Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(7), 1066-1071**
Published Online July 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.97126

Hans汉斯

The Interaction Solutions of the Non-Linear Broer-Kaup Equation

Wenxin Yang, Huaitang Chen

School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: chenhuaitang@163.com

Received: Jul. 5th, 2020; accepted: Jul. 21st, 2020; published: Jul. 28th, 2020

Abstract

With the deepening study of the non-linear equation, the interaction solutions of the non-linear Broer-Kaup equation are often used to describe the laws of natural motion such as water waves. In this paper, a new auxiliary equation method for obtaining the interaction solutions of nonlinear equations is proposed. The new method can easily obtain analytic multifunction solutions including trigonometric functions, exponential functions, hyperbolic functions and other functions. By using this method, we have successfully obtained the interaction solutions of the higher order (2 + 1) dimensional Broer-Kaup equation. It is significant to help physicists to analyze special phenomena in their relevant fields accurately.

Keywords

Broer-Kaup System, Interaction Solution, Auxiliary Equation Method

非线性Broer-Kaup方程的相互作用解

杨文欣，陈怀堂

临沂大学数学与统计学院，山东 临沂
Email: chenhuaitang@163.com

收稿日期：2020年7月5日；录用日期：2020年7月21日；发布日期：2020年7月28日

摘　要

随着人们对非线性方程的深入研究，经常通过探求非线性Broer-Kaup方程的相互作用解来描述水波等自然运动规律。本文提出了一种求非线性方程相互作用解的辅助方程新方法。该新方法可以很容易得到三角函数、指数函数、双曲函数和其他函数的混合函数解。利用该方法，我们成功地得到了(2 + 1)维

文章引用: 杨文欣, 陈怀堂. 非线性 Broer-Kaup 方程的相互作用解[J]. 应用数学进展, 2020, 9(7): 1066-1071.
DOI: 10.12677/aam.2020.97126

Broer-Kaup方程的相互作用解。这些解在帮助物理学家准确分析相关领域中的特殊现象方面具有十分重要的理论意义和应用价值。

关键词

Broer-Kaup方程，相互作用解，辅助方程法

1. 引言

非线性偏微分方程的相互作用解在非线性光学、理论物理、等离子体物理、流体动力学、半导体等领域有着重要的应用。非线性偏微分方程的相互作用解包括了三角函数、指数函数、双曲函数和其他函数的混合函数解，对于一些物理现象的研究有重要意义，而对这些解析解的研究有助于我们更好地理解复杂的物理现象。近几十年来，人们提出了许多求非线性偏微分方程精确解的方法，如：1) 逆散射理论[1]，Hirotas 双线性方法[2]；相对于逆散射理论方法而言，Hirotas 双线性方法也被称为直接方法，这种方法的优点在于它是一种代数而不是解析的方法，这种方法已经从求 KDV 方程、MKDV 方程等的孤立子解而发展成一种求解一大批非线性偏微分方程孤子解的相当普遍的方法，而这种方法的关键在于寻求相关变量变换。2) 截断 Painlev 展开法[3]、Darboux 变换法[4]；Darboux 变换法相对于截断 Painlev 展开法更加实用，Darboux 变换是求解非线性微分方程的一种非常实用的方法，比多尺度法、双线性变换法等其他方法更实用、更简单。近年来，人们研究了大量求解非线性偏微分方程的有效方法，它们是齐次平衡法[5]、正弦余弦法[6]、sech 函数法[7]、双曲正切函数法[8] [9]、多重 exp 函数法[10] [11]、雅可比椭圆函数展开法[12] [13]。而辅助方程法也是一种重要的方法，它在非线性微分方程的研究中扮演着很重要的角色，它不仅能求解一大批非线性偏微分方程的孤子解，也可以求几种类型的特殊解。它以简洁易懂的特质而备受关注。

众所周知，复杂的自然现象常常用非线性偏微分方程来描述。其中最具代表性的非线性方程是 Broer-Kaup 方程[14] [15]。本文利用一种新的辅助方程方法并结合齐次平衡法研究了高阶(2 + 1)维 Broer-Kaup 方程：

$$\begin{cases} H_{ty} = H_{xxy} - 2\left(HH_x\right)_y - 2G_{xx} \\ G_t = -G_{xx} - 2\left(GH\right)_x \end{cases} \tag{1-1}$$

