Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(9), 1645-1651
Published Online September 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.99191

Cahn-Hilliard-Oono方程在三维空间中的适定性

段　芳，蒲志林，黄　梅

四川师范大学数学科学学院，四川 成都
Email: dfyouxiang@163.com, puzhilinscnu@163.com, 1129733562@qq.com

收稿日期：2020年9月1日；录用日期：2020年9月19日；发布日期：2020年9月27日

摘　要

考虑Cahn-Hilliard-Oono方程在三维空间中的柯西问题。通过对经典方程添加βu项($\beta > 0$)，更好的分析系统的长程相互作用，首先证明了方程在$H^1\left(R^3\right)$上是局部可解的，进一步得到解的整体适定性和解半群的耗散性。

关键词

Cahn-Hilliard方程，无界区域，整体适定性

Well-Posedness of the Cahn-Hilliard-Oono Equation in Three-Dimensional Space

Fang Duan, Zhilin Pu, Mei Huang

College of Mathematical Sciences, Sichuan Normal University, Chengdu Sichuan
Email: dfyouxiang@163.com, puzhilinscnu@163.com, 1129733562@qq.com

Received: Sep. 1st, 2020; accepted: Sep. 19th, 2020; published: Sep. 27th, 2020

Abstract

The Cauchy problem of Cahn-Hilliard-Oono in three-dimensional space is considered. By adding a term βu to the classical equation, we can better analyze the long-range interaction of the system. Firstly, it is proved that the equation is locally solvable on $H^1\left(R^3\right)$, and then the global well posedness of the solution and the dissipation of the semigroup are obtained.

文章引用：段芳，蒲志林，黄梅．Cahn-Hilliard-Oono 方程在三维空间中的适定性[J]．应用数学进展，2020，9(9): 1645-1651. DOI: 10.12677/aam.2020.99191

Keywords

Cahn-Hilliard Equation, Unbounded Domains, Global Well-Posedness

1. 引言

我们将研究以下方程在 R^3 上的整体适定性：

$$\begin{cases} u_t + \beta u = (-\Delta + \varepsilon I)(\Delta u - f(u)) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in R^3, \beta \ge 0, t > 0, \varepsilon > 0$ 充分小。后面再给出关于 f 的假设。

当 β 和 ε 都为零时，(1)为经典 Cahn-Hilliard 方程[1] (简称 CH 方程)。特别的，当 $\beta > 0$ ， $\varepsilon = 0$ 时，我们称(1)为 Cahn-Hilliard-Oono 方程(简称 CHO 方程)，用于描述二元合金诱导反应中超导体的生成。通过引入耗散项，可以简化方程动力行为分析的复杂度。短程作用使系统同质化，另一方面长程作用阻碍了系统形成过大的结构，这种竞争形成了 I 型超导体(参见[2]和[3])。

对 CH 方程的研究结果很多，Cholewa 和 Dlotko [4]证明方程在 $\mathcal{H} = \left[H^2(\Omega)\right]^m$ 上有耗散半群，同时在其子集上存在全局吸引子。Elliott 和郑[5]研究了方程局部解的存在性问题。Cholewa 和 Rodriguezbernal [6]在全空间 H^1 上找到全局吸引子。还有关于 CH 方程及其变形的研究[7] [8] [9]。

然而对 CHO 方程的研究相对较少，Miranville [10]对 CHO 方程的初边值问题进行了研究，并讨论了在有限维中其吸引子的渐进行为。Giorgini，Grasselli 和 Miranville [11]研究了 CHO 方程在 Neumann 边界上的情况，证明了方程在二维和三维空间中全局吸引子的存在性。Porta 和 Grasselli [12]引入自由能函数，得到了 CHO 方程在无通量边界条件下的适定性，以及有界吸收集和全局吸引子的存在性。然而在无界区域上的研究很少，Savostianov 和 Zelik [13]证明了在三维全空间中，双曲形式 CHO 方程的能量空间是耗散的，以及方程存在光滑的全局吸引子。

我们对 CHO 方程进行小范围扰动，使得 $(-\Delta + \varepsilon I)$ 成为可逆算子，利用 Cholewa 和 Dlotko [14]的扇算子理论，讨论 CHO 方程的柯西问题。

本文假设：f 是 $2p-1$ 次多项式， $a_{2p-1} > 0$ 为其首项系数：

$$f(u) = \sum_{i=1}^{2p-1} a_i u^i, \quad p \in \mathbb{N} \tag{2}$$

其中 $F' = f$ ， b_{2p} 为 F 首项系数，有 $a_{2p-1} = 2pb_{2p}$ ， $p \in [2,6)$ 且 $p \ne 3$ ， $f(u)u \ge 0$ 。

