Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(7), 997-1005
Published Online July 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.97119

Hans汉斯

Analysis of Students' Requirements in Online Classroom Based on Dual Hesitation Fuzzy Language Variables

Ziwei Cheng[1], Xiangyang Xu[2*], Binbin Wang[1]

[1]East China University of Technology, Nanchang Jiangxi
[2]Nanchang Normal University, Nanchang Jiangxi
Email: Chengxziwei0316@163.com, [*]846551543@qq.com

Received: Jun. 14th, 2020; accepted: Jul. 3rd, 2020; published: Jul. 10th, 2020

Abstract

Based on the definitions of dual hesitant fuzzy linguistic variables, Frank-S norm and Frank-T norm, their operational rules, score function and accuracy function are proposed in the paper. Frank aggregator operation of dual hesitant fuzzy language and its operational laws are also defined. For fuzzy multiple attribute decision making problems in which the attribute values take the form of dual hesitant fuzzy linguistic variables, a method based on dual hesitant fuzzy linguistic Frank operator is investigated. Finally, combining with the actual student demand problem and taking the online classroom as an example, the natural language description of student demand is transformed into the dual hesitation fuzzy language, and the dual hesitation fuzzy Frank operator is used to sort the customer demand, which verifies the feasibility and effectiveness of the method.

Keywords

Dual Hesitant Fuzzy Linguistic Variables, Frank Aggregator Operation, Customer Requirement, Multiple Attribute Decision Making

基于对偶犹豫模糊语言变量的在线课堂学生需求分析

程紫薇[1]，徐向阳[2*]，王斌斌[1]

[1]东华理工大学，江西 南昌
[2]南昌师范学院，江西 南昌
Email: Chengxziwei0316@163.com, [*]846551543@qq.com

文章引用: 程紫薇, 徐向阳, 王斌斌. 基于对偶犹豫模糊语言变量的在线课堂学生需求分析[J]. 应用数学进展, 2020, 9(7): 997-1005. DOI: 10.12677/aam.2020.97119

收稿日期：2020年6月14日；录用日期：2020年7月3日；发布日期：2020年7月10日

摘 要

基于对偶犹豫模糊语言变量、Frank-T范数和Frank-S范数的定义，给出了对偶犹豫模糊语言变量的运算规则、得分函数、精确函数，定义了对偶犹豫模糊语言Frank集结算子及其运算规则和基本性质。针对属性值为对偶犹豫模糊语言变量的多属性决策问题，提出了一种基于对偶犹豫模糊语言Frank算子的多属性决策方法。最后，结合实际学生需求问题，以在线课堂为实例，将学生需求的自然语言描述转化为对偶犹豫模糊语言，并运用对偶犹豫模糊Frank算子对顾客需求进行排序，验证了该方法的可行性和有效性。

关键词

对偶犹豫模糊语言变量，Frank集结算子，顾客需求，多属性决策

1. 引言

随着网络时代的到来，线上教学应运而生，使得学生足不出户就能通过网络高效便捷地学习知识。目前市场线上教学平台多种多样，但学生的需求会随着年级、家庭、成绩、环境等因素的变化而变化，在学生给出需求测度时可能会存在模糊性的情况。例如在评价网络安全时使用“还好、能接受”等诸如此类的语言评价，这种语言模糊性很大程度会使决策的不确定性增加，因此模糊多属性决策也由之受到越来越多学者的关注。1965 年，美国控制论专家 Zadeh [1]通过将经典集合的特征函数拓展为隶属函数，率先提出了模糊集的概念，以描述生活中众多亦此亦彼的模糊性现象。但是，模糊集无法刻画非隶属度与犹豫度，即模糊集不能完整刻画决策问题的所有信息。为此，Atanassov [2]在模糊集的基础上引入非隶属度，提出了直觉模糊集。考虑到决策者在决策时经常会在若干个可能值之间犹豫不决，Torra [3]提出了犹豫模糊集的概念，其隶属度包含几个可能取值。然而，犹豫模糊集只考虑了隶属度多种可能取值的情况，忽略了非隶属度的重要性。因此，Zhu 和 Xu [4]在直觉模糊集和犹豫模糊集的基础上，提出了对偶犹豫模糊集，其隶属度与非隶属度都包含若干种可能取值，能更准确地表达决策者的犹豫不决。由于对偶犹豫模糊集具有上述诸多优越性，学者们纷纷探究其在决策科学中的应用。例如，汪永玲，冯向前，张华荣[5]基于对偶犹豫模糊语言]研究了属性权重未知情形下的多属性决策问题。

