Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(6), 965-971**
Published Online June 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.96114

Hans汉斯

A Kind of Dynamic Opial-Type Inequalities on Time Scales

Guangyi Cheng, Zhengrong Li, Kai Zhou*

School of Big Data and Artificial Intelligence, Chizhou University, Chizhou Anhui
Email: *zk1984@163.com

Received: Jun. 8th, 2020; accepted: Jun. 23rd, 2020; published: Jun. 30th, 2020

Abstract

In this paper, by using the tools of Cauchy-Schwarz inequality and Keller's chain rule on time scale, we obtain a class of Opial type inequality on time scale, and generalize the corresponding Opial type inequality in continuous and discrete cases.

Keywords

Time Scale, Opial-Type Inequality, Cauchy-Schwarz Inequality

一类时标上的Opial型不等式

程光一，李峥嵘，周　恺*

池州学院大数据与人工智能学院，安徽 池州
Email: *zk1984@163.com

收稿日期：2020年6月8日；录用日期：2020年6月23日；发布日期：2020年6月30日

摘　要

本文利用时标上的Cauchy-Schwarz不等式、Keller链式法则等工具，得到了一类时标上的Opial型不等式，推广了连续和离散情形下的相应Opial型不等式。

关键词

时标，Opial型不等式，Cauchy-Schwarz不等式

*通讯作者。

文章引用: 程光一, 李峥嵘, 周恺. 一类时标上的 Opial 型不等式[J]. 应用数学进展, 2020, 9(6): 965-971.
DOI: 10.12677/aam.2020.96114

1. 引言

1960 年，波兰数学家 Opial [1]证明了下面不等式

$$\int_a^b |x(t)||x'(t)|\mathrm{d}t \le \frac{b-a}{4}\int_a^b |x'(t)|^2\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

其中 $x(t)$ 为区间 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，且 $x(a)=x(b)=0$。由于其在微分方程、差分方程初边值问题研究中的重要性，许多学者给出了 Opial 不等式的各种推广及离散化的 Opial 不等式[2] [3] [4]，其中，Yang [5]简化了(1)式的证明，并给出了推广的不等式

$$\int_a^b q(t)|x(t)||x'(t)|\mathrm{d}t \le \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\int_a^b r(t)q(t)|x'(t)|^2\,\mathrm{d}t,$$

其中 $r(t)>0$、连续且满足 $\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{r(t)}<\infty$，$q(t)>0$ 且为 $[a,b]$ 上的有界非增函数；同时，Yang [5]还给出了更一般的不等式

$$\int_a^b |x(t)|^p |x'(t)|^q\,\mathrm{d}t \le \frac{q}{p+q}\left(\frac{b-a}{2}\right)^p \int_a^b |x'(t)|^{p+q}\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

其中 $p,q\ge 1$。关于离散形式的 Opial 不等式，Lasota [6]也讨论了不等式

$$\sum_{i=1}^{h-1}|x_i\Delta x_i| \le \frac{1}{2}\left[\frac{h+1}{2}\right]\sum_{i=0}^{h-1}|\Delta x_i|^2,$$

并给出了证明，其中 $\{x_i\}_{0\le i\le h}$ 为一实数列满足 $x_0=x_h=0$。

1988 年，德国学者 S. Hilger 为了统一连续、离散情形的研究，在其博士论文中提出了时标的概念。此后，时标理论得到了快速发展，特别是 M. Bohner 和 A. Peterson 在文献[7] [8]中，系统分析了时标上一类非常重要的动力方程：时标上的动力方程。时标上的动力方程(系统)不仅可以统一连续和离散这两种特殊的情形，而且在其他学科中也有巨大的应用潜力，如量子力学等，是一个比较新的有着广泛应用前景的应用数学分支，其理论研究主要集中在边值问题、振动性、稳定性等方面。关于时标上的不等式研究，也有相关结果[9]-[14]。

本文将研究 Opial 型不等式(2)在时标上的推广，其中在第二部分对时标的基本概念及基本理论作简要介绍，在第三部分中给出主要结果及其证明。

2. 预备知识

实数集 $\mathbb{R}$ 的任一非空闭子集称为时标，记为 T。设时标 T 上的拓扑由 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑诱导，则有下列定义：