现给出两个主要结果：

定理 1. 在满足本文假设条件下，方程(1)在 $H^1(R^3)$ 中有局部解，即任取初值 $u_0 \in H^1(R^3)$ ，$t \in (0,\tau_0)$ ，都存在唯一的解 $u(t) \in H^1(R^3)$ ， 同时满足：

$$u(t) \in \mathcal{C}\left([0,\tau_0), H^1\right) \cap \mathcal{C}\left((0,\tau_0), D\left(-\Delta^2 + \varepsilon I\right)\right)$$

$$u_t \in \mathcal{C}\left((0,\tau_0), H^{\kappa}\right)$$

其中 $\kappa \in [0,1)$ 。

定理 2. 在满足定理 1 的条件下，方程(1)在 $H^1(R^3)$ 中全局可解，任取 $u_0 \in H^1(R^3)$，都存在唯一的解 $u(t)$，定义与方程(1)对应的半群 $\{T(t)\}$：

$$T(t)u_0 = u(t),\ t \in [0,+\infty)$$

本文在第二章利用扇形算子理论证明了方程(1)在 H^1 中有局部解，第三章先给出能量泛函和 H^1 上的先验估计，再证明了方程的整体适定性以及解半群的耗散性。

我们将 $\|u\|_{H^q(\mathbb{R}^3)}$ 简记为 $\|u\|_{H^q}$ $(q>1)$，文中的常数 C 值，按具体需要取值。

2. 预备知识和解的存在性

X_1 为 Banach 空间，A 是扇形算子，且 $Re(\delta(A))>0$，算子 $A^{-\alpha}: X_1 \to X_1$，若满足：

$$A^{-\alpha}v = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-At}v\mathrm{d}t,\ \alpha \in (0,+\infty)$$

则称 $A^{-\alpha}$ 为分数幂算子[14]。

回顾柯西问题：

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = F_1(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3}$$

在 X_1^α 中，对于任意取定的 $\alpha \in [0,1)$，存在非增函数 $L:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$，使得 F_1 为局部 Lipschitz 连续的。

定义 1. 设 X_1 是 Banach 空间，$A: D(A) \to X_1$ 是 X_1 中的扇形正算子，$F_1: X_1^\alpha \to X_1$ 是局部 Lipschitz 连续的，$u_0 \in X_1^\alpha$，对任意时刻 $t \in (0,\tau)$，方程(3)都成立，同时有：$u \in \mathcal{C}^1((0,\tau), X_1) \cap \mathcal{C}((0,\tau), D(A))$，则称 u 是局部 X_1^α 解，更进一步，若 τ 趋于正无穷，则是全局解。

定理 3. [14]在定义 1 的条件下，若方程(3)在 X_1^α 上局部可解，同时 F_1 满足次线性增长条件：

$$\|F_1(u)\|_{X_1} \le C\left(1 + \|u\|_{X_1^\alpha}\right),\ u \in X_1^\alpha$$

则方程(3)在 X_1^α 上是全局可解的，且可定义解半群：

$$S(t)u_0 = u(t,u_0),\ t \ge 0.$$

下面给出定理 1 的证明，由假设条件易得，对任意 $u \in \mathbb{R}$：

$$\begin{aligned} &|f(u)| \le C + C|u|^{2p-1} \\ &|f'(u)| \le C + C|u|^{2p-2} \end{aligned} \tag{4}$$

同理有：

$$pb_{2p}u^{2p} - C \le f(u)u \tag{5}$$

$$b_{2p}u^{2p} - C \le 2F(u) \le 3b_{2p}u^{2p} + C \tag{6}$$

我们希望相空间等价于 H^1，记 $X = H^{\sigma-3}$，$X^\alpha = H^1$ （$\alpha = \frac{4-\sigma}{4}$，$0<\sigma \ll 1$），从而 $(-\Delta)^2 + \varepsilon I$ 是 X 中的扇形正算子，方程(1)变成以下形式：

$$\begin{cases} u_t + \beta u = (-\Delta^2 + \varepsilon\Delta)u - (-\Delta + \varepsilon I)f(u) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{7}$$

