Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(6), 911-918**
Published Online June 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.96108

Characterization of Derivations on von Neumann Algebras by Derivable Maps

Yue Li, Runling An

Department of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi
Email: 1017177467@qq.com, runlingan@aliyun.com

Received: May 31st, 2020; accepted: Jun. 15th, 2020; published: Jun. 22nd, 2020

Abstract

Let $\mathcal{A}$ be a von Neumann algebra and $\Omega \in \mathcal{A}$ be an arbitrary but fixed operator. In this paper, we show that a linear bounded map $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is derivable at Ω, that is, $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$ for every $A, B \in \mathcal{A}$ with $AB = \Omega$ if and only if there exists a derivation $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ such that $\delta(A) = \tau(A) + \delta(I)A$ for all $A \in \mathcal{A}$ where $\delta(I)$ is in the center of $\mathcal{A}$ and $\delta(I)\Omega = 0$. In particular, if $\mathcal{A}$ is a von Neumann algebra with no summands of type I_1 or a properly infinite von Neumann algebra, similar results can be obtained by weakening the linearity and continuity assumption of δ into additivity.

Keywords

von Neumann Algebra, Derivable Maps, Derivations, Central Carrier, Generalized Derivation

von Neumann代数上的可导映射与导子

李　悦，安润玲

太原理工大学数学学院，山西　太原
Email: 1017177467@qq.com, runlingan@aliyun.com

收稿日期：2020年5月31日；录用日期：2020年6月15日；发布日期：2020年6月22日

摘　要

设 $\mathcal{A}$ 为von Neumann代数，$\Omega \in \mathcal{A}$ 为任意但固定的算子。本文证明有界线性映射 $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 在 Ω 可导，即 $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$，$A, B \in \mathcal{A}$，$AB = \Omega$ 当且仅当存在导子 $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 使得

文章引用: 李悦, 安润玲. von Neumann 代数上的可导映射与导子[J]. 应用数学进展, 2020, 9(6): 911-918.
DOI: 10.12677/aam.2020.96108

$\delta(A)=\tau(A)+\delta(I)A$，$\forall A\in\mathcal{A}$，其中$\delta(I)\in Z(\mathcal{A})$且$\delta(I)\Omega=0$。特别地，若$\mathcal{A}$是没有$I_1$型直和项的von Neumann代数或真无限von Neumann代数，则将δ线性且连续的假设弱化为可加仍得到上述结果。

关键词

von Neumann代数，可导映射，导子，中心覆盖，广义导子

1. 引言

设$\mathfrak{R}$是含单位元I的环，称可加映射$\delta:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$是导子，若$\delta(AB)=\delta(A)B+A\delta(B)$，$\forall A,B\in\mathfrak{R}$；称$\delta$是广义导子，若$\delta(AB)=\delta(A)B+A\delta(B)-A\delta(I)B$，$\forall A,B\in\mathfrak{R}$。若可加映射$\tau:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$是导子，$\delta(I)\in Z(\mathcal{A})$，则由$\delta(A)=\tau(A)+\delta(I)A$，$\forall A\in\mathfrak{R}$定义的$\delta:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$是广义导子，我们称之为标准广义导子。导子和广义导子在理论和实际中有重要作用，得到了广泛的研究。可加映射在什么条件下成为(广义)导子的问题受到了学者们的广泛关注(见[1]-[8]及其参考文献)，其中研究热点之一是(广义)可导映射。称可加映射$\delta:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$在$\Omega\in\mathfrak{R}$(广义)可导，若$\delta(AB)=\delta(A)B+A\delta(B)$ ($\delta(AB)=\delta(A)B+A\delta(B)-A\delta(I)B$)，$\forall A,B\in\mathfrak{R}$，$AB=\Omega$。显然，可加映射是(广义)导子当且仅当它在每一点(广义)可导。一个自然而有趣的问题是：在给定点(广义)可导的可加映射是否是(广义)导子。参照文献[2]，称Ω为$\mathfrak{R}$的可加(广义)全可导点，若$\mathfrak{R}$上每个在Ω可导的可加映射事实上是(标准广义)导子。文献[3]证明了零算子是Hilbert空间套代数和Banach空间上标准算子代数的广义全可导点。Li和Zhou [4]证明了Banach代数到其自身在每个左、右分离点可导的可加映射是Jordan导子。文献[5]的主要结果表明，每个非零算子是$\mathcal{B}(H)$的可加全导点。在文献[6]中，给出了自反代数上在任意但固定算子可导的可加映射的充分必要条件，并证明了Hilbert空间套代数上每个非零算子是可加全可导点。Guo和An [7]证明了每个非零有限秩算子和每个非零算子分别是$\mathcal{B}(X)$和因子von Neumann代数的可加全可导点。本文证明了从von Neumann代数到其自身的有界线性映射δ在任意但固定算子上可导当且仅当它是一个标准广义导子。特别地，如果$\mathcal{A}$是没有I_1型直和项的von Neumann代数或真无限的von Neumann代数，则将δ的线性且连续假设弱化为可加仍得到类似结果，进而证明了每个算子都是无I_1型直和项的von Neumann代数或真无限的von Neumann代数上的可加广义全可导点。文献[7]中的主要结果推广到一般von Neumann代数。注意到文献[4] [5] [6] [7]中的方法主要依赖于代数的素性、有限秩算子的性质及谱分析。但一般的von Neumann代数可能不是素代数，也不一定含有限秩算子，因此前面的方法对一般的von Neumann代数是无效的。为了克服素性和有限秩算子缺失造成的困难，我们需要von Neumann代数理论中的一些深刻结果。von Neumann代数$\mathcal{A}$是$\mathcal{B}(H)$的自伴子代数($\mathcal{B}(H)$是复H空间上有界线性算子全体构成的代数)，且满足$\mathcal{A}''=\mathcal{A}$，其中$\mathcal{A}'=\{T\in\mathcal{B}(H),TA=AT,\forall A\in\mathcal{A}\}$，$\mathcal{A}''=\{\mathcal{A}'\}'$。用$Z(\mathcal{A})=\mathcal{A}\cap\mathcal{A}'$表示$\mathcal{A}$的中心。若$Z(\mathcal{A})=CI$，则称$\mathcal{A}$为因子von Neumann代数。对于$A\in\mathcal{A}$，记$C(A)$为$A$的中心覆盖，它是满足$\mathrm{P}A=A$的最小中心投影P。不难证明$C(A)$是由$\{BAx:B\in\mathcal{A},x\in H\}$张成的闭子空间上的投影。若$A$是自伴的，则$A$的core为$\underline{A}=\sup\{S\in Z(\mathcal{A}):S=S^*,S\le A\}$。若$A=P$是投影，则$\underline{P}$是$\le P$最大的中心投影。若$\underline{P}=0$，则称$P$是core-free (见[9])。容易验证$\underline{P}=0$当且仅当$C(I-P)=I$。一般von Neumann代数知识见参考文献[10] [11]。

