的理财产品。这时候利用蒙特卡罗模拟是比较方便的, 并且由于蒙特卡罗模拟不受维度的影响, 这使得其在对结构复杂的理财产品进行定价时颇受青睐。

考虑 Girsanov 测度变换, 在在风险中性概率测度  $Q$  下, 黄金价格和汇率适合随机微分方程组

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t \\ dq_t = \sigma_q q_t dW_q \end{cases}$$

其中  $r$  是无风险收益率, 容易证明

$$\begin{aligned} \ln S_t &\sim N \left[ \ln S_t + \left( r - \frac{\sigma_t^2}{2} \right), \sigma_t^2 T \right] \\ \ln q_t &\sim N \left[ \ln q_t + \left( -\frac{\sigma_q^2}{2} \right), \sigma_q^2 T \right] \end{aligned}$$

即黄金价格  $S_t$  和汇率过程  $q_t$  服从对数正态分布, 并且二者存在线性相关

$$dW_t \cdot dW_q = \rho_{tq} dt \quad (3)$$

考虑到计算软件产生两个相互独立的白噪声序列更为容易, 这里采用 Cholesky 分解方法将白噪声  $dW_t$  和  $dW_q$  进行分解[8]。

假设  $dz_1, dz_2$  为独立的随机变量, 服从均值为 0, 标准差为  $\sqrt{dt}$  的正态分布, 则可以将  $dW_t$  和  $dW_q$  转换成以下随机过程

$$\begin{cases} dW_1 = a_{11}dz_1 \\ dW_2 = a_{21}dz_1 + a_{22}dz_2 \\ dz_1 \cdot dz_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$a_{ij} = \frac{\rho_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}a_{jk}}{a_{ii}}, \quad a_{ii} = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2}$$

再令  $dz_1 = \varepsilon_1\sqrt{T}, dz_2 = \varepsilon_2\sqrt{T}$ , 其中  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  是相互独立的正态随机变量,  $i, j = 1, 2$ , 根据前述假设条件可以得到

$$\begin{cases} S_t = S_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T + \sigma_1 a_{11} \varepsilon_1 \sqrt{T}\right] \\ q_t = q_0 \exp\left[\left(-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)T + \sigma_2 (a_{21} \varepsilon_1 + a_{22} \varepsilon_2) \sqrt{T}\right] \end{cases} \quad (5)$$

这里

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

为下三角矩阵, 使得  $AA^T = \sum_{ij} U$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $\sum_{ij} U$  为协方差阵。以上即为 Cholesky 分解, 在之后的实证分析中, 将用 R 软件实现这一过程, Cholesky 分解便于产生线性相关的多个过程。因此, 可利用黄金价格、汇率信息得到矩阵 A。具体模拟步骤如下。

- 1) 通过模拟过程, 生成标准正态分布的随机数  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ;
- 2) 根据正态分布随机数计算出服从对数正态分布的黄金价格  $S_t$  和汇率价格  $q_t$ ;
- 3) 再计算对应的收益函数值  $f(S_t, q_t)$ ;
- 4) 重复以上过程  $n+1$  次;

$$f(S_1, q_1), f(S_2, q_2), \dots, f(S_{n+1}, q_{n+1})$$

- 5) 利用收益样本计算  $E[f(S)]$  的无偏估计  $\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} f(S_i)$ ;
- 6) 最后在风险中性测度下对收益函数的均值进行折现即得到产品价格的矩估计值。

$$\hat{V}_t = e^{-rT} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} f(S_i) \quad (6)$$

考察数值模拟的误差, 假设  $f(S_t)$  的方差为  $\sigma_f^2$ , 注意抽样过程是相互独立同分布的, 容易证明  $\hat{V}_t$  的方差满足

$$\hat{V}_t = e^{-2rT} \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_f^2 = \frac{1}{n+1} e^{-2rT} \sigma_f^2 \quad (7)$$



从上式可以看出 Monte-Carlo 的模拟次数越多,  $\hat{C}_i$  的估计结果越精确。

#### 4. 实证分析

本节选取的理财产品为中国银行发行的汇聚宝系列某款理财产品, 该理财产品业务自 2010 年以来均有发行, 其挂钩的是黄金价格(以美元计), 当我国投资者购买该产品时需要将人民币换成美元进行购买, 到期时, 再换算成人民币, 很明显其价值受到汇率影响, 该理财产品信息如表 7 所示:

