

广义Fornberg-Whitham方程的某些非线性波解

朱 贇, 刘 锐

华南理工大学, 数学学院, 广东 广州
Email: zhuyun07@outlook.com

收稿日期: 2020年9月1日; 录用日期: 2020年9月18日; 发布日期: 2020年9月25日

摘 要

本文利用微分方程定性理论和动力系统分支方法寻找广义Fornberg-Whitham方程的非线性波解, 当次数 $n = 2$ 时, 我们获得了四个非线性波解; 当次数 $n = 3$ 时, 我们获得了一个非线性波解。

关键词

Fornberg-Whitham方程, 行波系统, 分支, 精确解

Some Nonlinear Wave Solutions for the Generalized Fornberg-Whitham Equation

Yun Zhu, Rui Liu

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: zhuyun07@outlook.com

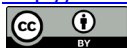
Received: Sep. 1st, 2020; accepted: Sep. 18th, 2020; published: Sep. 25th, 2020

Abstract

In this paper, the qualitative theory of differential equations and the bifurcation method of dynamical systems are used to find nonlinear wave solutions of the generalized Fornberg-Whitham equation. When $n = 2$, we obtained four nonlinear wave solutions. When $n = 3$, we obtained one nonlinear wave solution.

Keywords

Fornberg-Whitham Equation, Traveling Wave System, Bifurcation, Exact Solutions



1. 引言

本文利用微分方程定性理论和动力系统的分支方法[1] [2] [3] [4]研究 n 阶并带有参数 b 的广义 Fornberg-Whitham (F-W)方程

$$u_t - u_{xxt} + bu_x + u^n u_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \quad (1)$$

方程(1)是 F-W 方程[5] [6]的广义形式, F-W 方程具有如下形式

$$u_t - u_{xxt} + u_x + uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \quad (2)$$

Fornberg 和 Whitham 给出了方程(2)的一个尖孤立波解 $u(x, t) = Ae^{-\frac{1}{2}|x-\frac{4}{3}t|}$, 其中 A 为任意常数[7]。由于 F-W 方程不具有像 Camassa-Holm (C-H)方程[8]

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} \quad (3)$$

这样完全可积和双 Hamilton 结构[8]等良好性质, 一直并未引起广泛研究。直到近年来, F-W 方程重新引起了大家的关注。

当 $b = 1, n = 2$ 时, He 和 Meng 等人给出了方程(1)的尖孤立波解[9], Liang 给出了精确的行波解[10]。此外, Yang 和 Fan 将 F-W 方程推广成二元 F-W 方程

$$\begin{cases} u_t = u_{xxt} - u_x - uu_x + 3u_x u_{xx} + uu_{xxx} + \rho_x \\ \rho_x = -(\rho u)_x \end{cases} \quad (4)$$

并得到方程的光滑周期波、光滑孤立波和扭波等波解[11]。Bi 和 Jiang 研究了带线性色散项的 F-W 方程

$$u_t - u_{xxt} + u_x + uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx} - u_{xxx} \quad (5)$$

证明了光滑和非光滑行波解的存在性, 并给出了显示孤立波解[12]。

本文主要研究当 $n = 2, 3$ 时, 方程(1)的某些非线性波解。

2. 主要结果

当 $n = 2$ 时, 令

$$c_0 = 4(2 + \sqrt{4 - b}) \quad (6)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4b}) \quad (7)$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4b}) \quad (8)$$

$$k = \frac{\sqrt{15}}{12} \sqrt{16c - c^2 - 16b} \quad (9)$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{5}{4}c + 2k + \sqrt{3k}} \quad (10)$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{5}{4}c + 2k} - \sqrt{3k} \quad (11)$$

$$u_1(x, t) = 3k \tanh^{-2} \left(\sqrt{\frac{k}{10}}(x - ct) \right) - \frac{1}{4}c - 2k \quad (12)$$

$$u_2(x, t) = 3k \left(\frac{w_1 e^{\sqrt{\frac{2k}{5}}|x-ct|} + w_2}{w_1 e^{\sqrt{\frac{2k}{5}}|x-ct|} - w_2} \right)^2 - \frac{1}{4}c - 2k \quad (13)$$

$$u_3(x, t) = 3k \tanh^2 \left(\sqrt{\frac{k}{10}}(x - ct) \right) - \frac{1}{4}c - 2k \quad (14)$$

$$u_4(x, t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{30}}|x - c_0 t| + \frac{2}{\sqrt{5c_0}} \right)^2} - \frac{1}{4}c_0 \quad (15)$$

- 1) 当 $b \leq 0$, 且 $0 < c < c_0, c \neq c_1$ 时, $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), u_4(x, t)$ 是方程(1)的解;
- 2) 当 $0 < b < \frac{1}{4}$, 且 $b < c < c_0, c \neq c_1, c \neq c_2$ 时, $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), u_4(x, t)$ 是方程(1)的解;
- 3) 当 $b = \frac{1}{4}$, 且 $b < c < c_0, c \neq c_1$ 时, $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), u_4(x, t)$ 是方程(1)的解;
- 4) 当 $\frac{1}{4} < b$, 且 $b < c < c_0$ 时, $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), u_4(x, t)$ 是方程(1)的解。

当 $n = 3$ 时, 令

$$\delta = \sinh(\alpha + \operatorname{arsinh}(\beta)) \quad (16)$$

$$\alpha = \frac{|x - ct|}{\sqrt{12}} \sqrt{f + e\gamma + \gamma^2} \quad (17)$$

$$\beta = \frac{2(f + \gamma c) + e(c + \gamma)}{(c - \gamma)\sqrt{4f - e^2}} \quad (18)$$

$$f = \frac{12c\rho + \frac{6}{15}\gamma^2 c^2 + c^2 \gamma^3}{c(\gamma c + \gamma^2)} \quad (19)$$

$$\gamma = -\frac{c}{5} - \frac{9}{5}l^{\frac{1}{3}}c^2 + \frac{1}{30}\left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (20)$$

$$p = -54000b + 54000c - 1512c^3 \quad (21)$$

$$q = \sqrt{629856c^6 + p^2} \quad (22)$$

$$e = \frac{4}{5}c + 2\gamma \quad (23)$$

$$l = \frac{2}{p + q} \quad (24)$$

$$\rho = \frac{1}{40} \left(-12bc + 12c^2 - \frac{63}{125}c^4 - \frac{q}{13500}c + \frac{2916}{125}lc^7 - \frac{243}{125}l^{\frac{2}{3}}c^6 + 36bl^{\frac{1}{3}}c^3 + \frac{126}{125}l^{\frac{1}{3}}c^5 + \frac{2}{3}(c-b)l^{\frac{1}{3}} - \frac{7}{375}\left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{1}{3}}c^3 - \frac{1}{1500}\left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{2}{3}}c^2 \right) \quad (25)$$

$$u_5(x, t) = \frac{\gamma\delta\sqrt{4f-e^2} + 2f + e\gamma}{\delta\sqrt{4f-e^2} - 2\gamma - e} \quad (26)$$

c_3^1, c_3^2 由方程(27)决定

$$\frac{3}{4}(c-b)^{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{4}c^4 + c^2 - bc \quad (27)$$