2. 主要结果及证明

本文利用可导映射刻画 von Neumann 代数上的导子，主要结论如下：

定理 2.1 设 $\mathcal{A}$ 是 von Neumann 代数，$\Omega\in\mathcal{A}$ 是任意但固定的算子，则有界线性映射 $\delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 在 Ω 可导，即 $\delta(AB)=\delta(A)B+A\delta(B)$，$\forall A,B\in\mathcal{A}$，$AB=\Omega$ 当且仅当存在导子 $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 使得 $\delta(A)=\tau(A)+\delta(I)A$，$\forall A\in\mathcal{A}$，其中 $\delta(I)\in\mathcal{Z}(\mathcal{A})$，$\delta(I)\Omega=0$。

为证明定理 2.1，需要如下几个引理。

引理 2.2 设 $\mathcal{A}_i$ 是 Banach 代数，其单位元 I_i，$i=1,2,\cdots,n$。设代数 $\mathcal{A}$ 的形式为 $\mathcal{A}=\sum_{i=1}^{n}\oplus\mathcal{A}_i$，$\Omega=\sum_{i=1}^{n}\Omega_i\in\mathcal{A}$，$\Omega_i\in\mathcal{A}_i$。若 Ω_i 是 $\mathcal{A}_i$ 的可加广义全可导点，则 Ω 是 $\mathcal{A}$ 的可加广义全可导点。

证明 由假设可得 $\mathcal{A}$ 是含单位元 $I=\sum_{i=1}^{n}I_i$ 的 Banach 代数。假设 A_i 是 $\mathcal{A}_i$ 中的可逆元，t 是任意非零有理数。由 $\left(I-I_i+t^{-1}\Omega A_i^{-1}\right)\left[\left(I-I_i\right)\Omega+tA_i\right]=\Omega$ 和假设 δ 在 Ω 可导，有

$$\delta(\Omega)=\delta\left(I-I_i+t^{-1}\Omega A_i^{-1}\right)\left[\left(I-I_i\right)\Omega+tA_i\right]+\left(I-I_i+t^{-1}\Omega A_i^{-1}\right)\delta\left[\left(I-I_i\right)\Omega+tA_i\right],$$

因此 $\delta\left(I-I_i\right)A_i+\left(I-I_i\right)\delta\left(A_i\right)=0$，$\delta\left(A_i\right)=I_i\delta(A)+\delta\left(I_i\right)A_i-\delta(I)A_i$，则 $\delta\left(A_i\right)\in\mathcal{A}_i$。由于 $\mathcal{A}_i$ 是 Banach 代数，每个元都可以写成两个可逆元的和，因此 $\delta\left(A_i\right)\in\mathcal{A}_i$，$\forall A_i\in\mathcal{A}_i$。