**Table 7.** Financial product manual

**表 7.** 理财产品说明书

产品名称	汇聚宝	
产品类型	保本浮动收益型	
投资及理财收益币种	美元	
认购起点金额	8000 美元	
观察期	90 天	
挂钩指标	名称	定盘价格
	每盎司黄金价格(以美元计)	每盎司黄金买入价格
预期年化投资收益率	条件	预期年化投资收益率
	如果在观察期内, 挂钩指标曾经低于或者等于观察水平	2.50%
	如果在观察期内, 挂钩指标始终保持在观察水平之上	0.20%
观察水平	期初价格-55.00	

此产品无提前赎回权, 因此该产品其实满足欧式期权的假设, 产品的起购价为 8000 美元, 当我国投资者购买该产品时需要先将人民币兑换成美元, 故该理财产品的收益是受美元/人民币汇率波动影响的。

为释放黄金与美元/人民币汇率之间的差距, 将选取 2018 年 5 月 1 日到 2019 年 5 月 1 日的黄金价格作为样本数据, 估算黄金价格及汇率相关参数, 同时也将估算汇率的相关参数, 如表 8 所示:

**Table 8.** Table of estimated values of unknown parameters of gold price and exchange rate

**表 8.** 黄金价格及汇率未知参数估计值表

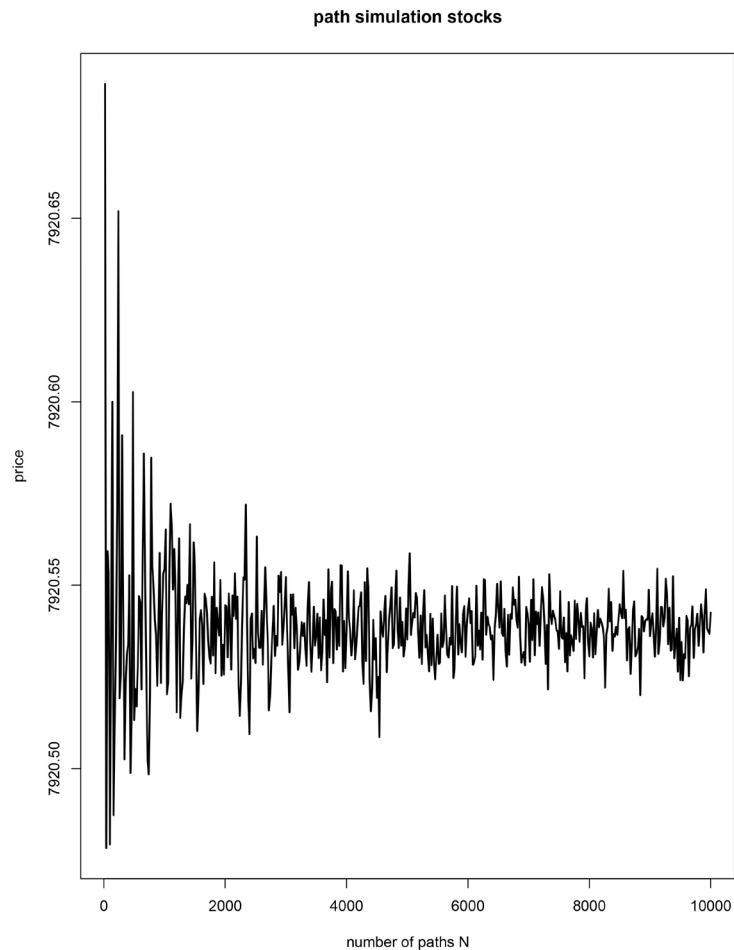
名称	收益率均值	收益率标准差	股价波动率
黄金参数估计	0.055187	0.005732	0.109499
汇率参数估计	-0.000237	0.002830	0.054063

进一步进行 Cholesky 分解, 下三角矩阵  $A$  的估计结果如下:

$$A = \begin{pmatrix} 0.002829779 & \\ -0.003194001 & 0.004758992 \end{pmatrix}$$