由局部解定义可知，还需验证非线性项$(\Delta-\varepsilon I)f(u)-\beta u$在$X^\alpha$上的局部 Lipschitz 连续性。任取有界集$B\subset H^1$，同时取$\phi,\psi\in B$，因算子$(\Delta-\varepsilon I):L^2\to X$是线性同构的，可以推出：

$$\begin{aligned}&\left\|(\Delta-\varepsilon I)f(\phi)-\beta\phi-(\Delta-\varepsilon I)f(\psi)+\beta\psi\right\|_{H^{\sigma-3}}\\&\le\left\|(\Delta-\varepsilon I)\left(f(\phi)-f(\psi)\right)\right\|_{H^{\sigma-3}}+\beta\left\|\phi-\psi\right\|_{H^{\sigma-3}}\\&\le C\left\|\left(f(\phi)-f(\psi)\right)\right\|_{L^2}+C\beta\left\|\phi-\psi\right\|_{L^2}\end{aligned}\tag{8}$$

对不等号右边进行估计，存在常数λ：

$$f(\phi)-f(\psi)=(\phi-\psi)f'\left(\lambda\phi+(1-\lambda)\psi\right),(0<\lambda<1)$$

容易看到：

$$\left\|1+\left[\lambda\phi+(1-\lambda)\psi\right]^{2p-2}\right\|_{L^2}\le1+C\left\|\lambda\phi\right\|_{L^2}^{2p-2}+C\left\|(1-\lambda)\psi\right\|_{L^2}^{2p-2}\le C$$

再利用 Hölder 不等式：

$$\begin{aligned}&\left\|(\Delta-\varepsilon I)f(\phi)-\beta\phi-(\Delta-\varepsilon I)f(\psi)+\beta\psi\right\|_{H^{\sigma-3}}\\&\le C\left\|\phi-\psi\right\|_{L^2}\left\|f'\left(\lambda\phi+(1-\lambda)\psi\right)\right\|_{L^2}+C\beta\left\|\phi-\psi\right\|_{L^2}\\&\le C\left\|\phi-\psi\right\|_{L^2}\left\|1+\left[\lambda\phi+(1-\lambda)\psi\right]^{2p-2}\right\|_{L^2}+C\beta\left\|\phi-\psi\right\|_{L^2}\\&\le C_B\left\|\phi-\psi\right\|_{H^1}\end{aligned}\tag{9}$$

其中$H^1\subset L^p\left(p\in[2,6)\right)$。

由以上结果，定理 1 证明完毕，同时可以得到柯西积分法则：

$$u(t)=\mathrm{e}^{-\left(-\Delta^2+\varepsilon\Delta\right)t}u_0+\int_0^t\mathrm{e}^{-\left(-\Delta^2+\varepsilon\Delta\right)(t-s)}\left[(\Delta-\varepsilon I)f(u)-\beta u\right]\mathrm{d}s,\ t\in(0,\tau_0)$$

3. 整体适定性

以下我们得到解的能量估计，先给出能量泛函：

$$\Phi\left(u(x,t)\right)=\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}F(u)\mathrm{d}x\tag{10}$$

定理 4. 在本文假设条件下，方程(1)在其存在区间上的解满足：

$$u\in\mathcal{C}\left([0,\tau_0);H^1\right)\cap L^2\left([0,\tau_0);H^2\right)$$

证：对(10)求导，由本文假设条件可知：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}&=\int_{\mathbb{R}^3}\left[f(u)u_t+\nabla u\cdot\nabla u_t\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^3}\left(-\Delta u+f(u)\right)u_t\mathrm{d}x\\&=-\int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta+\varepsilon I)\left[\Delta u-f(u)\right]^2\mathrm{d}x-\beta\int_{\mathbb{R}^3}\left(f(u)-\Delta u\right)u\mathrm{d}x\\&=-\left\|\nabla\left(\Delta u-f(u)\right)\right\|_{L^2}^2-\varepsilon\left\|\Delta u-f(u)\right\|_{L^2}^2-\beta\int_{\mathbb{R}^3}f(u)u\mathrm{d}x-\beta\|\nabla u\|_{L^2}^2\\&\le0\end{aligned}$$

容易得到：

$$\Phi(0)\ge\Phi(t)=\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}F(u)\mathrm{d}x\tag{11}$$

由(6)，(10)可改写为：

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2+\int_{\mathbb{R}^3}\left(b_{2p}u^{2p}-C\right)\mathrm{d}x\le\|\nabla u\|_{L^2}^2+2\int_{\mathbb{R}^3}F(u)\mathrm{d}x\le C(u_0) \tag{12}$$