设 $\delta_i=\delta|_{\mathcal{A}_i}$，对 $\forall A=\sum_{i=1}^{n}A_i$，$B=\sum_{i=1}^{n}B_i\in A$ 且 $AB=\Omega$，则 $A_iB_i=\Omega_i$。由假设 δ 在 Ω 可导，可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\Omega_i\right)&=\sum_{i=1}^{n}\delta\left(\Omega_i\right)=\delta(\Omega)=\delta(A)B+A\delta(B)\\&=\sum_{i=1}^{n}\delta\left(A_i\right)\sum_{i=1}^{n}B_i+\sum_{i=1}^{n}A_i\sum_{i=1}^{n}\delta\left(B_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(A_i\right)\sum_{i=1}^{n}B_i+\sum_{i=1}^{n}A_i\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(B_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i\left(A_i\right)+B_i+A_i\delta_i\left(B_i\right)\right)\end{aligned}$$

$\delta_i\left(\Omega_i\right)=\delta_i\left(A_i\right)B_i+A_i\delta_i\left(B_i\right)$，$\forall A_i,B_i\in\mathcal{A}_i$，$A_iB_i=\Omega_i$，即 δ_i 在 Ω_i 可导。因此，由假设可知 δ_i 是标准广义导子，设 $\delta_i\left(A_i\right)=\tau_i\left(A_i\right)+\delta_i\left(I_i\right)A_i$，$\forall A_i\in\mathcal{A}_i$，其中 $\delta_i\left(I_i\right)\in\mathcal{Z}\left(\mathcal{A}_i\right)$，$\tau_i:\mathcal{A}_i\to\mathcal{A}_i$ 是导子。对 $\forall A=\sum_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{A}$，由定义 $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 为 $\tau(A)=\sum_{i=1}^{n}\tau_i\left(A_i\right)$，易得 τ 是导子。因此由

$$\delta(A)=\sum_{i=1}^{n}\delta\left(A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\tau_i\left(A_i\right)+\delta_i\left(I_i\right)A_i\right)=\tau(A)+\delta(I)A$$

知 δ 是标准广义导子，Ω 是 $\mathcal{A}$ 的可加广义全可导点。

引理 2.3 设 $\mathcal{A}$ 是 von Neumann 代数，投影 $P\in\mathcal{A}$ 使得 $\underline{P}=0$，$C(P)=I$。

1) 对 $T\in\mathcal{A}$，若 $TPA(I-P)=0$，$\forall A\in\mathcal{A}$，则 $TP=0$。

2) 对 $T\in\mathcal{A}$，若 $PA(I-P)T=0$，$\forall A\in\mathcal{A}$，则 $(I-P)T=0$。

3) 对 $Z\in\mathcal{Z}(\mathcal{A})$，若 $Z\mathcal{A}_{12}=0$，则 $Z=0$。

证明 由 core-free 和中心覆盖的定义知 $\underline{I-P}=0$ 且 $C(I-P)=I$。

1) 由$\{A(I-P)x:\forall A\in \mathcal{A},x\in H\}$在$H$中稠密显然可得。

2) 由$PA(I-P)T=0$得$T^*(I-P)A^*P=0$，$\forall A\in \mathcal{A}$。由$\{A^*Px:\forall A\in \mathcal{A},x\in H\}$在$H$中稠密，可得$T^*(I-P)=0$且$(I-P)T=0$。

3) 由$Z\mathcal{A}_{12}=0$，$Z\in Z(\mathcal{A})$，得$Z\mathcal{A}_{12}=\mathcal{A}_{12}Z=0$，因此$ZP=0$，$(I-P)Z=Z(I-P)=0$且$Z=ZP+Z(I-P)=0$。

引理 2.4 设$\mathcal{A}$是 von Neumann 代数，$\Omega\in\mathcal{A}$且P是Ω的值域投影，若$C(P)=C(I-P)=I$，则Ω是$\mathcal{A}$的可加全可导点。

证明 令$P_1=P$，$P_2=I-P$，$\mathcal{A}_{ij}=P_i\mathcal{A}P_j$，$i,j=1,2$ 则$\mathcal{A}=\mathcal{A}_{11}+\mathcal{A}_{12}+\mathcal{A}_{21}+\mathcal{A}_{22}$。对$\forall A\in\mathcal{A}$，$A_{ij}=P_iAP_j\in\mathcal{A}_{ij}$，$1\le i,j\le 2$。由$P_1=P$是$\Omega$的值域投影，有$P_1\Omega=\Omega$。若$A\Omega=0$，则$AP_1=0$。

设可加映射$\delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$在$\Omega$可导，令$T=P_1\delta(P_2)P_2-P_2\delta(P_2)P_1$，定义$\tau(A)=\delta(A)-(TA-AT)$，$\forall A\in\mathcal{A}$，则$\tau$在$\Omega$可导当且仅当$\delta$在$\Omega$可导。此外$\tau(P_2)\in\mathcal{A}_{11}+\mathcal{A}_{22}$，不失一般性，假设$\delta(P_2)\in\mathcal{A}_{11}+\mathcal{A}_{22}$。