定义 1 [7]：设 T 为时标，对任意 $t\in T$，定义 $\sigma(t):=\inf\{s\in T: s>t\}$，称 $\sigma: T\to T$ 为前跳算子；$\rho(t):=\sup\{s\in T: s<t\}$，称 $\rho: T\to T$ 为后跳算子。

在上面的定义中，称 $\inf\Phi=\sup T$ （即如果 t 为时标 T 的最大值，则有 $\sigma(t)=t$），而 $\sup\Phi=\inf T$ （即

如果 t 为时标 T 的最小值，则有 $\rho(t)=t$)，其中 Φ 表示空集。

设 $t\in T$ 且 $\inf T<t<\sup T$，若 $\sigma(t)>t(=t)$，称点 t 是右发散(右稠密)的；若 $\rho(t)<t(=t)$，称点 t 是左发散(右稠密)的。既右发散又左发散的点称为孤立点，既右稠密又左稠密的点称为稠密点。

如果 T 的左发散点有最大值 t_1，则定义 $T^k:=T\setminus\{t_1\}$，否则 $T^k:=T$。

时标 T 上的区间 $[a,b]$ 定义为 $[a,b]_T:=\{t\in T:a\le t\le b\}$。

定义 2 [7]：定义前跳 graininess 函数 $\mu:T\to[0,\infty)$ 为

$\mu(t):=\sigma(t)-t$，对任意的 $t\in T$。

设 $f:T\to\mathbb{R}$ 为时标 T 上的一实函数，则 $f^\sigma:T\to\mathbb{R}$ 定义为 $f^\sigma(t)=f(\sigma(t))$，即 $f^\sigma=f\circ\sigma$ 为 f,σ 的复合；同理，$f^\sigma:T\to\mathbb{R}$ 定义为 $f^\rho(t)=f(\rho(t))$，即 $f^\rho=f\circ\rho$。

对于时标 T 上的实函数 f，下面给出 f 在点 $t\in T^k$ 时的 Δ 导数(Hilger 导数)的定义。

定义 3 [7]：若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 t 的邻域 U，使得对任意 $s\in U$，都有

$$\left|\left[f(\sigma(t))-f(s)\right]-f^\Delta(t)\left[\sigma(t)-s\right]\right|\le\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|$$

成立，则称 $f^\Delta(t)$ 为 f 在 t 的 Δ 导数(Hilger 导数)。

关于 Δ 导数，下列性质成立。

引理 1 [8]：设函数 $f,g:T\to\mathbb{R}$ 在 $t\in T^k$ 处可微，则有：

1) 若 $f^\Delta(t)$ 存在，则 $f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^\Delta(t)$；

2) $(f+g)^\Delta(t)=f^\Delta(t)+g^\Delta(t)$；

3) $(fg)^\Delta(t)=f^\Delta(t)g(t)+f^\sigma(t)g^\Delta(t)=f(t)g^\Delta(t)+f^\Delta(t)g^\sigma(t)$；

4) 若 $g(t)g^\sigma(t)\ne0$，则 $\left(\dfrac{f}{g}\right)^\Delta(t)=\dfrac{f^\Delta(t)g(t)-f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g^\sigma(t)}$。

定义 4 [7]：函数 $f:T\to\mathbb{R}$ 称为右稠连续的，如果 f 在 T 的右稠密点出连续，在左稠密点出左极限存在。

记 T 上的右稠连续函数为 $C_{rd}(T,\mathbb{R})$。

定义 5 [7]：对任意的 $t\in T^k$，若满足 $F^\Delta(t)=f(t)$，则称函数 $F:T\to\mathbb{R}$ 为 f 的一个原函数，且定义 Δ 积分为

$$\int_a^b f(t)\Delta t=F(b)-F(a),\quad \forall a,b\in T。$$

关于 Δ 积分，有下面引理。

引理 2 [8]：若 $a,b,c\in T$，$k_1,k_2\in\mathbb{R}$，$f,g\in C_{rd}(T,\mathbb{R})$，则有

1) $\int_a^b\left[k_1f(t)+k_2g(t)\right]\Delta t=k_1\int_a^b f(t)\Delta t+k_2\int_a^b g(t)\Delta t$；

2) $\int_a^b f(t)\Delta t=\int_a^c f(t)\Delta t+\int_c^b f(t)\Delta t$；

3) $\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s=\mu(t)f(t)$；

4) 若 $f(t)\le g(t)$，$\forall t\in[a,b]_T$，则 $\int_a^b f(t)\Delta t\le\int_a^b g(t)\Delta t$；