- 1) 当 $b \leq 0$, 且 $0 < c < +\infty, c \neq c_3^2$ 时, $u_5(x, t)$ 是方程(1)的解;
- 2) 当 $0 < b < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, 且 $0 < c < +\infty, c \neq c_3^1, c \neq c_3^2$ 时, $u_5(x, t)$ 是方程(1)的解;
- 3) 当 $b = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, 且 $0 < c < +\infty, c \neq c_3^1$ 时, $u_5(x, t)$ 是方程(1)的解;
- 4) 当 $\frac{2}{3\sqrt{3}} < b$, 且 $0 < c < +\infty$ 时, $u_5(x, t)$ 是方程(1)的解。

此外, 我们已通过如下的 Mathematica 程序验证了由式子(12), (13), (14), (15), (26)分别给出的解 $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), u_4(x, t), u_5(x, t)$ 的正确性

$$D[u, t] - D[u, x, x, t] + bD[u, x] + u^n D[u, x] - 3D[u, x]D[u, x, x] - uD[u, x, x, x].$$

具体推导如下。

3. 行波系统及首次积分

首先, 对方程(1)做行波变换

$$u(x, t) = \varphi(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (28)$$

其中 $c > 0$ 为常波速。

得到常微分方程

$$3\varphi'\varphi'' + \varphi\varphi''' + c\varphi' - c\varphi''' - b\varphi' - \varphi^n\varphi' = 0 \quad (29)$$

再将方程(29)进行积分一次, 得到

$$(c-b)\varphi + [\varphi']^2 + (\varphi-c)\varphi'' - \frac{1}{n+1}\varphi^{n+1} = g \quad (30)$$

其中, g 为积分常数。

令

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = y \quad (31)$$

将(31)带入方程(30), 得到平面系统

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\xi} = y \\ \frac{dy}{d\xi} = \frac{g + (b-c)\varphi + \frac{1}{n+1}\varphi^{n+1} - y^2}{\varphi - c} \end{cases} \quad (32)$$

令

$$\frac{d\xi}{\varphi - c} = d\tau \quad (33)$$

将系统(32)转换为

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = (\varphi - c)y \\ \frac{dy}{d\tau} = g + (b-c)\varphi + \frac{1}{n+1}\varphi^{n+1} - y^2 \end{cases} \quad (34)$$

由于系统(32)和系统(34)有相同的首次积分(35)

$$(\varphi - c)^2 y^2 - \left(\frac{2}{(n+3)(n+1)} \varphi^{n+3} - \frac{2c}{(n+2)(n+1)} \varphi^{n+2} + \frac{2}{3} (b-c)\varphi^3 + (g+c(c-b))\varphi^2 - 2gc\varphi \right) = h \quad (35)$$

所以两个系统除了奇直线 $\varphi = c$ 之外有相同的拓扑相图。因此我们可以通过研究系统(34)的相图达到研究系统(32)的相图的目的。

令

$$\begin{aligned} H_n(\varphi, y) = & (\varphi - c)^2 y^2 - \left(\frac{2}{(n+3)(n+1)} \varphi^{n+3} - \frac{2c}{(n+2)(n+1)} \varphi^{n+2} \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} (b-c)\varphi^3 + (g+c(c-b))\varphi^2 - 2gc\varphi \right) \end{aligned} \quad (36)$$

则有

$$h = H_n(\varphi, y) \quad (37)$$

4. 分支曲线

令

$$f(\varphi) = g + (b-c)\varphi + \frac{1}{n+1}\varphi^{n+1} \quad (38)$$

$$f_0(\varphi) = (b-c)\varphi + \frac{1}{n+1}\varphi^{n+1} \quad (39)$$

则

$$f(\varphi) = g + f_0(\varphi) \quad (40)$$

系统(34)变为

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = (\varphi - c)y \\ \frac{dy}{d\tau} = f(\varphi) - y^2 \end{cases} \quad (41)$$

显然, 系统(41)的奇点都在 φ 轴或直线 $\varphi = c$ 上。由(40)可得

$$f'_0(\varphi) = (b-c) + \varphi^n \quad (42)$$

当 $n = 2m+1$ 时, $f'_0(\varphi)$ 有一个零点

$$\varphi_n^0 = (c-b)^{\frac{1}{n}} \quad (43)$$

为 $f(\varphi)$ 的极小值点。

当 $n = 2m$ 时, $f'_0(\varphi)$ 有两个零点 $\pm\varphi_n^0$, 其中 $-\varphi_n^0$ 为 $f(\varphi)$ 的极大值点, φ_n^0 为 $f(\varphi)$ 的极小值点。

令

$$g_n^a(c) = -f_0(\varphi_n^0) = \frac{n}{n+1}(c-b)^{\frac{n+1}{n}} \quad (44)$$

$$g_n^b(c) = -f_0(c) = (c-b)c - \frac{1}{n+1}c^{n+1} \quad (45)$$

再定义 $g = g_n^d(c)$ 分支曲线, 满足在这条分支曲线上有三个鞍点相连。曲线表达式可由下面方程组解出

$$\begin{cases} H_n(\varphi, 0) = H_n(c, \sqrt{f(c)}) \\ f(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (46)$$

接下来研究在 c - g 平面上, 系统(41)的分支相图。

5. 当 $n = 2$ 时的分支相图

$$c_3 = 2(1 + \sqrt{1-b}) \quad (47)$$

$$c_4 = 2(1 - \sqrt{1-b}) \quad (48)$$

$$g_2^a(c) = \frac{2}{3}(c-b)^{\frac{3}{2}} \quad (49)$$

$$g_2^b(c) = -\frac{1}{3}c^3 + c^2 - cb \quad (50)$$

$$\begin{aligned} g_2^d(c) = & -\frac{1}{6}bc + \frac{1}{6}c^2 - \frac{1}{48}c^3 \\ & + \frac{\sqrt{15}}{432}\sqrt{16c-16b-c^2}(16c-16b-c^2) \end{aligned} \quad (51)$$

c_0 由式子(6)给出, c_1 由式子(7)给出, c_2 由式子(8)给出。具体情况如下:

1) 当 $b < 0$ 时, $g_2^a(c)$, $g_2^b(c)$, $g_2^d(c)$ 三支曲线交于 c_1 , $-g_2^a(c)$ 与 $g_2^b(c)$ 交于 c_3 , $-g_2^a(c)$ 与 $g_2^d(c)$ 交于 c_0 。

2) 当 $b = 0$ 时, $g_2^a(c)$, $g_2^b(c)$, $g_2^d(c)$ 三支曲线交于 c_1 , $-g_2^a(c)$ 与 $g_2^b(c)$ 交于 c_3 , $-g_2^a(c)$ 与 $g_2^d(c)$ 交于 c_0 。

3) 当 $0 < b < \frac{1}{4}$ 时, $g_2^a(c)$, $g_2^b(c)$, $g_2^d(c)$ 三支曲线交于 c_1 , c_2 , $-g_2^a(c)$ 与 $g_2^b(c)$ 交于 c_3 , $-g_2^a(c)$ 与 $g_2^d(c)$ 交于 c_0 。