下证δ是一个导子。

设$A_{11}\in\mathcal{A}_{11}$是$\mathcal{A}_{11}$中的可逆元，对任意的非零有理数$t\in Q$，由$(A_{11}+tA_{11}A_{12})(A_{11}^{-1}\Omega-A_{12}A_{22}+t^{-1}A_{22})=\Omega$且$\delta$在$\Omega$可导，可得

$$\begin{aligned}\delta(\Omega)&=\delta(A_{11}+tA_{11}A_{12})(A_{11}^{-1}\Omega-A_{12}A_{22}+t^{-1}A_{22})\\&\quad+(A_{11}+tA_{11}A_{12})\delta(A_{11}^{-1}\Omega-A_{12}A_{22}+t^{-1}A_{22})\\&=\delta(A_{11})(A_{11}^{-1}\Omega-A_{12}A_{22})+A_{11}\delta(A_{11}^{-1}\Omega-A_{12}A_{22})+\delta(A_{11}A_{12})A_{22}\\&\quad+A_{11}A_{12}\delta(A_{22})+t^{-1}[\delta(A_{11})A_{22}+A_{11}\delta(A_{22})]\\&\quad+t[\delta(A_{11}A_{12})(A_{11}^{-1}\Omega-A_{12}A_{22})+A_{11}A_{12}\delta(A_{11}^{-1}\Omega-A_{12}A_{22})]\end{aligned}$$

由t的任意性可得

$$\delta(A_{11}A_{12})(A_{11}^{-1}\Omega-A_{12}A_{22})+A_{11}A_{12}\delta(A_{11}^{-1}\Omega-A_{12}A_{22})=0 \tag{1}$$

$$\delta(A_{11})A_{22}+A_{11}\delta(A_{22})=0 \tag{2}$$

$\delta(\Omega)=\delta(A_{11})A_{11}^{-1}\Omega+A_{11}\delta(A_{11}^{-1}\Omega)-\delta(A_{11})A_{12}A_{22}-A_{11}\delta(A_{12}A_{22})+\delta(A_{11}A_{12})A_{22}+A_{11}A_{12}\delta(A_{22})$。另一方面，由$A_{11}A_{11}^{-1}\Omega=\Omega$，可得$\delta(\Omega)=\delta(A_{11})A_{11}^{-1}\Omega+A_{11}\delta(A_{11}^{-1}\Omega)$。因此

$$\delta(A_{11})A_{12}A_{22}+A_{11}\delta(A_{12}A_{22})-\delta(A_{11}A_{12})A_{22}-A_{11}A_{12}\delta(A_{22})=0 \tag{3}$$

在(2)式中，令$A_{22}=P_2$，由$\delta(P_2)\in\mathcal{A}_{11}+\mathcal{A}_{22}$，得$\delta(A_{11})P_2+A_{11}\delta(P_2)=0$，$\delta(A_{11})P_2=0$。由(2)式，得$A_{11}\delta(A_{22})=0$，因此$P_1\delta(P_2)=0$。所以

$$P_1\delta(A_{22})=0，\ \delta(A_{11})P_2=0，\ \forall A_{11}\in\mathcal{A}_{11}，\ \forall A_{22}\in\mathcal{A}_{22}，\ \delta(P_2)\in\mathcal{A}_{22} \tag{4}$$

由$I\Omega=\Omega$，$\delta(\Omega)=\delta(I)\Omega+I\delta(\Omega)$，可得$\delta(I)\Omega=0$，$\delta(I)P_1=0$和$\delta(P_1)P_1=0$。结合$\delta(P_1)P_2=0$得$\delta(P_1)=0$。在(3)式中，令$A_{11}=P_1$，$A_{22}=P_2$得$\delta(P_1)A_{12}+P_1\delta(A_{12})-\delta(A_{12})P_2-A_{12}\delta(P_2)=0$，

$$P_1\delta(A_{12})P_1=P_2\delta(A_{12})P_2=0，\ A_{12}\delta(P_2)P_2=P_1\delta(P_1)A_{12}，\ \forall A_{12}\in\mathcal{A}_{12} \tag{5}$$

由(5)式和$\delta(P_1)P_1=0$，可得$A_{12}\delta(P_2)P_2=0$，$\forall A_{12}\in\mathcal{A}_{12}$。由引理 2.3 的(2)得$\delta(P_2)P_2=0$且由(4)式得

$$\delta(P_2)=0，\ \delta(I)=0 \tag{6}$$

对 $\forall A_{12}\in\mathcal{A}_{12}$， $t\in Q$，由 $(P_1+tA_{12})\Omega=\Omega$，得 $\delta(\Omega)=\delta(P_1)\Omega+P_1\delta(\Omega)+t\left[\delta(A_{12})\Omega+A_{12}\delta(\Omega)\right]$，故 $\delta(A_{12})\Omega+A_{12}\delta(\Omega)=0$。因此 $P_2\delta(A_{12})\Omega=0$ 结合(5)式可得 $P_2\delta(A_{12})P_1=0$，

$$\delta(A_{12})\in\mathcal{A}_{12}，\quad \forall A_{12}\in\mathcal{A}_{12} \tag{7}$$