我们得到：

$$u\in\mathcal{C}\left(\left[0,\tau_0\right);H^1\right)$$

将(1)与 u 作内积，可以推出：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2}^2=-\|\Delta u\|_{L^2}^2-\varepsilon\|\nabla u\|_{L^2}^2-\beta\|u\|_{L^2}^2-\int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta+\varepsilon I)f(u)u\mathrm{d}x \tag{13}$$

利用式(5)和(12)，得到上式的最后一项小于常数 $C(u_0)$。

再利用式(4)以及 Hölder 不等式：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\Delta uf(u)\mathrm{d}x&=-\int_{\mathbb{R}^3}f'(u)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\\&\le C\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+|u|^{2p-2}\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\\&\le C\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2p-2\cdot\frac{14}{2p-2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2p-2}{14}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\|\nabla u\|^{2\cdot\frac{7}{8-p}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{8-p}{7}}+C\|\nabla u\|_{L^2}^2\\&\le C\|u\|_{L^{14}}^{2p-2}\|\nabla u\|_{L^{\frac{14}{8-p}}}^2+C\|\nabla u\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{14}$$

由 G-N 不等式[16]和[17]：

$$\|u\|_{L^{14}}^{2p-2}\le C\left[\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{2}{7}}\|u\|_{L^6}^{\frac{5}{7}}\right]^{2p-2}\le C\left[\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{2}{7}}\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{5}{7}}\right]^{2p-2}$$

$$\|\nabla u\|_{L^{\frac{14}{8-p}}}^2\le C\left[\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{17-3p}{14}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3p-3}{14}}\right]^2\le C\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{17-3p}{7}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3p-3}{7}}$$

代入式(14)有：

$$\int_{\mathbb{R}^3}\Delta uf(u)\mathrm{d}x\le C\|\nabla u\|_{L^2}^{p+1}\|\Delta u\|_{L^2}^{p-1}+C(u_0)$$

由 Young 不等式：

$$\int_{\mathbb{R}^3}f(u)\Delta u\mathrm{d}x\le C\left(\|\nabla u\|_{L^2}^{p+1}\right)^{\frac{2}{3-p}}+\frac{1}{2}\left(\|\Delta u\|_{L^2}^{p-1}\right)^{\frac{2}{p-1}}+C(u_0)\le\frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2+C(u_0) \tag{15}$$

利用 Sobolev 嵌入定理和 Grönwall 不等式，得到：

$$\|u\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\Delta u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\le C(u_0,\tau_0),\ t\in[0,\tau_0) \tag{16}$$

有：

$$u\in L^2\left(\left[0,\tau_0\right);H^2\right)$$

到此定理 4 证明完毕。

容易看出，在空间 H^1 上 u 的能量估计对时间而言是一致的，我们可以把局部 H^1 解延展成为全局解。由定理 3，我们还要验证 $(\Delta-\varepsilon I)f(u)-\beta u$ 的次线性性质。类似于(9)：

$$\|(\Delta-\varepsilon I)f(u)-\beta u\|_{H^{\sigma-3}}\le C\|f(u)\|_{L^2}+C\beta\|u\|_{L^2}\le C\|u\|_{L^2}\left\|1+|\lambda u|^{2p-2}\right\|_{L^2}+C\beta\|u\|_{L^2}\le C(u_0)\|u\|_{H^1},\ \forall u\in H^1$$

因此，定理 2 证明完毕。

我们将说明以下式子是方程(1)的 Lyapunov 函数，更准确来说：$L(t):H^1\to R$ 有：

$$L(u)=\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}F(u)\mathrm{d}x \tag{17}$$

取合适的常数 $C_1,C_2>0$，有：

$$\|m\|_{H^1}\le C_1L(m)+C_2 \tag{18}$$

已经证到方程(1)全局解的存在性，则下面的估计成立：

$$\|u(t)\|_{H^1}\le C_1L(u(t))+C_2\le C_1L(u_0)+C_2$$

更进一步，$L(u(t))$ 关于时间 t 是非增的：

$$\begin{aligned}&L(u(t_2))-L(u(t_1))\\&=-\|\nabla(\Delta u-f(u))\|_{L^2}^2-\varepsilon\|\Delta u-f(u)\|_{L^2}^2-\beta\int_{\mathbb{R}^3}f(u)u\mathrm{d}x-\beta\|\nabla u\|_{L^2}^2\\&\le L(u_0)+C\end{aligned}$$

其中 $t_2\ge t_1\ge 0$，$u_0\in H^1$，同时可以看到：若 $L(T(t)u)$ 为常数，由上式可知，$u_t=0$，因此 $T(t)u=u$。综上：