4) 当 $b = \frac{1}{4}$ 时, $g_2^a(c)$, $g_2^b(c)$, $g_2^d(c)$ 三支曲线交于 c_1 , $-g_2^a(c)$ 与 $g_2^b(c)$ 交于 c_3 , c_4 , $-g_2^a(c)$ 与 $g_2^d(c)$ 交于 c_0 。

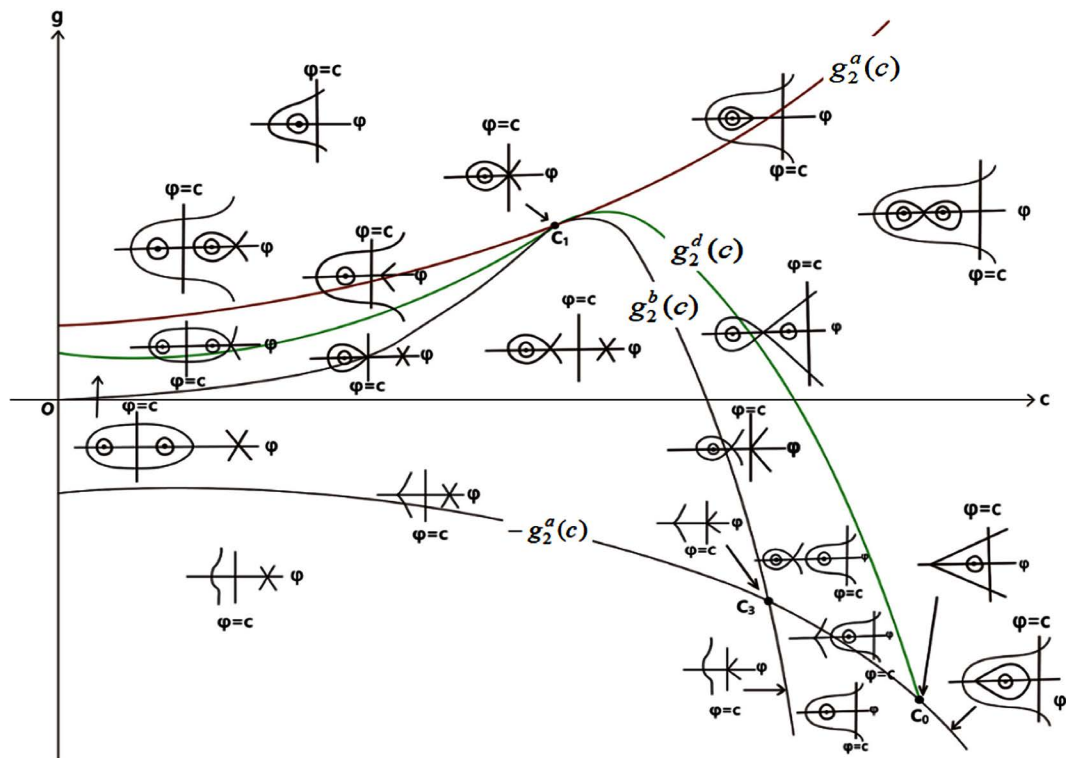


Figure 1. Bifurcation phase portrait of system (41) when $n = 2, b < 0$

图 1. 当 $n = 2, b < 0$ 时, 系统(41)的分支相图

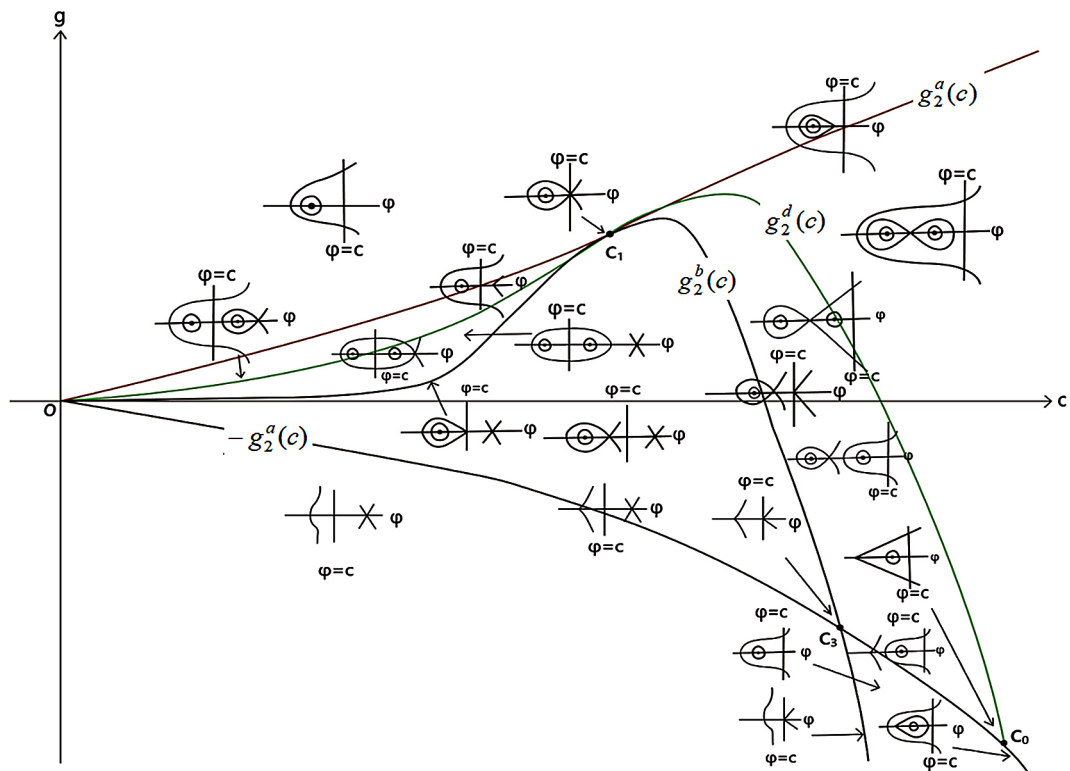


Figure 2. Bifurcation phase portrait of system (41) when $n = 2, b = 0$

图 2. 当 $n = 2, b = 0$ 时, 系统(41)的分支相图