由(3)式和(7)式，可得 $A_{12}\delta(A_{22})P_1=P_2\delta(A_{11})A_{12}=0$， $\forall A_{12}\in\mathcal{A}_{12}$。因此由引理 2.3 和(4)式得

$$P_2\delta(A_{22})P_1=P_2\delta(A_{11})P_1=0，\quad \delta(A_{11})\in\mathcal{A}_{11}，\quad \delta(A_{22})\in\mathcal{A}_{22} \tag{8}$$

对 $\forall A_{11}\in\mathcal{A}_{11}$， $A_{12}\in\mathcal{A}_{12}$， $A_{22}\in\mathcal{A}_{22}$，由(3)式和(6)式可得

$$\delta(A_{11}A_{12})=\delta(A_{11})A_{12}+A_{11}\delta(A_{12})，\quad \delta(A_{12}A_{22})=\delta(A_{12})A_{22}+A_{12}\delta(A_{22}) \tag{9}$$

对 $\forall A_{21}\in\mathcal{A}_{21}$，由 $P_1\Omega=\Omega$， $P_1(\Omega+A_{21})=\Omega$，可得 $\delta(\Omega)=\delta(P_1)\Omega+P_1\delta(\Omega)$， $\delta(\Omega)=\delta(P_1)(\Omega+A_{21})+P_1\delta(\Omega+A_{21})$ 且 $\delta(P_1)A_{21}+P_1\delta(A_{21})=0$。因为 $\delta(P_1)=0$，所以 $P_1\delta(A_{21})=0$。另一方面，由 $(P_1+A_{12})(\Omega-A_{12}A_{21}-A_{12}+A_{21}+P_2)=\Omega$，(7)式和(8)式可得

$$\delta(A_{12}A_{21})=\delta(A_{12})A_{21}+A_{12}\delta(A_{21})，\quad \forall A_{12}\in\mathcal{A}_{12}，\quad A_{21}\in\mathcal{A}_{21} \tag{10}$$

(10)式右乘 P_2，得 $A_{12}\delta(A_{21})P_2=0$， $P_2\delta(A_{21})P_2=0$。结合 $P_1\delta(A_{21})=0$，可得

$$\delta(A_{21})\in\mathcal{A}_{21}，\quad \forall A_{21}\in\mathcal{A}_{21} \tag{11}$$

为证明 δ 是导子，只需证明 $\delta(A_{ij}A_{kl})=\delta(A_{ij})A_{kl}+A_{ij}\delta(A_{kl})$， $\forall A_{ij}\in\mathcal{A}_{ij}$， $A_{kl}\in\mathcal{A}_{kl}$， $i,j,k,l=\{1,2\}$。记每种情形为 Case(ij,kl)。Case (11, 12) (12, 22) (12, 21)分别由(9)式和(10)式可得。只需证 Case(11, 11) (22, 22) (21, 11) (22, 12) (22, 21)。

对 $\forall A_{11},B_{11}\in\mathcal{A}_{11}$， $A_{12}\in\mathcal{A}_{12}$，由(9)式可得

$$\begin{aligned}\delta(A_{11}B_{11}A_{12})&=\delta(A_{11}B_{11})A_{12}+A_{11}B_{11}\delta(A_{12})\\&=\delta(A_{11})B_{11}A_{12}+A_{11}\delta(B_{11}A_{12})\\&=\delta(A_{11})B_{11}A_{12}+A_{11}\delta(B_{11})A_{12}+A_{11}B_{11}\delta(A_{12})\end{aligned}$$

则 $\left[\delta(A_{11}B_{11})-\delta(A_{11})B_{11}-A_{11}\delta(B_{11})\right]A_{12}=0$。因此，由引理 2.3 可得

$$\delta(A_{11}B_{11})=\delta(A_{11})B_{11}+A_{11}\delta(B_{11})，\quad \forall A_{11},B_{11}\in\mathcal{A}_{11} \tag{12}$$

类似可得 $\delta(A_{22}B_{22})=\delta(A_{22})B_{22}+A_{22}\delta(B_{22})$， $\forall A_{22},B_{22}\in\mathcal{A}_{22}$。

对 $\forall A_{21}\in\mathcal{A}_{21}$， $A_{11}\in\mathcal{A}_{11}$ 和 $A_{12}\in\mathcal{A}_{12}$，由(10)式，(12)式和

$$\begin{aligned}\delta(A_{12}A_{21}A_{11})&=\delta(A_{12})A_{21}A_{11}+A_{12}\delta(A_{21}A_{11})\\&=\delta(A_{12}A_{21})A_{11}+A_{12}A_{21}\delta(A_{11})\\&=\delta(A_{12})A_{21}A_{11}+A_{12}\delta(A_{21})A_{11}+A_{12}A_{21}\delta(A_{11})\end{aligned}$$