算子集成理论在多属性决策中具有重要意义。由于多属性决策的过程中需要按照一定的方法对已有信息进行集成，对于算子的研究显得尤为重要。在此之前，杜玉琴[6]、侯福均[7]和翟玉冰[8]已在直觉背景研究过 Frank 集成算子运算法则及其性质。在犹豫模糊环境下，梁玉英[9]、马庆功[10]和赵晓冬[11]等提出了一系列犹豫模糊 Frank 集成算子。相比较而言，在处理多属性决策问题时，由于 Frank 算子可以根据不同的参数来解决不同类型的多属性决策问题，具有较强的兼容性。因此 Frank 算子比 Choquet 算子[12]和 Power 算子[13] [14]更灵活，应用更为广泛。目前，关于 Frank 算子应用于对偶犹豫模糊语言变量还比较少见，因此，对偶犹豫模糊语言 Frank 集成算子具有重要的研究意义。

本文基于对偶犹豫模糊语言环境下的运算规则、得分函数、精确函数和大小比较方法，定义了对偶犹豫模糊语言环境下 Frank 算子的运算规则，提出了对偶犹豫模糊语言 Frank 加权算术平均算子、对偶犹豫模糊语言 Frank 有序加权算术平均算子，研究了这些算子的有界性、单调性和交换性等性质，并证明参数 θ 逼近 1 时，对偶犹豫模糊语言 Frank 加权算术平均算子退化为对偶犹豫模糊语言加权算术平均算子。最后，将对偶犹豫模糊语言 Frank 加权算术平均算子应用于对偶犹豫模糊语言环境下的多属性决策问题。

2. 预备知识

定义 1 [4]：设 X 是一个非空集合，则 X 上的对偶犹豫模糊语言集(Dual Hesitant Fuzzy Linguistic Set, DHFLS)定义为

$$D=\left\{\left\langle x,s_{\theta(x)},h(x),g(x)\right\rangle \middle| x\in X\right\} \tag{1}$$

式中，$s_{\theta(x)}\in S=\{s_0,s_1,\cdots,s_l\}$，$h(x)$ 表示 $x\in s_{\theta(x)}$ 的可能隶属度，$g(x)$ 表示 $x\in s_{\theta(x)}$ 的可能非隶属度，并且 $\forall x\in s_{\theta(x)}$，$\gamma\in h(x)$，$\eta\in g(x)$ 时，有 $0\le\gamma,\eta\le1$，$0\le\gamma^{+}+\eta^{+}\le1$，$\gamma^{+}\in h^{+}(x)=\bigcup_{\gamma\in h(x)}\max\{\gamma\}$，$\eta^{+}\in g^{+}(x)=\bigcup_{\eta\in g(x)}\max\{\eta\}$。

定义 2 [15]：设 $d_1=\left\langle s_{\theta(x_1)},h_1,g_1\right\rangle$ 和 $d_2=\left\langle s_{\theta(x_2)},h_2,g_2\right\rangle$ 是两个给定的对偶犹豫模糊语言变量，则可定义如下运算

1) 数乘运算 $\lambda d_1=\left\langle s_{\lambda\theta(x_1)},\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\eta_1\in g_1}\left\{\left\{1-(1-\gamma_1)^{\lambda}\right\},\left\{(\eta_1)^{\lambda}\right\}\right\}\right\rangle$，$\lambda>0$；

2) 幂运算 $d_1^{\lambda}=\left\langle s_{\theta(x_1)^{\lambda}},\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\eta_1\in g_1}\left\{\left\{(\gamma_1)^{\lambda}\right\},\left\{1-(1-\eta_1)^{\lambda}\right\}\right\}\right\rangle$，$\lambda>0$；