将 2019 年 5 月 1 日, 黄金价格收盘价及美元/人民币汇率收盘价作为其分别的期初价格, 黄金(以美元计)期初价格为  $S_0 = 1276.6$ , 美元/人民币汇率期初价格为  $q_0 = 6.7349$ 。收益期限为 91 天, 以 2019 年六个月以内的商业贷款利率为无风险利率, 即为 4.35%,  $K = S_0 - 55$ ,  $r_1 = 2.5\%$ ,  $r_2 = 0.2\%$ , 将以上各参数估计值代入所构造的蒙特卡罗模拟方案中, 即可得到各股票期末值。

为了提高蒙特卡罗模拟精度, 本节将其模拟次数设置为 10,000 次, 其模拟价格如下所示:



**Figure 4.** Financial product price simulation path  
**图 4.** 理财产品价格模拟路径

**Table 9.** Simulated prices and variances of wealth management products  
**表 9.** 理财产品模拟价格及方差

次数	2000	4000	6000	8000	10000
价格(美元)	7920.520	7920.529	7920.536	7920.534	7920.541
方差	0.383111	0.3757612	0.3725838	0.3656451	0.3616035

由图 4 可看出, 模拟次数在 2000 时, 其每次模拟价格波动区间大致在区间[7920.50, 7920.58]上, 但当模拟次数达到一万后, 其模拟价格的波动区间基本稳定在了[7920.53, 7920.55]; 由表 9 可看出, 随着模拟路径的增加, 模拟价格的方差逐渐减小, 由此可见, 增加模拟路径, 可以缩小方差提高精度, 模拟 10,000 次后的最终理论价格为

$$\hat{V}_i(q) = e^{-rT} E[f(S)] = 7920.541 \quad (8)$$

溢价率

$$\left( \frac{F - \hat{V}_i(q)}{F} \right) \times 100\% = 0.99325\% \quad (9)$$

可以看出, 在银行理财产品按面值发行的情况下, 该理财产品定价偏高, 理应为 7920.541 美元, 属于溢价发行, 溢价率较低, 为 0.99325%, 意味着, 到期时的收益会比预期收益低。同时, 我们也知道, 当购买外币理财产品时, 投资者还要承担汇率波动所带来的风险。

## 5. 总结

本文采用蒙特卡罗模拟方法研究了受汇率影响的外币区间理财产品的定价问题。为了模拟黄金价格和汇率的随机噪声这里引入了 Cholesky 分解方案。该方法仅对线性关联有效, 其它方式的相关关联还有待于进一步的研究。未来外币理财产品将会受到更多投资者的关注, 本文希望能为发行银行在产品定价方面提供思路, 为丰富发行银行的理财产品种类提供参考, 让普通投资者可以比较轻松地去正确评估区间理财产品的价值, 方便其在规定的投资期限内面对多个选择时, 对比选出最适合自己的理财产品。

## 基金项目

贵州省科学技术基金项目(No.黔科合 J 字[2015]2076), 贵州省教育厅青年科技人才成长项目(No.黔教 KY 字[2016]168)。

## 参考文献

- [1] Das, S. and Wiley, J. (2001) Structured Products and Hybrid Securities. *Computer Software*.
- [2] Chang, C.W., Chang, J.S.K. and Tian, Y.S. (2006) Subordinated Binomial Option Pricing. *Journal of Financial Research*, **29**, 559-574. <https://doi.org/10.1111/j.1475-6803.2006.00194.x>
- [3] 王凡. 并行 Monte Carlo 方法研究及其在期权定价中的应用[D]: [硕士学位论文]. 郑州: 郑州大学, 2007.
- [4] Baule, R. and Tallau, C. (2011) The Pricing of Path Dependem Structured Financial Retail Products: The Case of Bonus Certificates. *Journal of Derivatives*, **18**, 54-71. <https://doi.org/10.3905/jod.2011.18.4.054>
- [5] 王国帅, 赵佃立. 基于不确定理论的风险中性测度及其在欧式期权定价中的应用[J]. *经济数学*, 2016, 33(2): 23-28.
- [6] 杜伟, 傅游. 基于 GPU 的最小二乘蒙特卡罗算法期权定价[J]. *计算机工程与应用*, 2020, 56(4): 225-229.
- [7] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版, 2008.
- [8] 陈金龙, 任敏. 股票挂钩保本型区间人民币理财产品定价[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2010, 31(3): 342-345.