可得 $A_{12}\delta(A_{21}A_{11})=A_{12}\left[\delta(A_{21})A_{11}+A_{21}\delta(A_{11})\right]$，$\delta(A_{21}A_{11})=\delta(A_{21})A_{11}+A_{21}\delta(A_{11})$，$\forall A_{21}\in\mathcal{A}_{21}$，$A_{11}\in\mathcal{A}_{11}$。类似可得 $\delta(A_{22}A_{21})=\delta(A_{22})A_{21}+A_{22}\delta(A_{21})$， $\forall A_{22}\in\mathcal{A}_{22}$， $A_{21}\in\mathcal{A}_{21}$。

对 $\forall A_{12},B_{12}\in\mathcal{A}_{12}$， $A_{21}\in\mathcal{A}_{21}$，由(9)式，(10)式和

$$\begin{aligned}\delta(B_{12}A_{21}A_{12})&=\delta(B_{12})A_{21}A_{12}+B_{12}\delta(A_{21}A_{12})\\&=\delta(B_{12}A_{21})A_{12}+B_{12}A_{21}\delta(A_{12})\\&=\delta(B_{12})A_{21}A_{12}+B_{12}\delta(A_{21})A_{12}+B_{12}A_{21}\delta(A_{12})\end{aligned}$$

可得 $B_{12}\delta(A_{21}A_{12})=B_{12}\delta(A_{21})A_{12}+B_{12}A_{21}\delta(A_{12})$。结合引理 2.3 可得

$$\delta(A_{21}A_{12})=\delta(A_{21})A_{12}+A_{21}\delta(A_{12})，\ \forall A_{21}\in\mathcal{A}_{21}，\ A_{12}\in\mathcal{A}_{12}$$

因此δ是导子且Ω是$\mathcal{A}$的可加全可导点。证毕。

设$\mathcal{A}$是含单位元的代数，$\mathcal{M}$是含单位元的$\mathcal{A}$-双模，$\forall M\in\mathcal{M}$，$A\in\mathcal{A}$，当A满足由$AM=0\ (MA=0)$有$M=0$时，称A为$\mathcal{M}$的左(右)分离点。

根据文献[4]引理2.5和von Neumann代数上的每个Jordan导子是导子这一事实，可得

引理2.5 von Neumann代数中的每个左或右分离点都是可加全可导点。

引理2.6 设$\mathcal{A}$是von Neumann代数，则有界线性映射$\delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$在0点可导当且仅当存在可导映射$\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$使得$\delta(A)=\tau(A)+\delta(I)A$，$\forall A\in\mathcal{A}$，其中$\delta(I)\in Z(\mathcal{A})$。

证明 对任意幂等元$P\in\mathcal{A}$，由$(I-P)P=0$，得$\delta((I-P)P)=(\delta(I)-\delta(P))P+(I-P)\delta(P)$，即$\delta(P)=\delta(P)P+P\delta(P)-\delta(I)P$。类似地，由$P(I-P)=0$，得$\delta(P)=\delta(P)P+P\delta(P)-P\delta(I)$，此蕴涵$\delta(I)P=P\delta(I)$。因为$\mathcal{A}$中投影的线性张在$\mathcal{A}$中稠密，所以$\delta(I)\in Z(\mathcal{A})$。对$\forall A\in\mathcal{A}$，由$AP(I-P)=0$，$A(I-P)P=0$，可得$\delta(AP)(I-P)+AP\delta(I-P)=0$，$\delta(A(I-P))P+A(I-P)\delta(P)=0$，即$\delta(AP)-\delta(AP)P+AP\delta(I)-AP\delta(P)=0$，$\delta(A)P-\delta(AP)P+A\delta(P)-AP\delta(P)=0$。因为$\delta$是有界的且$\mathcal{A}$中投影的线性张是稠密的，所以$\delta(AP)=\delta(A)P+A\delta(P)-AP\delta(I)=0$，$\delta(AB)=\delta(A)B+A\delta(B)-\delta(I)AB$，$\forall A,B\in\mathcal{A}$。定义$\tau(A)=\delta(A)-\delta(I)A$，$\forall A\in\mathcal{A}$，由$\delta(I)\in Z(\mathcal{A})$，易得$\tau$是线性导子，$\delta(A)=\tau(A)+\delta(I)A$，$\forall A\in\mathcal{A}$，0是$\mathcal{A}$的广义线性全可导点。证毕。