5) $\int_a^b f^\sigma(t)g^\Delta(t)\Delta t=(fg)(t)\big|_a^b-\int_a^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t$。

在后面的证明中，主要用到下面的时标上的 Cauchy-Schwarz 不等式。

引理 3 [8]：设 $a,b\in T$，$1<p,q<+\infty$，且满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则对函数 $f,g\in C_{rd}(T,\mathbb{R})$，有

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\Delta t\le\left\{\int_a^b |f(t)|^p\,\Delta t\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_a^b |g(t)|^q\,\Delta t\right\}^{\frac{1}{q}}$$

成立。

3. 主要结果及证明

下面给出主要定理。

定理 1：设 T 为任一时标，$a,X\in T$，$y(x)$ 为 $[a,X]_T$ 上的右稠连续函数，且满足 $y(a)=0$，则

$$(p+q)\int_a^X |y(x)|^p\left|y^{\Delta}(x)\right|^q\Delta x\le q(X-a)^p\int_a^X \left|y^{\Delta}(x)\right|^{p+q}\Delta x\text{，}\quad p,q\ge 1\text{。}\tag{3}$$

证明：对任意的 $x\in[a,X]_T$，定义 $z(x)=\int_a^x\left|y^{\Delta}(t)\right|^q\Delta t$，则有 $z^{\Delta}(x)=\left|y^{\Delta}(x)\right|^q$。由于

$$|y(x)|=|y(x)-y(a)|=\left|\int_a^x y^{\Delta}(t)\Delta t\right|\le\int_a^x\left|y^{\Delta}(t)\right|\Delta t\text{，}$$

对上式运用指标分别为 $\frac{q}{q-1}$ 和 q 的 Cauchy-Schwarz 不等式，可以得到

$$|y(x)|\le\left(\int_a^x\Delta t\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_a^x\left|y^{\Delta}(t)\right|^q\Delta t\right)^{\frac{1}{q}}\le(X-a)^{\frac{q-1}{q}}z^{\frac{1}{q}}(x)\text{。}$$

注意到 $z(t)$ 是单调递增的，利用其单调性，$z(t)\le z(X)$，$z(t)\le z^{\sigma}(t)$。设 $f=z^{(p+q)/q},z=z(t)$，根据链式法则，有

$$(f\circ z)^{\Delta}(t)=\left[\int_0^1 f'\left(z(t)+h\mu(t)z^{\Delta}(t)\right)\mathrm{d}h\right]z^{\Delta}(t)\text{，}$$

注意到 $\mu(t)z^{\Delta}(t)=z^{\sigma}(t)-z(t)$，

$$\begin{aligned}\frac{q}{p+q}(f\circ z)^{\Delta}(t)&=\frac{q}{p+q}\left[\int_0^1 f'\left(z(t)+h\mu(t)z^{\Delta}(t)\right)\mathrm{d}h\right]z^{\Delta}(t)\\&=\frac{q}{p+q}\left[\int_0^1\frac{p+q}{q}\left(z(t)+h\mu(t)z^{\Delta}(t)\right)^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}h\right]z^{\Delta}(t)\\&=\left[\int_0^1\left(z(t)+h\left[z^{\sigma}(t)-z(t)\right]\right)^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}h\right]z^{\Delta}(t)\qquad\text{。}\\&\ge z^{\frac{p}{q}}(t)z^{\Delta}(t)\int_0^1\left(1+h\left[\frac{z^{\sigma}(t)-z(t)}{z(t)}\right]\right)^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}h\\&\ge z^{\frac{p}{q}}(t)z^{\Delta}(t)\end{aligned}$$

对上式两边同时进行积分，并由 $z(a)=0$，得

$$\int_a^X z^{\frac{p}{q}}(x)z^{\Delta}(x)\Delta x\le\frac{q}{p+q}\int_a^X(f\circ z)^{\Delta}(x)\Delta x=\frac{q}{p+q}\left(z(x)\right)^{\frac{p+q}{q}}\Big|_a^X=\frac{q}{p+q}\left(z(X)\right)^{\frac{p+q}{q}}\text{，}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&(p+q)\int_a^X |y(x)|^p |y^\Delta(x)|^q \Delta x\\ &\le (p+q)\int_a^X (X-a)^{\frac{p(q-1)}{q}} z^{\frac{p}{q}}(x) z^\Delta(x)\Delta x\\ &\le q(X-a)^{\frac{p(q-1)}{q}} \left(z(X)\right)^{\frac{p+q}{q}}\\ &\le q(X-a)^p \int_a^X |y^\Delta(x)|^{p+q}\Delta x\end{aligned},$$