3) 和运算 $d_1\oplus d_2=\left\langle s_{\theta(x_1)+\theta(x_2)},\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\eta_1\in g_1,\eta_2\in g_2}\left\{\{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2\},\{\eta_1\eta_2\}\right\}\right\rangle$；

4) 积运算 $d_1\otimes d_2=\left\langle s_{\theta(x_1)\times\theta(x_2)},\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\eta_1\in g_1,\eta_2\in g_2}\left\{\{\gamma_1\gamma_2\},\{\eta_1+\eta_2-\eta_1\eta_2\}\right\}\right\rangle$。

在多属性决策过程中，语言集的比较一直是关注重点。在研究对偶犹豫模糊语言变量时，得分函数和精确函数能有效解决其大小比较问题。

定义 3：设 $d=\left(s_{\theta(x)},h,g\right)$ 为任意的对偶犹豫模糊语言变量，其得分函数 $S(d)$ 和精确函数 $P(d)$ 分别定义为

$$S(d)=\frac{\theta}{l}\times\left(\frac{1}{\#h}\sum\nolimits_{\gamma\in h}\gamma-\frac{1}{\#g}\sum\nolimits_{\eta\in g}\eta\right) \tag{2}$$

$$P(d)=\frac{\theta}{l}\times\left(\frac{1}{\#h}\sum\nolimits_{\gamma\in h}\gamma+\frac{1}{\#g}\sum\nolimits_{\eta\in g}\eta\right) \tag{3}$$

式中，$l+1$ 为语言评价集的元素个数，$\#h$，$\#g$ 分别表示集合 h 和集合 g 中元素的个数。显然有 $S(d)\in[-1,1]$，$P(d)\in[0,1]$，并且有 $S(d)$ 越大，d 越优。

定义 4：设 d_1 和 d_2 是两个给定的 DHFLS，则

1) 若 $S(d_1)>S(d_2)$，则 $d_1>d_2$；

2) 若 $S(d_1)=S(d_2)$，那么当 $P(d_1)>P(d_2)$ 时，$d_1>d_2$；当 $P(d_1)=P(d_2)$ 时，$d_1=d_2$。

3. 对偶犹豫模糊语言 Frank 集成算子

3.1. 对偶犹豫模糊语言 Frank 算子的运算规则

根据对偶犹豫模糊语言变量、Frank-T 范数和 Frank-S 范数[16]，定义对偶犹豫模糊语言环境下 Frank 算子的运算法则如下。

定义 6：设 $d_1=\left(s_{\theta(x_1)},h_1,g_1\right)$ 和 $d_2=\left(s_{\theta(x_2)},h_2,g_2\right)$ 是两个给定的 DHFLS，基于对偶犹豫模糊语言 Frank 算子的运算规则定义如下

$$\lambda d_1=\left\langle s_{\lambda\theta(x_1)},1-\log_\theta\left(1+\frac{\left(\theta^{1-\gamma_1}-1\right)^\lambda}{(\theta-1)^{\lambda-1}}\right),\log_\theta\left(1+\frac{\left(\theta^{\eta_1}-1\right)^\lambda}{(\theta-1)^{\lambda-1}}\right)\right\rangle,\quad \lambda>0; \tag{6}$$

$$d_1^{\lambda}=\left\langle s_{\theta(x_1)^\lambda},\log_\theta\left(1+\frac{\left(\theta^{\gamma_1}-1\right)^\lambda}{(\theta-1)^{\lambda-1}}\right),1-\log_\theta\left(1+\frac{\left(\theta^{1-\eta_1}-1\right)^\lambda}{(\theta-1)^{\lambda-1}}\right)\right\rangle,\quad \lambda>0; \tag{7}$$

$$d_1\oplus d_2=\left\langle s_{\theta(x_1)+\theta(x_2)},1-\log_\theta\left(1+\frac{\left(\theta^{1-\gamma_1}-1\right)\left(\theta^{1-\gamma_2}-1\right)}{(\theta-1)}\right),\log_\theta\left(1+\frac{\left(\theta^{\eta_1}-1\right)\left(\theta^{\eta_2}-1\right)}{(\theta-1)}\right)\right\rangle; \tag{8}$$

$$d_1\otimes d_2=\left\langle s_{\theta(x_1)\times\theta(x_2)},\log_\theta\left(1+\frac{\left(\theta^{\gamma_1}-1\right)\left(\theta^{\gamma_2}-1\right)}{(\theta-1)}\right),1-\log_\theta\left(1+\frac{\left(\theta^{1-\eta_1}-1\right)\left(\theta^{1-\eta_2}-1\right)}{(\theta-1)}\right)\right\rangle. \tag{9}$$