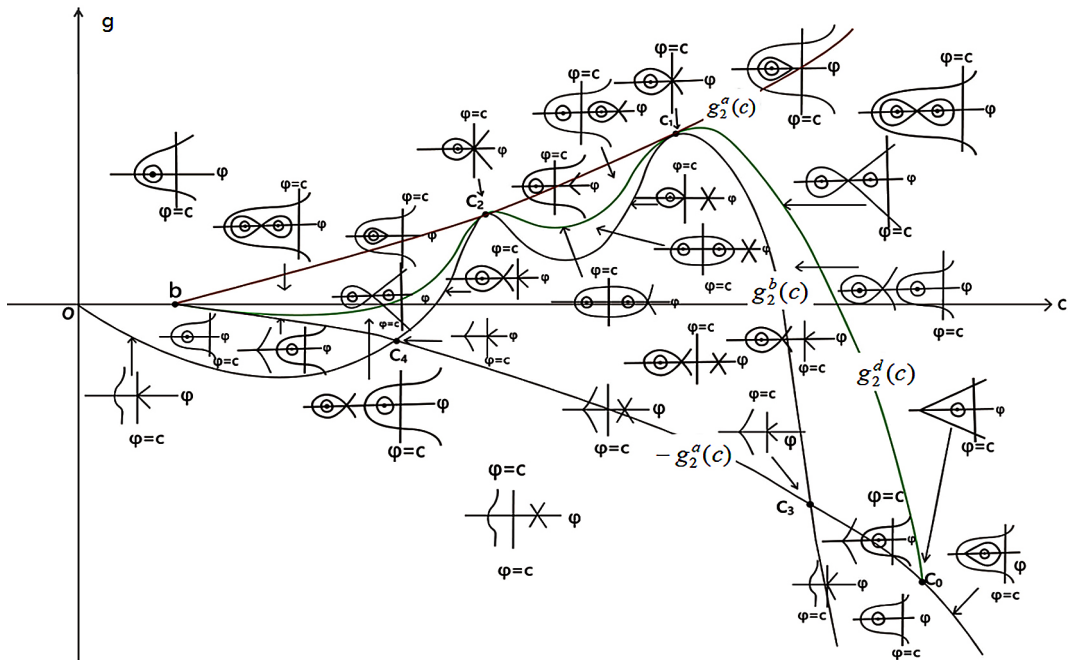


Figure 3. Bifurcation phase portrait of system (41) when $n = 2$, $0 < b < \frac{1}{4}$

图 3. 当 $n = 2$, $0 < b < \frac{1}{4}$ 时, 系统(41)的分支相图

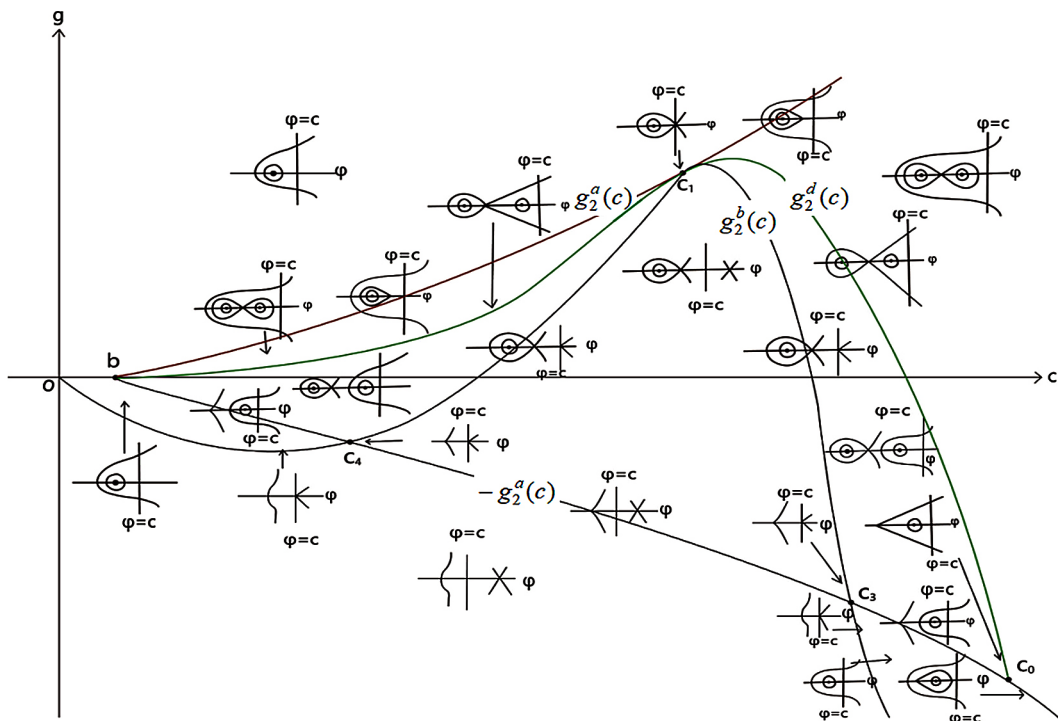


Figure 4. Bifurcation phase portrait of system (41) when $n = 2$, $b = \frac{1}{4}$

图 4. 当 $n = 2$, $b = \frac{1}{4}$ 时, 系统(41)的分支相图

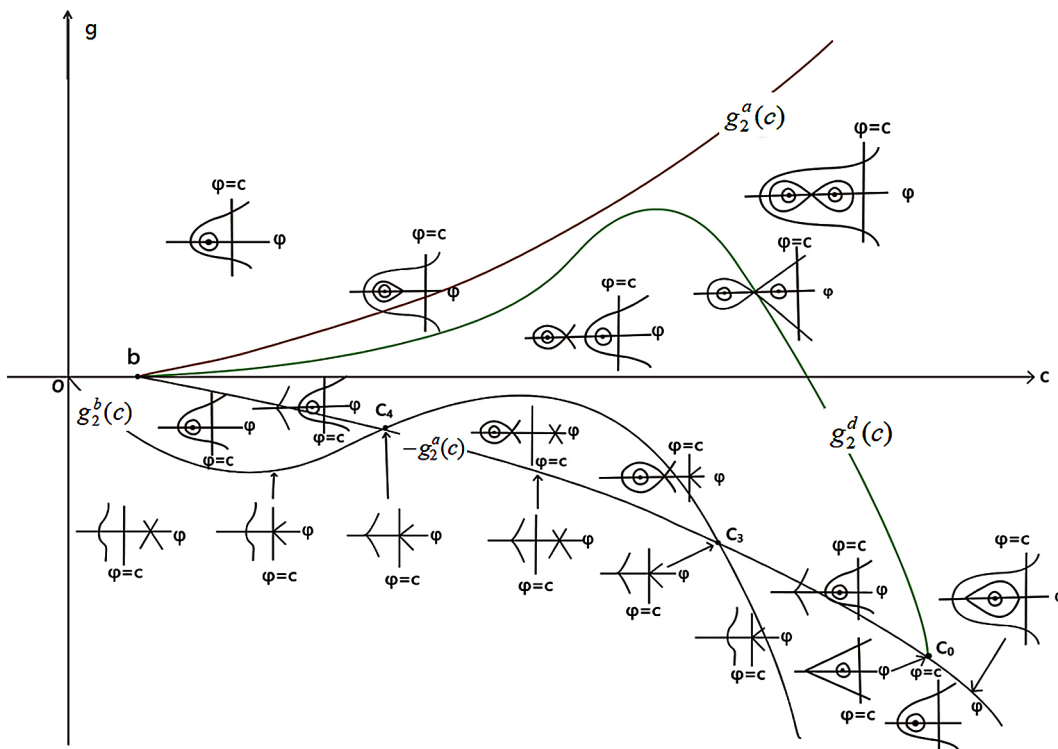


Figure 5. Bifurcation phase portrait of system (41) when $n = 2$, $\frac{1}{4} < b < 1$

