

A Strongly Convergent Algorithm for the Split Feasibility Problem

Wanrong Zhan, Hai Yu

School of Mathematical Sciences, Luoyang Normal University, Luoyang Henan
Email: zhanwanrong@126.com

Received: May 19th, 2020; accepted: Jun. 3rd, 2020; published: Jun. 10th, 2020

Abstract

The split feasibility problem is a kind of widely used optimization problem. The classical CQ algorithm only has weak convergence. In order to obtain strong convergence, this paper constructs an algorithm with strong convergence by improving the algorithms in the literature. In order to avoid calculating the norm of the bounded linear operator, the algorithm also adopts the strategy of variable step size. Under the weaker condition, the strong convergence of the algorithm is proved.

Keywords

Split Feasibility Problem, CQ Algorithm, Strong Convergence, Projection

分裂可行问题的一个强收敛算法

詹婉荣, 于海

洛阳师范学院数学科学学院, 河南 洛阳
Email: zhanwanrong@126.com

收稿日期: 2020年5月19日; 录用日期: 2020年6月3日; 发布日期: 2020年6月10日

摘要

分裂可行问题是一类应用很广泛的最优化问题。经典的CQ算法仅具有弱收敛性。为了得到强收敛性, 本文通过改进文献中的算法, 构造了一个具有强收敛性的算法。该算法为了避免计算有界线性算子的范数, 还采用了变步长策略。并且在较弱的条件下, 证明了算法的强收敛性。

关键词

分裂可行问题, CQ算法, 强收敛, 投影

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Censor 和 Elfving 在 1994 年提出了分裂可行问题(SFP), 该问题在信号处理和图像重建中已经引起了广泛的关注[1] [2]。分裂可行问题可表述为:

$$\text{找一点 } x \in C, \text{ 使得 } Ax \in Q, \quad (1.1)$$

其中 C 和 Q 分别是 Hilbert 空间 H_1 和 H_2 的非空闭凸子集, $A: H_1 \rightarrow H_2$ 是有界线性算子。

为了求解分裂可行问题, Censor 和 Elfving 在文[1]中提出了一种迭代算法, 但是他们的算法在每次迭代时都要计算矩阵的逆。Byrne 在文[3] [4]中提出一种不需要计算矩阵逆的 CQ 算法。设 P_C 和 P_Q 分别是 C 和 Q 上的投影算子, I 表示恒等算子, A^* 是线性算子 A 的伴随算子。则 CQ 算法的迭代公式如下:

$$x^{k+1} = P_C(x^k - \gamma A^*(I - P_Q)Ax^k), \quad (1.2)$$

其中 $\gamma \in \left(0, \frac{2}{\|A\|^2}\right)$ 。由于 CQ 算法(1.2)更容易实现, 得到了广泛的研究。然而, 为了实现 CQ 算法, 我们

必须计算或者估计有界线性算子 A 的范数 $\|A\|$, 但是在一般情况下这是非常难的任务。为了克服这一困难, 许多学者构造了不依赖算子范数的变步长 CQ 算法[5] [6] [7] [8] [9]。Yang 在文[8]考虑如下的步长:

$$\tau_k := \frac{\rho_k}{\|A^*(I - P_Q)Ax^k\|},$$

其中 $\{\rho_k\}$ 是一正实数列且满足

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^2 < \infty.$$

同时文[8]还要求下面两个条件成立: (i) Q 是有界集, (ii) A 是列满秩矩阵。为了去掉这两个条件, Lopez 在文[2]引入一种新的选择步长的方法:

$$\tau_k := \frac{\rho_k \|(I - P_Q)Ax^k\|^2}{\|A^*(I - P_Q)Ax^k\|^2}, \quad 0 < \rho_k < 2. \quad (1.3)$$

但是以上算法在无穷维空间中仅有弱收敛性。Xu 在[10]中构造了如下的强收敛算法:

$$x^{k+1} = \alpha_k u + (1 - \alpha_k) P_C(x^k - \gamma_k A^*(I - P_Q)Ax^k), \quad (1.4)$$