由引理2.2-2.6，可证定理2.1。

定理2.1的证明 先证充分性。假设$\delta(A)=\tau(A)+\delta(I)A$，$\forall A\in\mathcal{A}$，其中$\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$是导子，$\delta(I)\in Z(\mathcal{A})$，$\delta(I)\Omega=0$。对$\forall A,B\in\mathcal{A}$，$AB=\Omega$，$\delta(AB)=\tau(AB)+\delta(I)AB=\tau(AB)+\delta(I)\Omega=\tau(AB)=\tau(A)B+A\tau(B)$。另一方面，

$$\begin{aligned}\delta(A)B+A\delta(B)&=(\tau(A)+\delta(I)A)B+A(\tau(B)+\delta(I)B)\\&=\tau(A)B+A\tau(B)+2\delta(I)AB=\tau(A)B+A\tau(B)\end{aligned}$$

因此，$\delta(AB)=\delta(A)B+A\delta(B)$，$\forall A,B\in\mathcal{A}$，$AB=\Omega$，$\delta$在$\Omega$可导。

下证必要性。设δ在Ω是可导，由$I\Omega=\Omega$得$\delta(\Omega)=\delta(I)\Omega+I\delta(\Omega)$，$\delta(I)\Omega=0$。假设$\Omega$的值域投影是$P$，令$\Theta_1=I-C(I-P)$，$\Theta_2=I-C(P)$，$\Theta_3=I-\Theta_1-\Theta_2$，则$\Theta_1\le P$，$\Theta_2\le I-P$且$\{\Theta_i\}_{i=1,2,3}$是相互正交的中心投影。故$\mathcal{A}=\sum_{i=1}^{3}\oplus\mathcal{A}_i=\sum_{i=1}^{3}\oplus(\Theta_i\mathcal{A})$。$A=\sum_{i=1}^{3}A_i=\sum_{i=1}^{3}\Theta_iA$，$\forall A\in\mathcal{A}$。

情形1 $\ker(\Omega)=0$。

此时，Ω是$\mathcal{A}$的左分离点，因此由引理2.5知δ是导子，Ω是$\mathcal{A}$的可加(线性)全可导点。

情形2 $\ker(\Omega)\ne 0$。

因为$\Theta_1\le P$，有$\overline{ran\Omega_1}=\overline{ran\Theta_1\Omega}=\Theta_1$，所以$\Omega_1$是$\mathcal{A}_1$的右分离点，由引理2.5，$\Omega_1$是$\mathcal{A}_1$的可加(线性)全可导点。

因为$\Theta_2\le I-P$，有$\Omega_2=\Theta_2\Omega=0$，所以由引理2.6，$\Omega_2=0$是$\mathcal{A}_2$的线性广义全可导点。

注意到$\overline{ran\Omega_3}=\overline{ran\Theta_3\Omega}=\Theta_3P=P_3$，记$C_{\mathcal{A}_3}(P_3)$为$\mathcal{A}_3$中$P_3$的中心覆盖，有$\Theta_3-C_{\mathcal{A}_3}(P_3)\le\Theta_3-P_3=\Theta_3(I-P)\le I-P$。显然$\Theta_3-C_{\mathcal{A}_3}(P_3)$是正交于$\Theta_2$的中心投影，因此$\Theta_3-C_{\mathcal{A}_3}(P_3)+I-C(P)\le I-P$，即$\Theta_3-C_{\mathcal{A}_3}(P_3)+P\le C(P)$。故$\Theta_3-C_{\mathcal{A}_3}(P_3)=0$，$C_{\mathcal{A}_3}(P_3)=\Theta_3$。类似可得$C_{\mathcal{A}_3}(\Theta_3-P_3)=\Theta_3$。由引理2.4，得$\Omega_3$是$\mathcal{A}_3$的可加(线性)全可导点。

因此由引理2.2，Ω是$\mathcal{A}$的线性广义全可导点，即存在导子$\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$使得$\delta(A)=\tau(A)+\delta(I)A$，$\forall A\in\mathcal{A}$，其中$\delta(I)\in Z(\mathcal{A})$且$\delta(I)\Omega=0$。定理得证。

若 von Neumann 代数不包含非零的有限中心投影，则称该代数为真无限 von Neumann 代数。由真无限 von Neumann 代数中的每个元最多是五个幂等元的和(见[12])，通过类似于引理 2.6 的证明有

引理 2.7 设 $\mathcal{A}$ 是真无限 von Neumann 代数，则可加映射 $\delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 在 0 点可导当且仅当存在导子 $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 使得 $\delta(A)=\tau(A)+\delta(I)A$，$\forall A\in\mathcal{A}$，其中 $\delta(I)\in Z(\mathcal{A})$。

由引理 2.7 和定理 2.1 的类似证明有

定理 2.8 设 $\mathcal{A}$ 是真无限 von Neumann 代数，$\Omega\in\mathcal{A}$ 是任意但固定算子，则可加映射 $\delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 在 Ω 可导当且仅当存在导子 $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 使得 $\delta(A)=\tau(A)+\delta(I)A$，$\forall A\in\mathcal{A}$，其中 $\delta(I)\in Z(\mathcal{A})$ 且 $\delta(I)\Omega=0$。