图 5. 当 $n = 2$, $\frac{1}{4} < b < 1$ 时, 系统(41)的分支相图

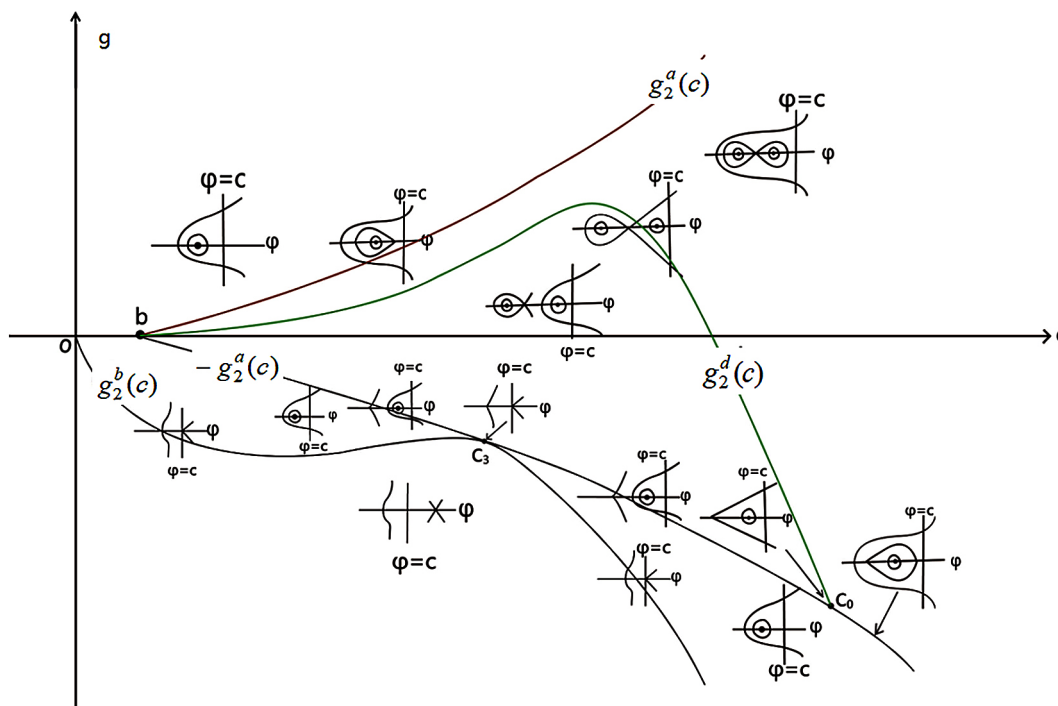


Figure 6. Bifurcation phase portrait of system (41) when $n = 2$, $b = 1$

图 6. 当 $n = 2$, $b = 1$ 时, 系统(41)的分支相图

- 5) 当 $\frac{1}{4} < b < 1$ 时, $g_2^a(c)$, $g_2^b(c)$, $g_2^d(c)$ 无交点, $-g_2^a(c)$ 与 $g_2^b(c)$ 交于 c_3, c_4 , $-g_2^a(c)$ 与 $g_2^d(c)$ 交于 c_0 。
- 6) 当 $b=1$ 时, $g_2^a(c)$, $g_2^b(c)$, $g_2^d(c)$ 无交点, $-g_2^a(c)$ 与 $g_2^b(c)$ 交于 c_3 , $-g_2^a(c)$ 与 $g_2^d(c)$ 交于 c_0 。
- 7) 当 $b > 1$ 时, $g_2^a(c)$, $g_2^b(c)$, $g_2^d(c)$ 无交点, $-g_2^a(c)$ 与 $g_2^b(c)$ 无交点, $-g_2^a(c)$ 与 $g_2^d(c)$ 交于 c_0 。

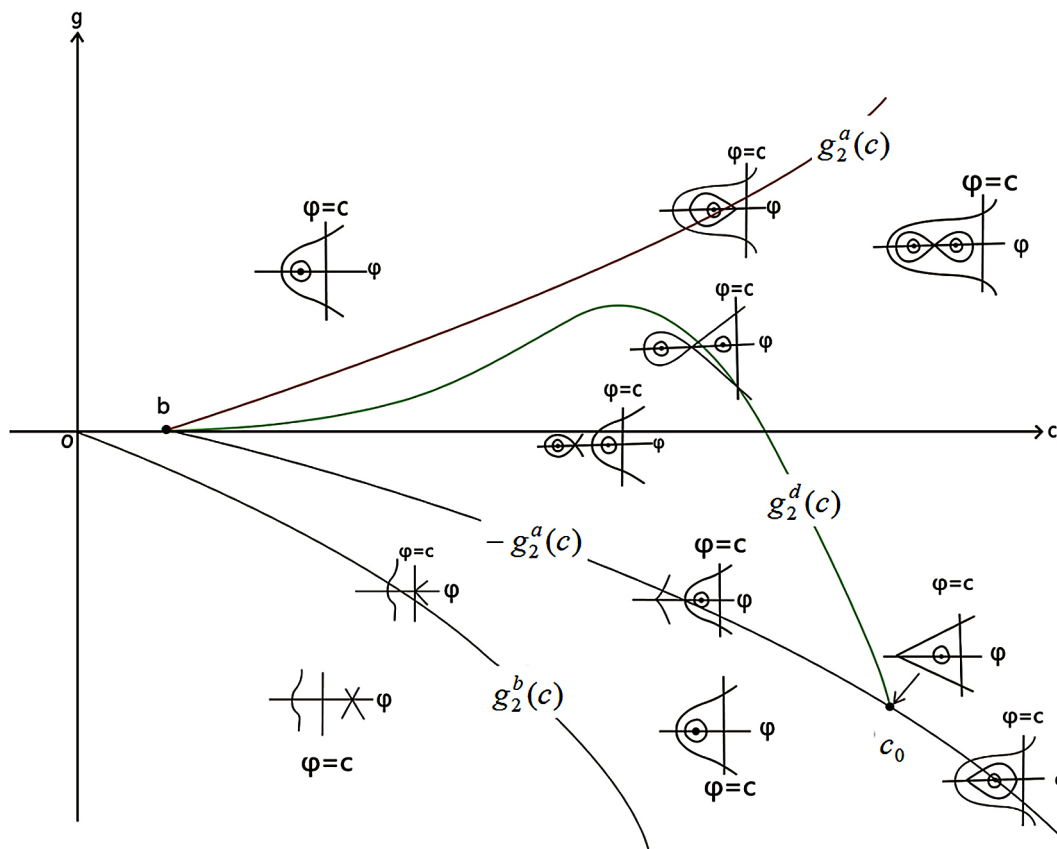


Figure 7. Bifurcation phase portrait of system (41) when $n = 2, b > 1$
 图 7. 当 $n = 2, b > 1$ 时, 系统(41)的分支相图

6. 当 $n = 3$ 时的分支相图

$$g_3^a(c) = \frac{3}{4}(c-b)^{\frac{4}{3}} \tag{52}$$

$$g_3^b(c) = -\frac{1}{4}c^4 + c^2 - cb \tag{53}$$

$$g_3^d(c) = \frac{1}{40} \left(-12bc + 12c^2 - \frac{63}{125}c^4 - \frac{q}{13500}c + \frac{2916}{125}lc^7 - \frac{243}{125}l^{\frac{2}{3}}c^6 + 36bl^{\frac{1}{3}}c^3 + \frac{126}{125}l^{\frac{1}{3}}c^5 + \frac{2}{3}(c-b)l^{\frac{1}{3}} - \frac{7}{375}\left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{1}{3}}c^3 - \frac{1}{1500}\left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{2}{3}}c^2 \right) \tag{54}$$