其中 $u \in H_1$ 是固定的, $0 < \gamma_k < \frac{2}{\|A\|^2}$, $\{\alpha_k\}$ 是 $(0,1)$ 中的实数列。若 $\{\alpha_k\}$ 满足下列条件:

$$(C1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty;$$

$$(C2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| < \infty \text{ 或 } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} = 1.$$

则由上述算法生成的序列 $\{x^k\}$ 强收敛到问题(1.1)的一个特解 $P_S(u)$ 。Lopez 在[2]中改进了算法(1.4),

给出了以下强收敛算法:

$$x^{k+1} = \alpha_k u + (1 - \alpha_k) P_C (x^k - \tau_k A^* (I - P_Q) A x^k), \tag{1.5}$$

其中 $u \in C$ 是固定的, τ_k 由(1.3)给出. Lopez 在文[2]证明了: 在 $\{\alpha_k\}$ 仅仅满足(C1)的条件下, 由算法(1.5)生成的序列 $\{x^k\}$ 强收敛到问题(1.1)的一个特解 $P_S(u)$.

但是在算法(1.5)中, 却要求 $u \in C$, 这样就会产生如下两个问题: (i) 对于一般的闭凸集, 找 $u \in C$ 比较困难, 需要一个迭代算法来计算. (ii) 限制了算法(1.5)的应用. 比如, 在实际应用中, 人们经常求问题(1.1)的最小 2-范数解. 通常取 $u = 0$, 就可得到最小 2-范数解. 但是在算法(1.5)中, 如果 $u = 0 \notin C$, 就不能得到最小 2-范数解. 为了克服这一缺点, 本文对算法(1.5)进行改进, 构造了一个同样具有强收敛性的算法, 该算法同样不需要满足条件(C2).

2. 预备知识

我们首先给出一些定义和基本结论, 未给出的概念可参见文[11]. 以下 H 表示实 Hilbert 空间, 其内积和范数分别为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$. 在本文中, \rightarrow 代表强收敛, 而 \rightharpoonup 代表弱收敛. $\omega_w(x^k)$ 表示序列 $\{x^k\}$ 的所有弱聚点之集.

定义 2.1 设 $C \subseteq H$ 是非空闭凸集, 对任意 $x \in H$, x 到 C 上的投影定义为:

$$P_C x = \arg \min \{ \|y - x\| \mid y \in C \}.$$

显然, 若 $x \in C$, 则 $x = P_C(x)$. 投影 P_C 具有下面重要的性质.

引理 2.1 [11] 设 $C \subseteq H$ 是非空闭凸集, 则对任意 $x, y \in H$,

- (i) $\langle x - P_C x, z - P_C x \rangle \leq 0, \forall z \in C$;
- (ii) $\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\|$;
- (iii) $\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(I - P_C)x - (I - P_C)y\|^2$;
- (iv) $\langle P_C x - P_C y, x - y \rangle \geq \|P_C x - P_C y\|^2$;
- (v) $\langle (I - P_C)x - (I - P_C)y, x - y \rangle \geq \|(I - P_C)x - (I - P_C)y\|^2$.

引理 2.2 设 $a, b \in H, 0 \leq \alpha \leq 1$. 则

$$\|\alpha a + (1 - \alpha)b\|^2 \leq (1 - \alpha)\|b\|^2 + 2\langle \alpha a, \alpha a + (1 - \alpha)b \rangle.$$

引理 2.2 的证明是容易的, 因此我们省略了它的证明.

引理 2.3 [12] 设 $\{s^k\}$ 是一个非负实数列, 且满足

$$s^{k+1} \leq (1 - \alpha_k)s^k + \alpha_k \beta^k, \quad k \geq 0,$$

其中 $\{\alpha_k\}$ 和 $\{\beta^k\}$ 满足: (i) $\{\alpha_k\} \subseteq [0, 1], \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$; (ii) $\limsup_{k \rightarrow \infty} \beta^k \leq 0$. 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} s^k = 0$.