由文献[7]中的定理 3.1 有

引理 2.9 设 $\mathcal{A}$ 是没有 I_1 型中心直和项的 von Neumann 代数，则可加映射 $\delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 在 0 点可导当且仅当存在导子 $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，使得 $\delta(A)=\tau(A)+\delta(I)A$，$\forall A\in\mathcal{A}$，其中 $\delta(I)\in Z(\mathcal{A})$ 且 $\delta(I)\Omega=0$。

由引理 2.9 和定理 2.1 的类似证明有

定理 2.10 设 $\mathcal{A}$ 是无 I_1 型中心直和项的 von Neumann 代数，$\Omega\in\mathcal{A}$ 是任意但固定算子，则可加映射 $\delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 在 Ω 可导当且仅当存在导子 $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 使得 $\delta(A)=\tau(A)+\delta(I)A$，$\forall A\in\mathcal{A}$，其中 $\delta(I)\in Z(\mathcal{A})$，$\delta(I)\Omega=0$。

显然因子 von Neumann 代数是没有 I_1 型中心直和项的 von Neumann 代数，由定理 2.10，我们得到以下结果

推论 2.11 设 $\mathcal{A}$ 是因子 von Neumann 代数，$\Omega\in\mathcal{A}$ 且 $\delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是可加映射

1) 若 $\Omega=0$，则 δ 在 Ω 可导当且仅当存在导子 $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 和 $\lambda\in C$ 使得 $\delta(A)=\tau(A)+\lambda A$，$\forall A\in\mathcal{A}$。

2) 若 $\Omega\neq0$，则 δ 在 Ω 可导当且仅当它是导子。

证明 因为 $\mathcal{A}$ 是因子 von Neumann 代数，由定理 2.1，存在 $\lambda\in C$，使得 $\delta(I)=\lambda I$，因此(1)成立。由 $\delta(I)\Omega=0$，$\Omega\neq0$ 和定理 2.1，可得 $\delta(I)=\lambda I=0$，(2)成立。

由推论 2.11，我们得到了文献[5]中的以下结论

推论 2.12 设可加映射 $\delta:B(H)\to B(H)$，$\Omega\in B(H)$。

1) 若 $\Omega=0$，则 δ 在 Ω 可导当且仅当存在导子 $\tau:B(H)\to B(H)$ 且 $\lambda\in C$，使得 $\delta(A)=\tau(A)+\lambda A$，$\forall A\in B(H)$。

2) 若 $\Omega\neq0$，则 δ 在 Ω 可导当且仅当它是导子。

致 谢

本文作者衷心感谢审稿人和读者的意见和建议。

参考文献

[1] Cristrl (1996) Local Derivations on Operator Algebras. *Journal of Functional Analysis*, **135**, 76-92. https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0004

[2] Zhu, J. and Xiong, C.P. (2007) Derivable Mappings at Unitoperator on Nest Algebras. *Linear Algebra and Its Applications*, **422**, 721-735. https://doi.org/10.1016/j.laa.2006.12.002

[3] Wu, J., Shi, J.L. and Li, P.T. (2002) Characterizations of Derivations on Some Operatoralgebras. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **66**, 227-232. https://doi.org/10.1017/S0004972700040077

[4] Li, J.K. and Zhou, J.R. (2011) Characterizations of Jordan Derivations and Jordan Homomorphisms. *Linear and Multilinear Algebra*, **59**, 193-204. https://doi.org/10.1080/03081080903304093

[5] Pan, Z.D. (2012) Derivable Maps and Derivational Points. *Linear Algebra and Its Applications*, **436**, 4251-4260. https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.01.027

[6] An, R.L. and Hou, J.C. (2013) Characterization of Derivations on Reflexive Algebras. *Linear and MultilinearAlgebra*, **61**, 1107-1119. https://doi.org/10.1080/03081087.2012.743025

[7] 郭玉琴, 安润玲. 因子 vonNeumann 代数上导子的等价刻画[J]. 数学学报, 2018, 61(4): 611-640.

[8] An, R.L., Xue, J.H. and Hou, J.C. (2015) Equivalent Characterization of Derivations on Operator Algebras. *Linear Multilinear Algebra*, **63**, 107-119. https://doi.org/10.1080/03081087.2013.851197

[9] Miers, C.R. (1971) Lie Homomorphisms of Operator Algebras. *Pacific Journalof Mathematics*, **38**, 717-735.

[10] Kadison, R.V. and Ringrose, J.R. (1983) Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Vol. I, Academic Press, New York.

[11] KADISON, R.V. and RINGROSE, J.R. (1986) Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Vol. II, Academic Press, New York.

[12] Pearcy, C. and Topping, D. (1967) Sums of Small Numbers of Idempotents. *Michigan Mathematical Jouranl*, **14**, 453-465. https://doi.org/10.1307/mmj/1028999848