的精确解。

方程(1-1)是经过对称约化从 KP 方程中约化得到的，它在统计物理、非线性光纤通讯、等离子体物理等许多领域有着广泛的应用，它丰富的局域相干结构、Painlev 性质和具有任意时间变量 t 或空间变量 y 的无穷多对称已被讨论过。

2. 新辅助方程的新解

假设新的辅助方程为：

$$f' = A + Bf + Cf^2 \tag{2-1}$$

其中 $f' = f'(\xi)$，如果 $B=0, A=4, C=-1$，则我们由 maple 软件得到方程(2-1)的新的解为：

$$
\begin{aligned}
f_1 = & \frac{1}{\dfrac{c_1 + c_2 \tan(\xi)\coth(\xi)}{c_1 + c_2 \tan(\xi)\coth(\xi) + c_1 \tanh(\xi) + c_2 \tan(\xi)} + c_3 \mathrm{e}^{-2\xi} - \dfrac{1}{2}} \\
& \times \left[\frac{c_2\left(1+\tan^2(\xi)\right)\coth(\xi) + c_2 \tan(\xi)\left(1-\coth^2(\xi)\right)}{c_1 + c_2 \tan(\xi)\coth(\xi) + c_1 \tanh(\xi) + c_2 \tan(\xi)} \right] - \left(c_1 + c_2 \tan(\xi)\coth(\xi)\right) \\
& \times \left[\frac{c_2\left(1+\tan^2(\xi)\right)\coth(\xi) + c_2 \tan(\xi)\left(1-\coth^2(\xi)\right) + c_1\left(1-\tanh^2(\xi)\right)}{\left(c_1 + c_2 \tan(\xi)\coth(\xi) + c_1 \tanh(\xi) + c_2 \tan(\xi)\right)^2} \right. \\
& \left. + \frac{c_2\left(1+\tan^2(\xi)\right)}{\left(c_1 + c_2 \tan(\xi)\coth(\xi) + c_1 \tanh(\xi) + c_2 \tan(\xi)\right)^2} - 2c_3 \mathrm{e}^{-2\xi} \right]
\end{aligned}
\tag{2-2}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2 = & \frac{1}{\dfrac{c_1 \tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2}{c_1 \tan(\xi) + c_2 \coth(\xi) + c_1 \tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2} + c_3 \mathrm{e}^{-2\xi} - \dfrac{1}{2}} \\
& \times \left[\frac{c_1\left(1-\tanh^2(\xi)\right)\tan(\xi) + c_1 \tanh(\xi)\left(1+\tan^2(\xi)\right)}{c_1 \tan(\xi) + c_2 \coth(\xi) + c_1 \tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2} - \left(c_1 \tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2\right) \right. \\
& \times \frac{c_1\left(1+\tan^2(\xi)\right) + c_2\left(1-\coth^2(\xi)\right) + c_1\left(1-\tanh^2(\xi)\right)\tan(\xi)}{\left(c_1 \tan(\xi) + c_2 \coth(\xi) + c_1 \tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2\right)^2} \\
& \left. + \frac{c_1 \tanh(\xi)\left(1+\tan^2(\xi)\right)}{\left(c_1 \tan(\xi) + c_2 \coth(\xi) + c_1 \tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2\right)^2} - 2c_3 \mathrm{e}^{-2\xi} \right]
\end{aligned}
\tag{2-3}
$$

其中 c_1, c_2, c_3 是任意非零常量。

在求解的过程中我们忽略了一些虚解，因此将该辅助方程应用到非线性偏微分方程中时，我们就仅得到了非线性偏微分方程的实相互作用解。

3. 新的辅助方程法

在上一节中，我们已经求出了辅助方程的新解，为了更好地求解高阶 Broer-Kaup 方程的相互作用解，本文介绍了一种新的辅助方程法。这种辅助方程法的步骤如下所示：