定义 2.1 称函数 $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ 在点 x 处是弱下半连续的, 若 $x^k \rightharpoonup x$, 则

$$f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^k).$$

若 f 在每个点 $x \in H$ 都是弱下半连续的, 则称 f 是 H 上的弱下半连续函数.

引理 2.4 [2,4] 设 $f(x) = \frac{1}{2} \|(I - P_Q)Ax\|^2$. 则

- (i) f 是可微的凸函数;

- (ii) $\nabla f(x) = A^*(I - P_Q)Ax$;
 (iii) f 是 H 上的弱下半连续函数;
 (iv) ∇f 是 $\|A\|^2$ -Lipschitz 连续的, 即 $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq \|A\|^2 \|x - y\|$, $x, y \in H$ 。

3. 一个强收敛算法

受算法(1.4)和(1.5)的启发, 下面我们构造一个求解 SFP 的强收敛算法, 并在较弱的条件下证明了算法的收敛性。

算法 3.1 设 $u \in H_1$ 是固定的, $x_0 \in H_1$ 是任意的。给定 x^k , 构造 x^{k+1} 如下:

$$x^{k+1} = P_C \left(\alpha_k u + (1 - \alpha_k) (x^k - \tau_k A^* (I - P_Q) Ax^k) \right), \quad (3.1)$$

其中 $\{\alpha_k\} \subseteq (0, 1)$, τ_k 由(1.3)给出。

定理 3.1 假设 SFP 的解集 $S \neq \emptyset$, $\{\alpha_k\}$ 满足条件(C1), 且 $\inf_k \rho_k (2 - \rho_k) > 0$ 。则由算法(3.1)生成的序列 $\{x^k\}$ 强收敛到问题(1.1)的一个解 v , 这里 $v = P_S(u)$ 。

证明 令 $u^k = x^k - \tau_k A^* (I - P_Q) Ax^k$, $y^k = \alpha_k u + (1 - \alpha_k) u^k$ 。由于 $v \in S$, 再利用引理 2.1, 我们有

$$\begin{aligned} \|u^k - v\|^2 &= \|x^k - v - \tau_k A^* (I - P_Q) Ax^k\|^2 \\ &= \|x^k - v\|^2 - 2\tau_k \langle (I - P_Q) Ax^k - (I - P_Q) Av, Ax^k - Av \rangle \\ &\quad + \tau_k^2 \|A^* (I - P_Q) Ax^k\|^2 \\ &\leq \|x^k - v\|^2 - 2\tau_k \left(\| (I - P_Q) Ax^k \|^2 + \tau_k^2 \|A^* (I - P_Q) Ax^k\|^2 \right) \\ &\leq \|x^k - v\|^2 - \rho_k (2 - \rho_k) \frac{\| (I - P_Q) Ax^k \|^4}{\|A^* (I - P_Q) Ax^k\|^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

以下我们将证明分成 5 步。

第 1 步, 证明 $\{x^k\}$, $\{u^k\}$ 和 $\{y^k\}$ 是有界的。由引理 2.1 和(3.2)式, 我们有

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - v\| &\leq \left\| \alpha_k (u - v) + (1 - \alpha_k) (u^k - v) \right\| \\ &\leq \alpha_k \|u - v\| + (1 - \alpha_k) \|x^k - v\| \\ &\leq \alpha_k \|u - v\| + (1 - \alpha_k) \|x^k - v\| \\ &\leq \max \{ \|u - v\|, \|x^k - v\| \} \end{aligned}$$

由数学归纳法可得, 对所有的 $k \geq 0$,

$$\|x^{k+1} - v\| \leq \max \{ \|u - v\|, \|x^0 - v\| \}。$$

由此可知 $\{x^k\}$ 是有界的。再由(3.2)式可得, $\{u^k\}$ 也是有界的。又因为

$$\|y^k - u^k\| = \alpha_k \|u - u^k\| \rightarrow 0,$$

所以 $\{y^k\}$ 也是有界的。

第 2 步, 证明下面的不等式成立:

$$s^{k+1} \leq (1 - \alpha_k) s^k + \alpha_k \beta^k, \quad (3.3)$$

其中 $s^k = \|x^k - v\|^2$,

$$\beta^k = 2\langle u - v, y^k - v \rangle - \frac{1}{\alpha_k} \left(\|(I - P_C)y^k\|^2 + (1 - \alpha_k) \frac{\rho_k(2 - \rho_k)\|(I - P_Q)Ax^k\|^4}{\|A^*(I - P_Q)Ax^k\|^2} \right).$$