其中 p, q, l 分别由式子(21), (22), (24)给出, 图中点 c_3^1, c_3^2 为 $g_3^a(c)$, $g_3^b(c)$ 和 $g_3^d(c)$ 三支曲线的交点, 由方程(27)决定。具体情况如下:

1) 当 $b < 0$ 时, $g_3^a(c)$, $g_3^b(c)$ 和 $g_3^d(c)$ 交于 c_3^2 。

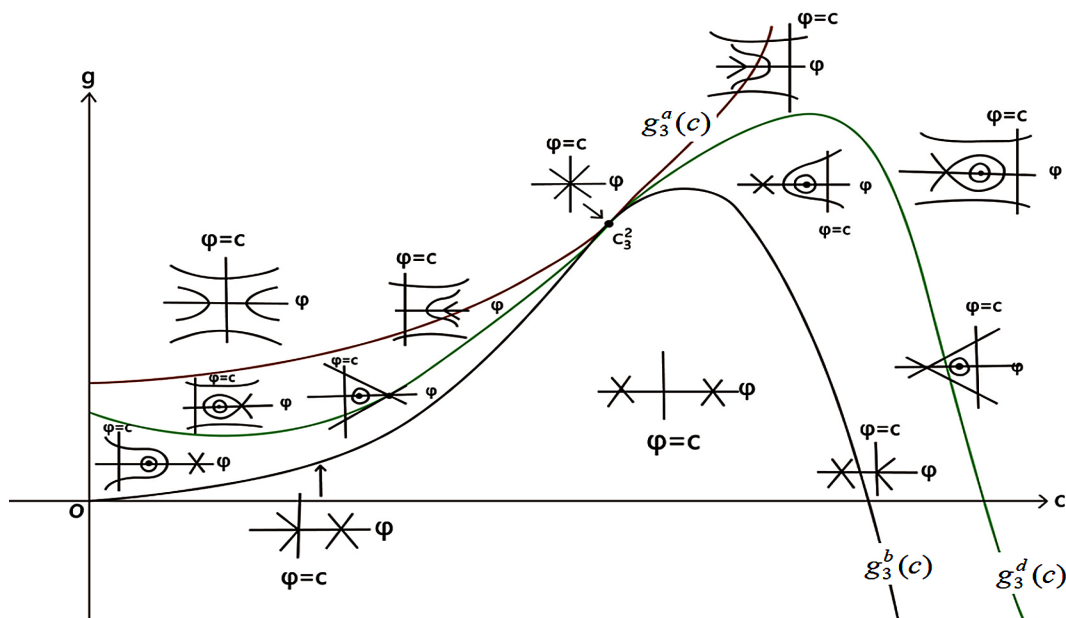


Figure 8. Bifurcation phase portrait of system (41) when $n = 3, b < 0$

图 8. 当 $n = 3, b < 0$ 时, 系统(41)的分支相图

2) 当 $b = 0$ 时, $g_3^a(c)$, $g_3^b(c)$ 和 $g_3^d(c)$ 交于 c_3^2 。

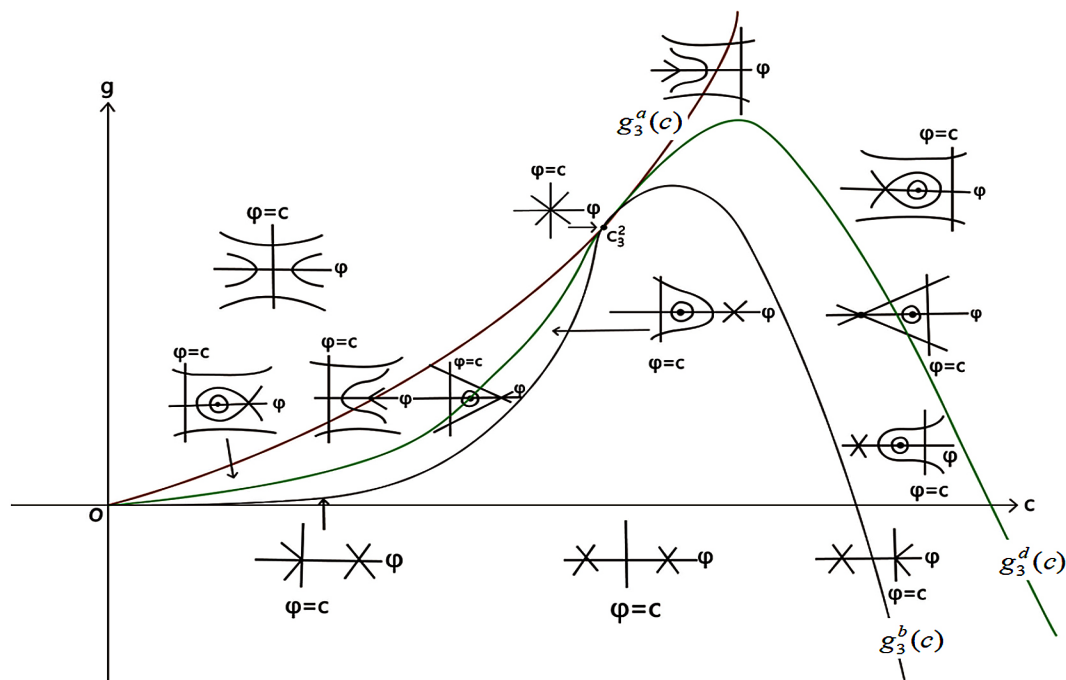


Figure 9. Bifurcation phase portrait of system (41) when $n = 3, b = 0$

图 9. 当 $n = 3, b = 0$ 时, 系统(41)的分支相图

3) 当 $0 < b < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 时, $g_3^a(c)$, $g_3^b(c)$ 和 $g_3^d(c)$ 交于 c_3^1, c_3^2 。