易证上述计算结果仍为对偶犹豫模糊语言变量。

为了实现多个对偶犹豫模糊语言变量的集结，本文提出了基于该语言集的加权算术平均算子、有序加权算术平均算子。

3.2. 对偶犹豫模糊语言 Frank 加权算术平均算子

定义 7：设 $d_i=\left\langle s_{\theta(x_i)},h_i,g_i\right\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组任意对偶犹豫模糊语言变量，$\omega=\left(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\right)^{\mathrm{T}}$ 是 d_i 的权重向量，满足 $\omega_i\in[0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$，那么对偶犹豫模糊语言 Frank 加权算术平均算子(DHFLFWA)定义如下

$$\mathrm{DHFLFWA}\left(d_1,d_2,\cdots,d_n\right)=\omega_1 d_1\oplus\omega_2 d_2\oplus\cdots\oplus\omega_n d_n$$

定理 1：设 $d_i=\left\langle s_{\theta(x_i)},h_i,g_i\right\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组任意对偶犹豫模糊语言变量，$\omega=\left(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\right)^{\mathrm{T}}$ 是 d 的权重向量，满足 $\omega_i\in[0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$，那么运用 DHFLFWA 算子计算得到的结果仍然是对偶犹豫模糊语言变量，并且

$$\begin{aligned}&\mathrm{DHFLFWA}\left(d_1,d_2,\cdots d_n\right)\\&=\left\langle s_{\sum_{i=1}^{n}\omega_i\theta(d_i)},\bigcup_{\gamma_i\in h_i,\eta_i\in g_i}1-\log_\theta\left(1+\frac{\theta-1}{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta-1}{\theta^{1-\gamma_i}-1}\right)^{\omega_i}}\right),\log_\theta\left(1+\frac{\theta-1}{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta-1}{\theta^{\eta_i}-1}\right)^{\omega_i}}\right)\right\rangle\end{aligned} \tag{10}$$

易用数学归纳法证明等式(10)成立，此外，DHFLFWA 算子也具有有界性，如定理 2 所示。

定理 2：(有界性)设 $d_i=\left\langle s_{\theta(x_i)},h_i,g_i\right\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组任意对偶犹豫模糊语言变量，若 $s^-=\min s_{\theta(x_i)}$，$s^+=\max s_{\theta(x_i)}$，$\gamma^-=\min\{\gamma_i|\gamma_i\in h_i\}$，$\gamma^+=\max\{\gamma_i|\gamma_i\in h_i\}$，$\eta^-=\min\{\eta_i|\eta_i\in g_i\}$，$\eta^+=\max\{\eta_i|\eta_i\in g_i\}$，则

$$\left\langle s^-,\{\gamma^-\},\{\eta^+\}\right\rangle\le \mathrm{DHFLFWA}(d_1,d_2,\cdots,d_n)\le\left\langle s^+,\{\gamma^+\},\{\eta^-\}\right\rangle$$

此外，易知 DHFLFWA 也算子具有幂等性和单调性，如定理 3 和定理 4 所示。

定理 3：(单调性)设 $d_i=\left\langle s_{\theta(x_i)},h_i,g_i\right\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $d_i'=\left\langle s_{\theta(x_i)},h_i,g_i\right\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 为两组对偶犹豫模糊语言变量，若对于任意的 $i=1,2,\cdots,n$，有 $d_i'\le d_i$，那么 $\mathrm{DHFLFWA}(d_1,d_2,\cdots,d_n)=\mathrm{DHFLFWA}(d_1',d_2',\cdots,d_n')$。