事实上, 利用引理 2.2 和(3.2), 我们有

$$\begin{aligned} \|y^k - v\|^2 &= \|\alpha_k(u - v) + (1 - \alpha_k)(u^k - v)\|^2 \\ &\leq (1 - \alpha_k)\|u^k - v\|^2 + 2\alpha_k\langle u - v, y^k - v \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_k)\|x^k - v\|^2 + 2\alpha_k\langle u - v, y^k - v \rangle \\ &\quad - (1 - \alpha_k) \frac{\rho_k(2 - \rho_k)\|(I - P_Q)Ax^k\|^4}{\|A^*(I - P_Q)Ax^k\|^2} \end{aligned}$$

再由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - v\|^2 &= \|P_C(y^k) - P_C(v)\|^2 \\ &\leq \|y^k - v\|^2 - \|(I - P_C)y^k\|^2 \\ &\leq (1 - \alpha_k)\|x^k - v\|^2 + \alpha_k \left[2\langle u - v, y^k - v \rangle - \frac{1}{\alpha_k} \left(\|(I - P_C)y^k\|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - \alpha_k) \frac{\rho_k(2 - \rho_k)\|(I - P_Q)Ax^k\|^4}{\|A^*(I - P_Q)Ax^k\|^2} \right) \right] \end{aligned}$$

所以不等式(3.3)成立。

第 3 步, 证明 $\limsup_{k \rightarrow \infty} \beta^k$ 是有限的。由于 $\{y^k\}$ 是有界的, 所以我们有

$$\beta^k \leq 2\langle u - v, y^k - v \rangle \leq 2\|u - v\| \cdot \|y^k - v\| < +\infty.$$

于是 $\limsup \beta^k < +\infty$ 。下面我们用反证法证明 $\limsup \beta^k \geq -1$ 。假设 $\limsup \beta^k < -1$, 则存在 k_0 使得对任意 $k \geq k_0$, 有 $\beta^k \leq -1$ 。由不等式(3.3)可知, 对所有 $k \geq k_0$, 不等式

$$s^{k+1} \leq (1 - \alpha_k)s^k + \alpha_k\beta^k \leq (1 - \alpha_k)s^k - \alpha_k = s^k - \alpha_k(s^k + 1) \leq s^k - \alpha_k$$

成立。再由数学归纳法可得

$$s^{k+1} \leq s^{k_0} - \sum_{i=k_0}^k \alpha_i.$$

由于 $\sum_{i=k_0}^{\infty} \alpha_i = \infty$, 故存在 $K \geq k_0$ 满足 $\sum_{i=k_0}^K \alpha_i > s^{k_0}$ 。于是我们有

$$s^{K+1} \leq s^{k_0} - \sum_{i=k_0}^K \alpha_i < 0.$$

这显然与 $\{s^k\}$ 是非负实数列相矛盾。因此 $\limsup_{k \rightarrow \infty} \beta^k \geq -1$ 。从而 $\limsup \beta^k$ 是有限的。

第4步, 证明 $\limsup_{k \rightarrow \infty} \beta^k \leq 0$ 。既然 $\limsup_{k \rightarrow \infty} \beta^k$ 是有限的, 我们能取子序列 $\{k_i\}$ 满足

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \beta^k = \lim_{i \rightarrow \infty} \beta^{k_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left[2 \langle u - v, y^{k_i} - v \rangle - \frac{1}{\alpha_{k_i}} \left(\|(I - P_C) y^{k_i}\|^2 + (1 - \alpha_{k_i}) \frac{\rho_{k_i} (2 - \rho_{k_i}) \|(I - P_Q) A x^{k_i}\|^4}{\|A^* (I - P_Q) A x^{k_i}\|^2} \right) \right] \quad (3.4)$$