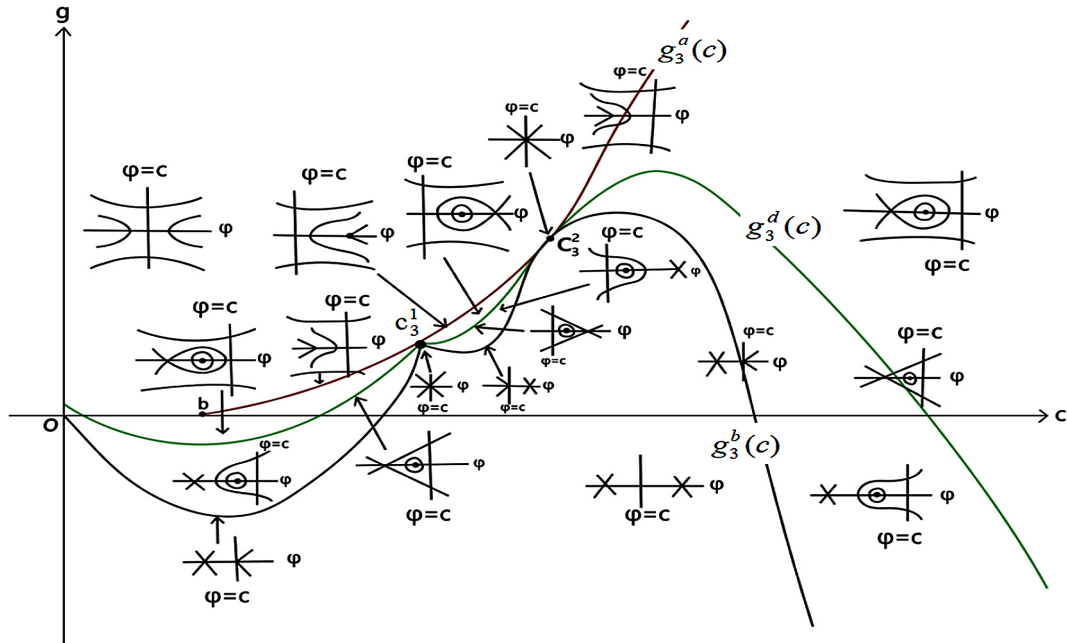


Figure 10. Bifurcation phase portrait of system (41) when $n = 3$, $0 < b < \frac{2}{3\sqrt{3}}$

图 10. 当 $n = 3$, $0 < b < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 时, 系统(41)的分支相图

4) 当 $b = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 时, $g_3^a(c)$, $g_3^b(c)$ 和 $g_3^d(c)$ 交于 c_3^1 。

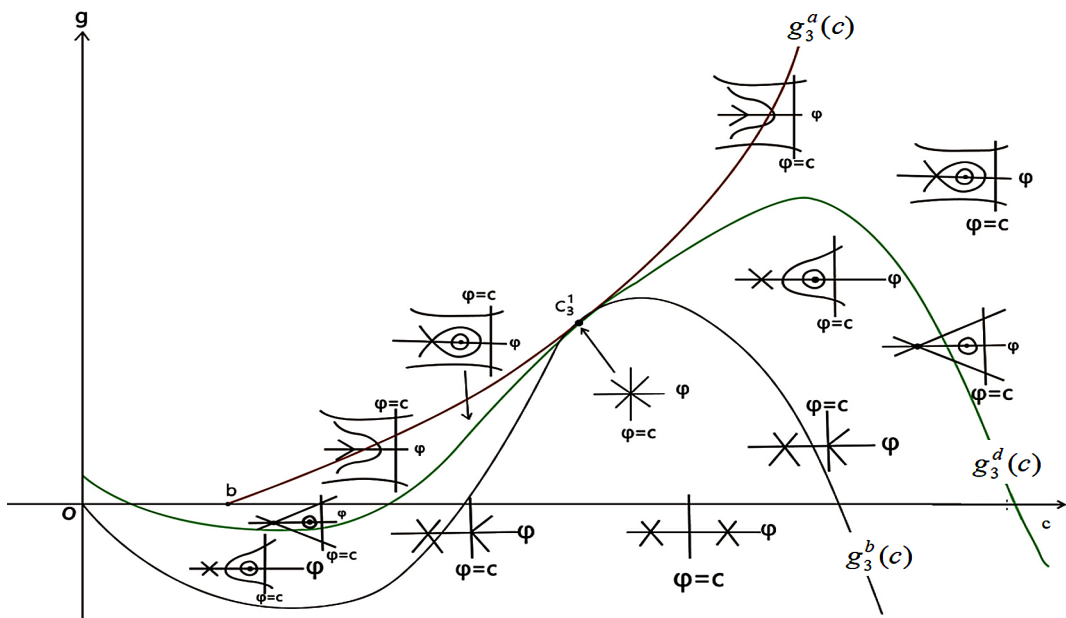


Figure 11. Bifurcation phase portrait of system (41) when $n = 3$, $b = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

图 11. 当 $n = 3$, $b = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 时, 系统(41)的分支相图

5) 当 $b > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 时, $g_3^a(c)$, $g_3^b(c)$ 和 $g_3^d(c)$ 无交点。

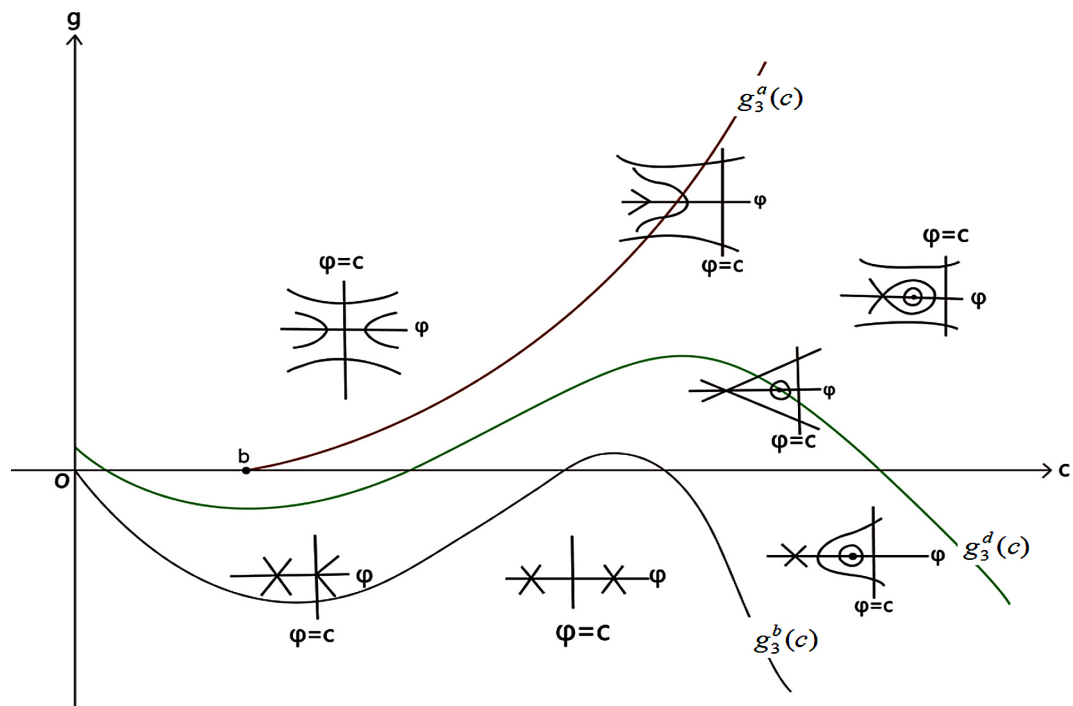


Figure 12. Bifurcation phase portrait of system (41) when $n=3$, $b > \frac{2}{3\sqrt{3}}$

图 12. 当 $n=3$, $b > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 时, 系统(41)的分支相图

7. 解的具体推导

1) 当 $n=2$, $g = g_2^d(c)$ 时, 系统(41)的分支相图(见图 1~7), 三个鞍点相连的相图中奇直线 $\varphi = c$ 右侧的轨道有如下表达式

$$y^2 = \frac{2}{15} \left(\varphi - k + \frac{1}{4}c \right)^2 \left(\varphi + 2k + \frac{1}{4}c \right), \quad c < \varphi < +\infty, \text{ 且 } 0 < c < c_0, c \neq c_1, c_2 \quad (55)$$