下面研究 DHFLFWA 算子中参数 θ 的性质。

推论 1 当 $\theta\to1$ 时，对偶犹豫模糊语言 Frank 加权算术平均算子(DHFLFWA)就转化为对偶犹豫模糊语言加权算术平均算子(DHFLWAA)：

$$\begin{aligned}&\mathrm{DHFLWAA}(d_1,d_2,\cdots,d_n)\\&=\sum_{i=1}^n\omega_id_i=\left\langle s_{\sum_{i=1}^n\omega_j\theta(d_j)},\bigcup_{\gamma_i\in h_i,\eta_i\in g_i}\left\{\left\{1-\prod_{i=1}^n(1-\gamma_i)^{\omega_i}\right\},\left\{\prod_{i=1}^n(\eta_i)^{\omega_i}\right\}\right\}\right\rangle\end{aligned}\tag{11}$$

证明 由定义 2，$d_1\oplus d_2=\left\langle s_{\theta(x_1)+\theta(x_2)},\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\eta_1\in g_1,\eta_2\in g_2}\{\{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2\},\{\eta_1\eta_2\}\}\right\rangle$ 可知若 $y(1-t)$ 为严格单调递减的加性算子时，$x(t)=y(1-t)=\ln\left(\frac{\theta-1}{\theta^{1-t}-1}\right),0<t<1$，于是有

$$\lim_{\theta\to1}x(t)=\lim_{\theta\to1}\ln\left(\frac{\theta-1}{\theta^{1-t}-1}\right)=\lim_{\theta\to1}\ln\left(\frac{1}{(1-t)\theta^{-1}}\right)=-\ln(1-t)$$

可以得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{DHFLWAA}(d_1,d_2,\cdots,d_n)\\&=\bigoplus_{i=1}^n\omega_id_i=\left\langle s_{\sum_{i=1}^n\omega_j\theta(d_j)},\bigcup_{\gamma_i\in h_i,\eta_i\in g_i}\left\{\left\{1-\prod_{i=1}^n(1-\gamma_i)^{\omega_i}\right\},\left\{\prod_{i=1}^n(\eta_i)^{\omega_i}\right\}\right\}\right\rangle\end{aligned}$$

3.3. 对偶犹豫模糊语言 Frank 有序加权算术平均算子

定义 8：设 $d_i=\left\langle s_{\theta(x_i)},h_i,g_i\right\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组任意对偶犹豫模糊语言变量，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是 d_i 的位置权重向量，满足 $\omega_i\in[0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^n\omega_i=1$，$d_{\sigma(i)}$ 为 d_i 中第 i 大的元素。对偶犹豫模糊语言 Frank 有序加权算术平均算子(DHFLFOWA)定义如下

$$\begin{aligned}&\mathrm{DHFLFOWA}(d_1,d_2,\cdots d_n)=\omega_1d_{\sigma(1)}\oplus\omega_2d_{\sigma(2)}\oplus\cdots\oplus\omega_nd_{\sigma(n)}\\&=\left\langle s_{\sum_{i=1}^n\omega_i\theta(d_{\sigma(i)})},\bigcup_{\gamma_i\in h_i,\eta_i\in g_i}1-\log_\theta\left(1+\frac{\theta-1}{\prod_{i=1}^n\left(\frac{\theta-1}{\theta^{1-\gamma_{\sigma(i)}}-1}\right)^{\omega_{\sigma(i)}}}\right),\log_\theta\left(1+\frac{\theta-1}{\prod_{i=1}^n\left(\frac{\theta-1}{\theta^{\eta_{\sigma(i)}}-1}\right)^{\omega_{\sigma(i)}}}\right)\right\rangle\end{aligned}\tag{12}$$

显然，与对偶犹豫模糊语言 Frank 加权算术平均算子(DHFLFWA)类似，对偶犹豫模糊语言 Frank 有

序加权算术平均算子(DHFLFOWA)也具有有界性和单调性。此外，对偶犹豫模糊语言 Frank 有序加权算术平均算子(DHFLFOWA)还具有交换性。

定理 4：(交换性)设 $d_i = \left\langle s_{\theta(x_i)}, h_i, g_i \right\rangle (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为一组任意对偶犹豫模糊语言变量，如果 $(d_1', d_2', \cdots, d_n')$ 是 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 的任意位置交换，则有

$$\text{DHFLFOWA}(d_1', d_2', \cdots, d_n') = \text{DHFLFOWA}(d_1, d_2, \cdots, d_n).$$