由于序列 $\{\langle u - v, y^{k_i} - v \rangle\}$ 是有界的, 不失一般性, 我们假设极限 $\lim_{i \rightarrow \infty} \langle u - v, y^{k_i} - v \rangle$ 存在。所以下面的极限

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_{k_i}} \left(\|(I - P_C) y^{k_i}\|^2 + (1 - \alpha_{k_i}) \frac{\rho_{k_i} (2 - \rho_{k_i}) \|(I - P_Q) A x^{k_i}\|^4}{\|A^* (I - P_Q) A x^{k_i}\|^2} \right)$$

也存在。由此及条件 $\alpha_{k_i} \rightarrow 0$ 可得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|(I - P_C) y^{k_i}\| = 0 \quad (3.5)$$

和

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|(I - P_Q) A x^{k_i}\|^4}{\|A^* (I - P_Q) A x^{k_i}\|^2} = 0 \quad (3.6)$$

由(3.6)容易得到

$$\|u^{k_i} - x^{k_i}\| = \tau_{k_i} \|A^* (I - P_Q) A x^{k_i}\| = \frac{\rho_{k_i} \|(I - P_Q) A x^{k_i}\|^2}{\|A^* (I - P_Q) A x^{k_i}\|} \rightarrow 0$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned} \|y^{k_i} - x^{k_i}\| &= \|\alpha_{k_i} (u - x^{k_i}) + (1 - \alpha_{k_i}) (u^{k_i} - x^{k_i})\| \\ &\leq \alpha_{k_i} \|x^{k_i} - u\| + (1 - \alpha_{k_i}) \|u^{k_i} - x^{k_i}\| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

又由于

$$\frac{\|(I - P_Q) A x^{k_i}\|^4}{\|A^* (I - P_Q) A x^{k_i}\|^2} \geq \frac{\|(I - P_Q) A x^{k_i}\|^4}{\|A\|^2 \|(I - P_Q) A x^{k_i}\|^2} = \frac{\|(I - P_Q) A x^{k_i}\|^2}{\|A\|^2}$$

所以由(3.6)可得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|(I - P_Q) A x^{k_i}\| = 0 \quad (3.8)$$

下面我们证明 $\{x^{k_i}\}$ 的任意弱聚点都属于 S , 即 $\omega_w(x^{k_i}) \subseteq S$ 。设 $\bar{x} \in \omega_w(x^{k_i})$, 不失一般性, 我们假设 $x^{k_i} \rightharpoonup \bar{x}$ 。由 $f(x) = \frac{1}{2} \|(I - P_Q) A x\|^2$ 的弱下半连续性和(3.8)可得,

$$0 \leq f(\bar{x}) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} f(x^{k_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x^{k_i}) = 0$$

所以 $f(\bar{x})=0$, i.e. $A\bar{x} \in Q$ 。令 $g(x)=\frac{1}{2}\|(I-P_C)x\|^2$, 同样由 $g(x)$ 的弱下半连续性和(3.5)可得,

$$0 \leq g(\bar{x}) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} g(x^{k_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} g(x^{k_i}) = 0.$$

所以 $g(\bar{x})=0$, i.e. $\bar{x} \in C$ 。于是我们证明了 $\omega_w(x^{k_i}) \subseteq S$ 。

再由(3.7)可知 $\{y^{k_i}\}$ 的任意弱聚点也都属于 S 。不失一般性, 我们设 $\{y^{k_i}\}$ 弱收敛于 $\bar{y} \in S$ 。因为 $v = P_S(u)$, 所以由引理 2.1 可得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle u - v, y^{k_i} - v \rangle = \langle u - v, \bar{y} - v \rangle \leq 0.$$

由(3.4), 我们有

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \beta^k \leq \lim_{i \rightarrow \infty} 2 \langle u - v, y^{k_i} - v \rangle \leq 0.$$