故(3)式得证。

定理 2： 设 T 为任一时标， $b,X\in T$ ， $y(x)$ 为 $[X,b]_T$ 上的右稠连续函数，且满足 $y(b)=0$ ，则

$$(p+q)\int_X^b |y^\sigma(x)|^p |y^\Delta(x)|^q \Delta x \le q(b-X)^p \int_X^b |y^\Delta(x)|^{p+q}\Delta x,\quad p,q\ge 1。\tag{4}$$

证明：对任意的 $x\in[X,b]_T$ ，定义 $z(x)=-\int_x^b |y^\Delta(t)|^q \Delta t$ ，易知 $z(x)$ 非减且 $z^\Delta(x)=|y^\Delta(x)|^q$ 。由于

$$|y^\sigma(x)|=|-y^\sigma(x)|=|y(b)-y^\sigma(x)|=\left|\int_{\sigma(x)}^b y^\Delta(t)\Delta t\right|\le \int_{\sigma(x)}^b |y^\Delta(t)|\Delta t,$$

对上式运用指标分别为 $\frac{q}{q-1}$ 和 q 的 Cauchy-Schwarz 不等式，可以得到

$$|y^\sigma(x)|\le \left(\int_{\sigma(x)}^b \Delta t\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{\sigma(x)}^b |y^\Delta(t)|^q \Delta t\right)^{\frac{1}{q}} \le (b-X)^{\frac{q-1}{q}}\left(-z^\sigma(x)\right)^{\frac{1}{q}}。$$

进一步可得

$$(p+q)\int_X^b |y^\sigma(x)|^p |y^\Delta(x)|^q \Delta x\le (p+q)\int_X^b (b-X)^{\frac{p(q-1)}{q}}\left(-z^\sigma(x)\right)^{\frac{p}{q}} z^\Delta(x)\Delta x。$$

由于

$$\left(-(-z)^{\frac{p+q}{q}}\right)^\Delta(x)=\frac{p+q}{q}(-z)^{\frac{p}{q}}(c)z^\Delta(x),\quad c\in(x,\sigma(x)),$$

注意到 $z(x)$ 为非减函数，可得

$$\left(-(-z)^{\frac{p+q}{q}}\right)^\Delta(x)=\frac{p+q}{q}(-z)^{\frac{p}{q}}(c)z^\Delta(x)\ge \frac{p+q}{q}\left((-z)^\sigma(x)\right)^{\frac{p}{q}} z^\Delta(x)。\tag{5}$$

由(5)式，可计算得

$$\begin{aligned}&(p+q)\int_X^b |y^\sigma(x)|^p |y^\Delta(x)|^q \Delta x\\ &\le (p+q)\int_X^b (b-X)^{\frac{p(q-1)}{q}}\left(-z^\sigma(x)\right)^{\frac{p}{q}} z^\Delta(x)\Delta x\\ &\le q(b-X)^{\frac{p(q-1)}{q}}\left(\int_X^b \left[-(-z)^{\frac{p+q}{q}}(x)\right]^\Delta \Delta x\right)\\ &\le q(b-X)^p(-z)^{\frac{p+q}{q}}(X)\\ &= q(b-X)^p\int_X^b |y^\Delta(x)|^{p+q}\Delta x\end{aligned},$$

故(4)式得证。

定理 3：设 T 为任一时标， $a<b\in T$ ，且 $\frac{a+b}{2}\in T$ ， $y(x)$ 为 $[a,b]_T$ 上的右稠连续函数，且满足

$y(a)=y(b)=0$，则

$$(p+q)\int_a^b|y(x)|^p|y^\Delta(x)|^q\Delta x\le q\left(\frac{b-a}{2}\right)^p\int_a^b|y^\Delta(x)|^{p+q}\Delta x,\quad p,q\ge 1。\tag{6}$$