4. 基于对偶犹豫模糊语言 Frank 集成算子的多属性决策方法

对于一个多属性决策问题，假设 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 为一个给定的方案集合，$C = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为属性集合，其对应的属性权重为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$，满足 $\omega_i \in [0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$。现邀请几位专家对已有方案进行综合评估，由于专家评估带有个人偏好且不唯一，为更好的描述专家综合评估值，属性值采用对偶犹豫模糊语言变量的形式表达：方案 A_i 在属性 C_j 下的属性值为 $d_{ij} = \left\langle s_{\theta(d_{ij})}, h_{ij}, g_{ij} \right\rangle (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$，其中 s 为给定语言评价集 $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_l\}$，由此，决策者构建的决策矩阵为 $D = \{d_{ij}\}_{m \times n}$。针对上述问题，本文提出了一种基于对偶犹豫模糊语言 Frank 加权平均算子的多属性决策方法，具体步骤如下：

步骤 1 规范化决策信息。对于效益型，其属性值保持不变，即 $d_{ij} = \left\langle s, h_{ij}, g_{ij} \right\rangle$；对于成本型，需要转化为 $\tilde{d}_{ij} = \left\langle s, \tilde{h}_{ij}, \tilde{g}_{ij} \right\rangle$，其中 $\tilde{h}_{ij} = \bigcup_{\gamma_{ij} \in h_{ij}} \{1 - \gamma_{ij}\}$，$\tilde{g}_{ij} = \bigcup_{\eta_{ij} \in g_{ij}} \{1 - \eta_{ij}\}$，即

$$\tilde{D}_{ij} = \begin{cases} d_{ij}, & \text{效益型属性} \\ \tilde{d}_{ij}, & \text{成本型属性} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n$$

步骤 2 基于得到的规范化矩阵 $D = \{d_{ij}\}_{m \times n}$，集成各方案的属性值。运用对偶犹豫模糊语言 Frank 加权算术平均算子(DHFLFWA)对决策矩阵 $D = \{d_{ij}\}_{m \times n}$ 中的第 i 行进行集成，求得方案 A_i 的综合属性值 $d_i (i = 1, 2, \cdots, m)$。

$$\begin{aligned} d_i &= DHFLFWA(d_{i1}, d_{i2}, \cdots d_{in}) \\ &= \left\langle s_{\sum_{i=1}^{n} \omega_i \theta(d_{ij})}, \bigcup_{\gamma_{ij} \in h_{ij}, \eta_{ij} \in g_{ij}} 1 - \log_\theta \left(1 + \frac{\theta - 1}{\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\theta - 1}{\theta^{1 - \gamma_{ij}} - 1} \right)^{\omega_i}} \right), \log_\theta \left(1 + \frac{\theta - 1}{\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\theta - 1}{\theta^{\eta_{ij}} - 1} \right)^{\omega_i}} \right) \right\rangle \end{aligned} \tag{13}$$

步骤 3 在步骤 2 的基础上得到综合属性值后，运用得分函数公式(2)和精确函数公式(3)计算 d_i 的得分函数值 $S(d_i)$ 和精确函数 $P(d_i)$ 值。

步骤 4 根据定义 4，对各个备选方案进行综合性能的排序。得分函数值越大，方案的性能值越好；当得分函数值相等时，继续比较精确函数值，精确函数值越大，方案性能越好，以此选出最优方案。

5. 实证分析

某教育机构开办了网络线上课堂，使得学生能利用电脑、平板、手机等电子通讯设备进行线上学习，丰富了课堂形式，能按自己需投求选择适合自己的课程。经过前期试运行，挑选了关注度较高的三个学生需求测度：

A_1：网络服务器(包括网络安全性、稳定性等)

A_2：功能设计(包括线上答疑、课程录播等)

A_3：教学质量(包括老师资历、课堂形式等)