第 5 步, 证明 $\{x^k\}$ 强收敛到 v 。事实上, 容易验证引理 2.3 的条件都满足。应用引理 2.3 到(3.3), 我们就得到 $\|x^k - v\| \rightarrow 0$ 。证毕。

注 3.1 (i)在算法(3.1)中, 参数 α_k 可选取如下: $\alpha_k = \frac{1}{(k+1)^p}$, $0 < p \leq 1$ 。

(ii)在算法(1.5)中, 要求 $u \in C$, 然而在算法(3.1)中, 并没有这一限制, 实际上, 对任意 $u \in H_1$, 算法(3.1)均是强收敛的。特别地, 若令 $u = 0$, 则算法(3.1)强收敛到问题(1.1)的最小 2-范数解。

(iii)在算法(3.1)中, 我们并不要求条件(C2)成立。另外, 和算法(1.4)相比, 算法(3.1)的迭代方法也不相同。

4. 结论

本文在 Hilbert 空间中研究了分裂可行问题。传统的 CQ 算法采用常数步长, 需要计算有界线性算子的范数, 并且仅具有弱收敛性。为了克服这些缺点, 本文中我们构造了一个具有强收敛性的算法, 同时该算法采用变步长策略, 从而避免了计算有界线性算子的范数。同时我们构造的算法与已有文献中的算法的形式也不太相同。

基金项目

获国家自然科学基金(Nos. 11971216, 11571005), 河南省高等学校重点科研项目(No. 20A110029)资助。

参考文献

- [1] Censor, Y. and Elfving, T. (1994) A Multiprojection Algorithm Using Bregman Projections in Product Space. *Numerical Algorithms*, **8**, 221-239. <https://doi.org/10.1007/BF02142692>
- [2] Lopez, G., Martin, V., Wang, F. and Xu, H. (2012) Solving the Split Feasibility Problem without Prior Knowledge of Matrix Norms. *Inverse Problems*, **28**, Article ID: 085004. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/8/085004>
- [3] Byrne, C. (2002) Iterative Oblique Projection onto Convex Sets and the Split Feasibility Problem. *Inverse Problems*, **18**, 441-453. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/18/2/310>
- [4] Byrne, C. (2004) A Unified Treatment of Some Iterative Algorithms in Signal Processing and Image Reconstruction. *Inverse Problems*, **20**, 103-120. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/20/1/006>
- [5] Qu, B. and Xiu, N. (2005) A Note on the CQ Algorithm for the Split Feasibility Problem. *Inverse Problems*, **21**, 1655-1665. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/5/009>
- [6] Wang, F. (2017) On the Convergence of CQ Algorithm with Variable Steps for the Split Equality Problem. *Numerical Algorithms*, **74**, 927-935. <https://doi.org/10.1007/s11075-016-0177-9>
- [7] Wang, F., Xu, H. and Su, M. (2011) Choices of Variable Steps of the CQ Algorithm for the Split Feasibility Problem.

-
- Fixed Point Theory*, **12**, 489-496. <https://doi.org/10.1080/00927872.2011.593417>
- [8] Yang, Q. (2005) On Variable-Step Relaxed Projection Algorithm for Variational Inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **302**, 166-179. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.07.048>
- [9] Yu, H., Zhan, W. and Wang, F. (2018) The Ball-Relaxed CQ Algorithms for the Split Feasibility Problem. *Optimization*, **67**, 1687-1699. <https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1485677>
- [10] Xu, H. (2006) A Variable Krasnoselskii-Mann Algorithm and the Multiple-Set Split Feasibility Problem. *Inverse Problems*, **22**, 2021-2034. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/22/6/007>
- [11] Bauschke, H. and Combettes, P. (2011) *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Space*. Springer-Verlag, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9467-7>
- [12] Xu, H. (2002) Iterative Algorithms for Nonlinear Operators. *Journal of the London Mathematical Society*, **66**, 240-256. <https://doi.org/10.1112/S0024610702003332>