证明：因为

$$\begin{aligned}&(p+q)\int_a^b|y(x)|^p|y^\Delta(x)|^q\Delta x\\&=(p+q)\int_a^{\frac{a+b}{2}}|y(x)|^p|y^\Delta(x)|^q\Delta x+(p+q)\int_{\frac{a+b}{2}}^b|y(x)|^p|y^\Delta(x)|^q\Delta x。\\&\le(p+q)\int_a^{\frac{a+b}{2}}|y(x)|^p|y^\Delta(x)|^q\Delta x+(p+q)\int_{\frac{a+b}{2}}^b|y^\sigma(x)|^p|y(x)|^q\Delta x\end{aligned}\tag{7}$$

令 $X=\dfrac{a+b}{2}$，分别运用定理 1、定理 2 结论可知，

$$(p+q)\int_a^{\frac{a+b}{2}}|y(x)|^p|y^\Delta(x)|^q\Delta x\le q\left(\frac{b-a}{2}\right)^p\int_a^{\frac{a+b}{2}}|y^\Delta(x)|^{p+q}\Delta x,$$

$$(p+q)\int_{\frac{a+b}{2}}^b|y^\sigma(x)|^p|y^\Delta(x)|^q\Delta x\le q\left(\frac{b-a}{2}\right)^p\int_{\frac{a+b}{2}}^b|y^\Delta(x)|^{p+q}\Delta x,$$

将上面两不等式代入(5)式可得(6)，定理得证。

基金项目

国家级大学生创新创业训练项目(201811306045)，池州学院教学团队(2018XJXTD03)。

参考文献

[1] Opial, Z. (1960) Sur une inégalité. *Annales Polonici Mathematici*, **8**, 29-32. https://doi.org/10.4064/ap-8-1-29-32

[2] Agalwal, R.P. and Lakshmikantham, V. (1993) Uniqueness and Nonuniqueness Criteria for Ordinary Differential Equations. *Series in Real Analysis*, **6**, 204-224. https://doi.org/10.1142/1988

[3] Agarwal, R.P. and Pang, P.Y.H. (1995) Opial Inequalities with Applications in Differential and Difference Equations. Kluwer Academic, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8426-5

[4] Li, J.D. (1992) Opial-Type Integral Inequalities Involving Several Higher Order Derivatives. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **167**, 98-110. https://doi.org/10.1016/0022-247X(92)90238-9

[5] Yang, G.S. (1966) On a Certain Result of Z. Opial. *Japan Academy. Proceedings Series A Mathematical Sciences*, **42**, 78-83. https://doi.org/10.3792/pja/1195522120

[6] Lasota, A.A. (1968) A Discrete Boundary Value Problem. *Annales Polonici Mathematici*, **20**, 183-190. https://doi.org/10.4064/ap-20-2-183-190

[7] Bohner, M. and Peterson, A. (2001) Dynamic Equations on Time Scale: An Introduction with Applications. Birkhäuser, Boston.

[8] Bohner, M. and Peterson, A. (2003) Advances in Dynamic Equations on Time Scales. Birkhäuser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8230-9

[9] Abdeldaim, A., El-Deeb, A.A., Agarwal, P. and El-Sennary, H.A. (2018) On Some Dynamic Inequalities of Steffensen Type on Timescales. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 4737-4753. https://doi.org/10.1002/mma.4927

[10] Bohner, M., and Kaymakcalan, B. (2001) Opial Inequalities on Time Scales. *Annales Polonici Mathematici*, **77**, 11-20. https://doi.org/10.4064/ap77-1-2

[11] El-Deeb, A.A. and Cheung, W.S. (2018) A Variety of Dynamic Inequalities on Time Scales with Retardation. *Journal of Nonlinear Science and Its Applications*, **11**, 1185-1206. https://doi.org/10.22436/jnsa.011.10.07

[12] El-Deeb, A.A., Elsennary, H.A. and Nwaeze, E.R. (2018) Generalized Weighted Ostrowski, Trapezoid and Grüss Type

Inequalities on Time Scales. *Fasciculi Mathematici*, **60**, 123-144. https://doi.org/10.1515/fascmath-2018-0008

[13] El-Deeb, A.A., Xu, H., Abdeldaim, A. and Wang, G. (2019) Some Dynamic Inequalities on Time Scales and Their Applications. *Advances in Difference Equations*, **2019**, 130. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2023-6

[14] Fatma, M.K.H., El-Deeb, A.A., Abdeldaim, A. and Khan, Z.A. (2019) On Some Generalizations of Dynamic Opial-Type Inequalities on Time Scales. *Advances in Difference Equations*, **2019**, 323. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2268-0