由于学生的年级、成绩、环境等原因，对上述三个需求会有所不同。故采取问卷调查形式，对三类学生进行调查分析，C_1 为后进生，C_2 为中等生，C_3 为尖子生，挑选出具有代表性的问卷结果。由于问卷结果均为自然语言，如“尚可，一般，很好”等诸如此类的自然语言，因此为更好地保留学生需求的原始信息，需要由相关专家对问卷进行评估，均采用对偶犹豫模糊语言对顾客需求进行表示，属性权重向量为 $\omega = (0.25, 0.40, 0.35)^{T}$，语言评价集为

$$S = \{s_0: 很低, s_1: 较低, s_2: 低, s_3: 一般, s_4: 高, s_5: 较高, s_6: 很高\}$$

决策者给出各方案的属性值如表 1 所示。

Table 1. Attribute values of each scheme
表 1. 各方案的属性值

	后进生	中等生	尖子生
网络服务器	$\langle s_3, \{0.4, 0.5, 0.6\}, \{0.3, 0.5\} \rangle$	$\langle s_4, \{0.3, 0.5\}, \{0.2, 0.3\} \rangle$	$\langle s_4, \{0.3, 0.5, 0.6\}, \{0.1, 0.3\} \rangle$
功能设计	$\langle s_2, \{0.5, 0.6\}, \{0.3, 0.4\} \rangle$	$\langle s_5, \{0.4, 0.5\}, \{0.3, 0.5\} \rangle$	$\langle s_3, \{0.3, 0.5, 0.6\}, \{0.2, 0.4\} \rangle$
教学质量	$\langle s_4, \{0.5, 0.7\}, \{0.1, 0.3\} \rangle$	$\langle s_3, \{0.2, 0.4, 0.5\}, \{0.3, 0.4\} \rangle$	$\langle s_3, \{0.4, 0.5, 0.6\}, \{0.2, 0.3\} \rangle$

步骤 1 由于 3 个需求均为效益型，因此无需进行规范化处理。

步骤 2 运用对偶犹豫模糊语言 Frank 加权算术平均算子(DHFLFWA)对信息进行集成。由于对偶犹豫模糊语言 Frank 加权算术平均算子(DHFLFWA)形式会随参数而变，为了更好的选择备选方案，本文将列举 5 个具有代表性的参数值分别进行计算。

步骤 3 计算各个备选方案综合属性值的得分函数值。

1) 当 $\theta = 1.1$ 时，有 $S(d_1) = 0.0389$，$S(d_2) = 0.0273$，$S(d_3) = 0.0429$。

2) 当 $\theta = 2$ 时，有 $S(d_1) = 0.0696$，$S(d_2) = 0.0489$，$S(d_3) = 0.0769$。

3) 当 $\theta = 5$ 时，有 $S(d_1) = 0.1704$，$S(d_2) = 0.1200$，$S(d_3) = 0.1885$。

4) 当 $\theta = 10$ 时，有 $S(d_1) = 0.3357$，$S(d_2) = 0.2370$，$S(d_3) = 0.3720$。

5) 当 $\theta = 50$ 时，有 $S(d_1) = 1.6292$，$S(d_2) = 1.1573$，$S(d_3) = 1.8143$。

步骤 4 根据定义 4，对各个方案进行排序，排序结果都为 $A_3 \succ A_1 \succ A_2$，故 A_3 教学质量是三类学生最关注的需求，因此线上教学平台可针对这一需求加大整改力度。

通过分析发现，选取不同的参数值，计算得到的属性值虽然不同，但最终排序的结果相同。为了进一步说明本文提出的算法具有可靠性、合理性，下面将与文献[17]中提出的对偶犹豫模糊语言加权算术平均算子(DHFLWAA)进行对比分析。具体决策过程与对偶犹豫模糊语言 Frank 加权算术平均算子(DHFLFWA)类，有 $S(d_1) = 0.0356$，$S(d_2) = 0.0251$，$S(d_3) = 0.0394$。利用综合属性值对应的得分函数对备选方案进行排序，结果如表 2 所示。

通过观察表 2 中的排序结果可以发现，运用本文和文献[17]两种不同的算子计算得到的排序结果相同：$A_3 \succ A_1 \succ A_2$，即学生需求关注最高点为教学质量，说明本文构建的多属性决策方法具有合理性。此外，本文提出的对偶犹豫模糊语言 Frank 加权算术平均算子(DHFLFWA)具有可变参数 θ，这将能满足决