第一步：对于给定的具有自变量 x, y, t 等的非线性偏微分方程：

$$
\begin{cases} P\left(H_x, H_{ty}, G, \cdots\right) = 0 \\ Q\left(G_t, G_{xx}, H, \cdots\right) = 0 \end{cases}
\tag{3-1}
$$

我们作如下变换：

$$
\begin{cases} H(x,y,t) = H(\xi) \\ G(x,y,t) = G(\xi) \end{cases}, \quad \xi = x + ly + ct
\tag{3-2}
$$

其中 l, c 为待定系数。

第二步：将变换(3-2)代入方程(3-1)，则方程化为如下常微分方程：

$$\begin{cases} P\left(H',H'',H''',G,\cdots\right)=0 \\ Q\left(G',G'',G''',H,\cdots\right)=0 \end{cases} \tag{3-3}$$

第三步：我们假设方程(3-3)的解如下所示：

$$\begin{cases} H\left(\xi\right)=\sum_{i=0}^{m} a_i f^i\left(\xi\right) \\ G\left(\xi\right)=\sum_{j=0}^{n} b_j f^j\left(\xi\right) \end{cases} \tag{3-4}$$

其中 m,n 是方程(3-3)中由齐次平衡法确定的正整数。 $f\left(\xi\right)$ 满足方程(2-1)。将(3-4)代入方程(3-3)，当把 $f^i\left(\xi\right)$ 的所有系数都设为零时，我们就得到了一组代数方程。因此， a_i,b_j 将通过解代数方程组来确定。然后我们将这个方法应用到(2 + 1)维高阶 Broer-Kaup 方程中去就能得到方程的相互作用解。

4. (2 + 1)维 Broer-Kaup 方程的新相互作用解

对于求解(2 + 1)维高阶 Broer-Kaup 方程的新相互作用解，首先，我们要明确求解的 Broer-Kaup 方程为：

$$\begin{cases} H_{ty}=H_{xxy}-2\left(HH_x\right)_y-2G_{xx} \\ G_t=-G_{xx}-2\left(GH\right)_x \end{cases} \tag{4-1}$$

其次我们对方程(4-1)作如下变换：

$$G=H_y \tag{4-2}$$

将变换(4-2)代入方程(4-1)，我们得到了如下微分方程：

$$H_{xx}+2HH_x+H_t=0 \tag{4-3}$$

然后我们再对方程(4-3)作如下变换：

$$H=H\left(\xi\right),\quad \xi=kx+ly+ct\,, \tag{4-4}$$

其中 k,l,c 为待定系数。由此，我们得到了一个新的常微分方程：

$$k^2H''+2kHH'+cH'=0\,, \tag{4-5}$$

并且我们假设方程(4.5)的解如下所示：

$$\begin{cases} H=\sum_{i=0}^{m} a_i f^i\left(\xi\right) \\ G=\sum_{i=0}^{n} b_i f^i\left(\xi\right) \end{cases},\quad \xi=x+ly+ct\,, \tag{4-6}$$

其中 l,c 为待定系数。根据齐次平衡法，我们求得 $m=1,n=2$ ，所以我们假设方程(4-5)的解如下所示：

$$\begin{cases} H=a_0+a_1f\left(\xi\right) \\ G=b_0+b_1f(\xi)+b_2f^2\left(\xi\right) \end{cases}, \tag{4-7}$$