其中 c_0 , c_1 , c_2 , k 分别由式子(6), (7), (8), (9)给出。

将(31)带入(55)并沿着该轨道积分, 得到

$$\int_{\varphi}^{+\infty} \frac{ds}{\left(s - k + \frac{1}{4}c \right) \sqrt{s + 2k + \frac{1}{4}c}} = \sqrt{\frac{2}{15}} |\xi| \quad (56)$$

求解方程(56)得到非线性波解 $u_1(x, t)$ 由式子(12)给出。

2) 当 $n=2$, $g = g_2^d(c)$ 时, 系统(41)的分支相图(见图 1~7)中连接三个鞍点的轨道有如下表达式

$$y^2 = \frac{2}{15} \left(\varphi - k + \frac{1}{4}c \right)^2 \left(\varphi + 2k + \frac{1}{4}c \right), \quad -\frac{1}{4}c + k < \varphi < c, \text{ 且 } 0 < c < c_0, c \neq c_1, c_2 \quad (57)$$

其中 c_0 , c_1 , c_2 , k 分别由式子(6), (7), (8), (9)给出。

将(31)代入(57)并沿着该轨道积分, 得到

$$\int_{\varphi}^c \frac{ds}{\left(s-k+\frac{1}{4}c\right)\sqrt{s+2k+\frac{1}{4}c}} = \sqrt{\frac{2}{15}}|\xi| \quad (58)$$

求解方程(58)得到非线性波解 $u_2(x, t)$ 由式子(13)给出。

3) 当 $n=2$ 时, $g = g_2^d(c)$, 系统(41)的分支相图(见图 1~7)中三个鞍点左侧的同宿轨有如下表达式

$$y^2 = \frac{2}{15} \left(\varphi - k + \frac{1}{4}c\right)^2 \left(\varphi + 2k + \frac{1}{4}c\right), \quad -\frac{1}{4}c - 2k < \varphi < -\frac{1}{4}c + k, \text{ 且 } 0 < c < c_0, c \neq c_1, c_2 \quad (59)$$

其中 c_0, c_1, c_2, k 分别由式子(6), (7), (8), (9)给出。

将(31)代入(59)并沿着该轨道积分, 得到

$$\int_{\varphi}^{-2k-\frac{1}{4}c} \frac{ds}{\left(s-k+\frac{1}{4}c\right)\sqrt{s+2k+\frac{1}{4}c}} = \sqrt{\frac{2}{15}}|\xi| \quad (60)$$

求解方程(60)得到非线性波解 $u_3(x, t)$ 由式子(14)给出。

4) 当 $n=2$, $g = g_2^d(c_0)$ 时, 系统(41)的分支相图(见图 1~7)中连接三个奇点的轨道有如下表达式

$$y^2 = \frac{2}{15} \left(\varphi + \frac{1}{4}c\right)^3, \quad -\frac{1}{4}c < \varphi < c, c = c_0 \quad (61)$$

其中 c_0 由式子(6)给出。

将(31)代入(61)并沿着该轨道积分, 得到

$$\int_{\varphi}^c \frac{ds}{\left(s+\frac{1}{4}c\right)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{15}}|\xi| \quad (62)$$

求解方程(62)得到非线性波解 $u_4(x, t)$ 由式子(15)给出。

5) 当 $n=3$, $g = g_3^d(c)$ 时, 系统(41)的分支相图(见图 8~12)中连接三个鞍点的轨道有如下表达式

$$y^2 = \frac{1}{12}(\varphi - \gamma)^2(\varphi^2 + e\varphi + f), \quad \gamma < \varphi < c, \text{ 且 } 0 < c < +\infty, c \neq c_3^1, c_3^2 \quad (63)$$

其中 f, γ, e 分别由式子(19), (20), (23)给出, c_3^1, c_3^2 由方程(27)决定。

将(31)代入(63)并沿着该轨道积分, 得到

$$\int_{\varphi}^c \frac{ds}{(s-\gamma)\sqrt{s^2+es+f}} = \sqrt{\frac{1}{12}}|\xi| \quad (64)$$

求解方程(64)得到非线性波解 $u_5(x, t)$ 由式子(26)给出。

基金项目

广东省基础与应用基础研究基金资助(项目编号: 2019B151502062)。

参考文献

- [1] Liu, Z.R. and Qian, T.F. (2001) Peakons and Their Bifurcation in a Generalized Camassa-Holm Equation. *Internation-*

-
- al Journal of Bifurcation and Chaos*, **11**, 781-792. <https://doi.org/10.1142/S0218127401002420>
- [2] Song, M., Ahmed, B., Zerrad, E. and Biswas, A. (2013) Domain Wall and Bifurcation Analysis of the Klein-Gordon Zakharov Equation in (1+2)-Dimensions with Power Law Nonlinearity. *Chaos*, **23**, Article ID: 033115. <https://doi.org/10.1063/1.4816346>
- [3] Pan, C.H., Ling, L.M. and Liu, Z.R. (2014) A New Integrable Equation with Cuspons and Periodic Cuspons. *Physica Scripta*, **89**, Article ID: 105207. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/89/10/105207>
- [4] Pan, C.H. and Liu, Z.R. (2015) Infinitely Many Solitary Waves of an Integrable Equation with Singularity. *Nonlinear Dynamics*, **83**, 1-7. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2420-7>
- [5] Whitham, G.B. (1967) Variational Methods and Applications to Water Wave. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, **299**, 6-25. <https://doi.org/10.1098/rspa.1967.0119>
- [6] Ivanov, R. (2005) On the Integrability of a Class of Nonlinear Dispersive Wave Equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **1294**, 462-468. <https://doi.org/10.2991/jnmp.2005.12.4.2>
- [7] Fornberg, B. and Whitham, G.B. (1978) A Numerical and Theoretical Study of Certain Nonlinearwave Phenomena. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, **289**, 373-404. <https://doi.org/10.1098/rsta.1978.0064>
- [8] Camassa, R. and Holm, D.D. (1993) An Integrable Shallow Water Equation with Peaked Solitons. *Physical Review Letters*, **71**, 1661-1664. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.1661>
- [9] He, B., Meng, Q. and Li, S. (2010) Explicit Peakon and Solitary Wave Solutions for the Modified Fornberg-Whitham Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 1976-1982. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.06.055>
- [10] Liu, Z. and Liang, Y. (2011) The explicit Nonlinear Wave Solutions and Their Bifurcations of the Generalized Camassa-Holm equation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **21**, 3119-3136. <https://doi.org/10.1142/S0218127411030556>
- [11] Fan, X., Yang, S., Yin, J., *et al.* (2010) Bifurcations of Traveling Wave Solutions for a Two-Component Fornberg-Whitham Equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**, 3956-3963. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.02.010>
- [12] Jiang, B. and Bi, Q. (2010) Smooth and Non-Smooth Traveling Wave Solutions of the Fornberg-Whitham Equation with Linear Dispersion Term. *Applied Mathematics and Computation*, **216**, 2155-2162. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.03.050>