策者的不同需要，使得决策过程更灵活多变，因此决策更具一般性。本文提出对偶犹豫模糊语言 Frank 集结算子是有效且灵活的。

Table 2. Sorting results calculated by different operators
表 2. 利用不同算子计算得到的排序结果

算子	排序结果
DHFLFWA	$A_3 \succ A_1 \succ A_2$
DHFLWAA	$A_3 \succ A_1 \succ A_2$

6. 结论

本文基于语言评价集、对偶犹豫模糊集和 Frank S-范数与 Frank T-范数，给出了对偶犹豫模糊语言变量 Frank 集结算子，即对偶犹豫模糊语言 Frank 加权算术平均算子、对偶犹豫模糊语言 Frank 有序加权算术平均算子，并对两种算子的有界性、幂等性、单调性和交换性等性质加以研究。之后，给出了对偶犹豫模糊语言 Frank 集结算子具体的决策步骤，将对偶犹豫模糊语言 Frank 加权算术平均算子应用于多属性决策问题。最后，通过实例并与文献[17]中提出的 DHFLWAA 算子做对比分析，表明本文提出的对偶犹豫模糊语言 Frank 集结算子具有可行性和有效性。

基金项目

江西省教育厅科技重点项目(GJJ171109)。

参考文献

[1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[2] Atanassov, K.T. (1986) Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, 87-96. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3

[3] Torra, V. (2010) Hesitant Fuzzy Sets. *International Journal of Intelligent Systems*, **25**, 529-539. https://doi.org/10.1002/int.20418

[4] Zhu, B., Xu, Z.S. and Xia, M.M. (2012) Dual Hesitant Fuzzy Sets. *Journal of Applied Mathematics*, **26**, 410-425. https://doi.org/10.1155/2012/879629

[5] 汪永玲, 冯向前, 张华荣. 基于对偶犹豫模糊语言的多属性决策方法[J]. 统计与决策, 2019, 35(3): 42-46.

[6] 杜玉琴. 直觉不确定语言 Frank 集结算子及其应用[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(3): 1-11.

[7] 杜玉琴, 侯福均. 区间直觉语言 Frank 集结算子及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2018, 33(1): 119-125.

[8] 翟玉冰, 侯福均, 杜玉琴, 等. 直觉梯形模糊语言 Frank 算子及其在决策中的应用[J]. 运筹与管理, 2018, 27(4): 29-34+38.

[9] 宋瑞敏, 何雨卉. 一种直觉模糊多属性群决策方法及其拓展运用[J]. 科技管理研究, 2017, 37(21): 234-239.

[10] 马庆功. 基于加权犹豫 Frank 几何算法的决策模型[J]. 计算机工程与应用, 2018, 54(24): 123-127+155.

[11] 赵晓冬, 张妮, 臧誉琪. 区间中智犹豫模糊 Frank 优先集成算子及其应用[J]. 模糊系统与数学, 2019, 33(2): 99-120.

[12] 刘超, 汤国林, 刘宸琦, 等. 基于区间对偶犹豫不确定语言广义 Banzhaf Choquet 积分算子的多属性决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(5): 1203-1216.

[13] 王金山, 杨宗华. 基于 Power 几何算子的对偶犹豫不确定语言多属性决策方法[J]. 模糊系统与数学, 2017, 31(6): 36-42.

[14] Zhang, Z. (2013) Hesitant Fuzzy Power Aggregation Operators and Their Application to Multiple Attribute Group Decision Making. *Information Sciences*, **234**, 150-181. https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.01.002

[15] Wang, H., Zhao, X. and Wei, G. (2014) Dual Hesitant Fuzzy Aggregation Operators in Multiple Attribute Decision

Making. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, **26**, 2281-2290. https://doi.org/10.3233/IFS-130901

[16] Frank, M.J. (1978) On the Simultaneous Associativity of F(x,y) and x+y-F(x,y). *Aequationes Mathematicae*, **18**, 266-267. https://doi.org/10.1007/BF01844082

[17] 杨尚洪, 鞠彦兵. 基于对偶犹豫模糊语言变量的多属性决策方法[J]. 运筹与管理, 2015, 24(5): 91-96.