其中 a_0,a_1,b_0,b_1,b_2 是常数，最后我们通过 maple 软件计算，我们得到以下结果：

$$a_0=-\frac{c}{2},\ a_1=1,\ b_0=4l,\ b_1=0,\ b_2=-l,\ c=c,\ l=l$$

因此，我们得到方程(4-1)的相互作用解如下所示：

$$\begin{cases} H_1 = -\dfrac{c}{2} + \dfrac{1}{\dfrac{c_1 + c_2\tan(\xi)\coth(\xi)}{c_1 + c_2\tan(\xi)\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi) + c_2\tan(\xi)} + c_3 e^{-2\xi} - \dfrac{1}{2}} \\ \quad \times \dfrac{c_2\left(1+\tan^2(\xi)\right)\coth(\xi) + c_2\tan(\xi)\left(1-\coth^2(\xi)\right)}{c_1 + c_2\tan(\xi)\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi) + c_2\tan(\xi)} - \left(c_1 + c_2\tan(\xi)\coth(\xi)\right) \\ \quad \times \left[\dfrac{c_2\left(1+\tan^2(\xi)\right)\coth(\xi) + c_2\tan(\xi)\left(1-\coth^2(\xi)\right) + c_1\left(1-\tanh^2(\xi)\right)}{\left(c_1 + c_2\tan(\xi)\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi) + c_2\tan(\xi)\right)^2}\right. \\ \quad \left. + \dfrac{c_2\left(1+\tan^2(\xi)\right)}{\left(c_1 + c_2\tan(\xi)\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi) + c_2\tan(\xi)\right)^2} - 2c_3 e^{-2\xi}\right] \\ G_1 = 4l - l \times \dfrac{1}{\dfrac{c_1 + c_2\tan(\xi)\coth(\xi)}{c_1 + c_2\tan(\xi)\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi) + c_2\tan(\xi)} + c_3 e^{-2\xi} - \dfrac{1}{2}} \\ \quad \times \dfrac{c_2\left(1+\tan^2(\xi)\right)\coth(\xi) + c_2\tan(\xi)\left(1-\coth^2(\xi)\right)}{c_1 + c_2\tan(\xi)\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi) + c_2\tan(\xi)} - \left(c_1 + c_2\tan(\xi)\coth(\xi)\right) \\ \quad \times \left[\dfrac{c_2\left(1+\tan^2(\xi)\right)\coth(\xi) + c_2\tan(\xi)\left(1-\coth^2(\xi)\right) + c_1\left(1-\tanh^2(\xi)\right)}{\left(c_1 + c_2\tan(\xi)\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi) + c_2\tan(\xi)\right)^2}\right. \\ \quad \left. + \dfrac{c_2\left(1+\tan^2(\xi)\right)}{\left(c_1 + c_2\tan(\xi)\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi) + c_2\tan(\xi)\right)^2} - 2c_3 e^{-2\xi}\right] \end{cases} \tag{4-8}$$

$$\begin{cases} H_2 = -\dfrac{c}{2} + \dfrac{1}{\dfrac{c_1\tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2}{c_1\tan(\xi) + c_2\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2} + c_3 e^{-2\xi} - \dfrac{1}{2}} \\ \quad \times \left[\dfrac{c_1\left(1-\tanh^2(\xi)\right)\tan(\xi) + c_1\tanh(\xi)\left(1+\tan^2(\xi)\right)}{c_1\tan(\xi) + c_2\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2} - \left(c_1\tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2\right)\right. \\ \quad \times \dfrac{c_1\left(1+\tan^2(\xi)\right) + c_2\left(1-\coth^2(\xi)\right) + c_1\left(1-\tanh^2(\xi)\right)\tan(\xi)}{\left(c_1\tan(\xi) + c_2\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2\right)^2} \\ \quad \left. + \dfrac{c_1\tanh(\xi)\left(1+\tan^2(\xi)\right)}{\left(c_1\tan(\xi) + c_2\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2\right)^2} - 2c_3 e^{-2\xi}\right] \\ G_2 = 4l - l \times \dfrac{1}{\dfrac{c_1\tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2}{c_1\tan(\xi) + c_2\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2} + c_3 e^{-2\xi} - \dfrac{1}{2}} \\ \quad \times \left[\dfrac{c_1\left(1-\tanh^2(\xi)\right)\tan(\xi) + c_1\tanh(\xi)\left(1+\tan^2(\xi)\right)}{c_1\tan(\xi) + c_2\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2} - \left(c_1\tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2\right)\right. \\ \quad \times \dfrac{c_1\left(1+\tan^2(\xi)\right) + c_2\left(1-\coth^2(\xi)\right) + c_1\left(1-\tanh^2(\xi)\right)\tan(\xi)}{\left(c_1\tan(\xi) + c_2\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2\right)^2} \\ \quad \left. + \dfrac{c_1\tanh(\xi)\left(1+\tan^2(\xi)\right)}{\left(c_1\tan(\xi) + c_2\coth(\xi) + c_1\tanh(\xi)\tan(\xi) + c_2\right)^2} - 2c_3 e^{-2\xi}\right] \end{cases} \tag{4-9}$$

至此，我们已经求得了非线性 Broer-Kaup 方程的相互作用解有如(4-8) (4-9)的相互作用解。

5. 总结

本文给出了一种新的辅助方程法，这种辅助方程法在求解(2 + 1)维 Broer-Kaup 方程的相互作用解以及其他非线性偏微分方程方面都有重要的应用。首先，我们通过几个简单的变换将 Broer-Kaup 方程化为常微分方程。根据我们给出的新的辅助方程法，假设出方程的解，并通过齐次平衡法确定解的幂次。最后借助 maple 软件求出非线性 Broer-Kaup 方程的相互作用解。

致　谢

本文受到临沂大学“应用数学”学科提升计划资助。

参考文献

[1] Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. and Miura, R.M. (1967) Method for Solving the KdV Equation. *Physical Review Letters*, **19**, 1095-1097. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095

[2] Hirota, R. (1971) Exact Solution of the KdV Equation for Multiple Collisions of Solutions. *Physical Review Letters*, **27**, 1192-1194. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.27.1192

[3] Weiss, J., Tabor, M. and Carnevale, G. (1983) The Painlevé Property for Partial Differential Equations. *Journal of Mathematical Physics*, **24**, 522-526. https://doi.org/10.1063/1.525721

[4] Li, Y.S. and Zhang, J.E. (2001) Darboux Transformations of Classical Boussinesq System and Its Mutisoliton Solutions. *Physics Letters A*, **284**, 253-258. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(01)00331-0

[5] Wang, M.L., Zhou, Y.B. and Li, Z.B. (1996) Applications of a Homogeneous Balance Method to Exact Solutions of Nonlinear Equations in Mathematical Physics. *Physics Letters A*, **216**, 67-75. https://doi.org/10.1016/0375-9601(96)00283-6

[6] 徐炳振，李悦科，阎循领. 一类五阶非线性演化方程的新孤波解[J]. 物理学报, 1998, 47(12): 1946-1951.

[7] 陈德芳，楼森岳. kdv 方程与高阶 kdv 方程行波解之间的形变理论[J]. 物理学报, 1991, 40(4): 513-521.

[8] Ma, W.X. and Fuchssteiner, B. (1996) Explicit and Exact Solutions to a Kolmogorov Petrovskii Piskunov Equation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **31**, 329-338. https://doi.org/10.1016/0020-7462(95)00064-X

[9] Tibor, B., Bla, L., Csaba, M. and Zsolt, U. (1998) The Hyperbolic Tangent Distribution Family. *Powder Technology*, **97**, 100-108. https://doi.org/10.1016/S0032-5910(97)03393-7

[10] Ma, W.X., Huang, T. and Zhang, Y. (2010) A Multiple Exp-Function Method for Nonlinear Differential Equations and Its Application. *Physica Scripta*, **82**, 5468-5478. https://doi.org/10.1088/0031-8949/82/06/065003

[11] Ma, W.X. and Zhu, Z.N. (2012) Solving the (3+1)-Dimensional Generalized KP and BKP Equations by the Multiple Exp-Function Algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 11871-11879.

[12] Fu, Z.T., Liu, S.K. and Zhao, Q. (2001) New Jacobi Elliptic Function Expansion and New Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations. *Physics Letters A*, **290**, 72-76. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(01)00644-2

[13] Chen, H.T. and Zhang, H.Q. (2003) Improved Jacobin Elliptic Function Method and Its Applications. *Chaos, Solitons and Fractals*, **15**, 585-591. https://doi.org/10.1016/S0960-0779(02)00147-9

[14] Lou, S.Y. (2002) (2 + 1)-Dimensional Compact on Solutions with and without Completely Elastic Interaction Properties. *Journal of Physics A General Physics*, **35**, 10619. https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/49/310

[15] Ruan, H.Y. and Chen, Y.X. (1999) Symmetries and Dromion Solution of a (2 + 1)-Dimensional Nonlinear Schrödinger Equation. *Acta Physica Sinica*, **8**, 241-251. https://doi.org/10.1088/1004-423X/8/4/001