推论 1. 1) L 下有界，在 H^1 上是连续；2) 对任意 $v\in H^1,t\ge 0$，若 $L(T(t)v)$ 为常数，那么 v 是一个不动点；3) 对任意的 $v\in H^1$ 函数 $t\in(0,+\infty)\mapsto L(T(t)v)\in\mathbb{R}$ 是非增的，当 $\|v\|_{H^1}\to\infty$ 时，有 $L(v)\to\infty$。

下面我们讨论方程(1)的定常解。容易得到 $\{T(t)\}$ 有界集其轨道是有界的：

定理 5. 在定理 3 的条件下，存在常数 $r>0$，有界集 $B\subset H^1,t\ge T_{1B}$，存在 $T_1B=T_1(B)$，有

$$\|T_1(t)B\|_{H^2}\le r,\ r>0$$

记 ω 是方程的一个弱解，$X\in R^N$，有：

$$(-\Delta^2+\varepsilon\Delta)\omega-(-\Delta+\varepsilon I)f(x,\omega)-\beta\omega=0$$

将上式与 ω 做内积，类似于式(13)，得到：

$$\|\Delta\omega\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\nabla\omega\|_{L^2}^2+\beta\|\omega\|_{L^2}^2=\int_{\mathbb{R}^3}(\Delta-\varepsilon I)f(x,\omega)\omega\mathrm{d}x\le C$$

定理 6. [18]设 Y 为度量空间，$S_1(t)$ 是 Y 上的梯度函数，对任意的有界集 $B_1\subset Y$，存在 t，使得 $\gamma_{B_1}^+=\bigcup_{t\ge 0}S_1(t)B_1$ 是有界的，定常解集合 $\mathcal{E}=\{\eta\in Y\mid S_1\eta=\eta,\forall t\ge 0\}$ 是有界的当且仅当 $S_1(t)$ 是点耗散的。

可以看到，式(17)是方程(1)的一个 Lyapunov 函数，而且方程在 H^1 上的定常解集合是有界的，根据 Raugel 的研究，(1)能够在 H^1 上生成一个梯度系统[18]。同时我们已经证明了方程在 H^1 上的整体适定性，由定理 6 可知，定常解集合其有界性，保证了全局解对应的半群在 H^1 上是点耗散的。

参考文献

[1] Cahn, J.W. and Hilliard, J.E. (1958) Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy. *The Journal of Chemical Physics*, **28**, 258-267. https://doi.org/10.1063/1.1744102

[2] Villain-Guillot, S. (2010) Phases modulees et dynamique de Cahn-Hilliard. Habilitation Thesis Universite Bordeaux I., Bordeaux.

[3] Oono, Y. and Puri, S. (1987) Computationally Efficient Modeling of Ordering of Quenched Phases. *Physical Review Letters*, **58**, 836-839. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.836

[4] Cholewa, J.W. and Dlotko, T. (1994) Global Attractor for the Cahn-Hilliard System. *Bulletin of the Australian Ma-*

thematical Society, **49**, 277-292. https://doi.org/10.1017/S0004972700016348

[5] Elliott, C.M. and Songmu, Z. (1986) On the Cahn-Hilliard Equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **96**, 339-357. https://doi.org/10.1007/BF00251803

[6] Cholewa, J.W. and Rodriguezbernal, A. (2012) On the Cahn-Hilliard Equation in $H^1(R^N)$. *Journal of Differential Equations*, **253**, 3678-3726. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.08.033

[7] Song, L.Y., Zhang, Y.D. and Ma, T. (2009) Global Attractor of the Cahn-Hilliard Equation in Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **355**, 53-62. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.01.035

[8] 董超雨, 姜金平, 张晓明. 粘性 Cahn-Hilliard 方程全局吸引子的存在性[J]. 湖北大学学报(自然科学版), 2014, 36(4): 385-388.

[9] 张强, 李俐玫. 对流 Cahn-Hilliard 方程的全局吸引子和分歧[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2020, 43(1): 56-60.

[10] Miranville, A. (2011) Asymptotic Behavior of the Cahn-Hilliard-Oono Equation. *Journal of Applied Analysis &Computation*, **1**, 523-536.

[11] Giorgini, A., Grasselli, M. and Miranville, A. (2017) The Cahn-Hilliard-Oono Equation with Singular Potential. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **27**, 2485-2510. https://doi.org/10.1142/S0218202517500506

[12] Porta, F.D. and Grasselli, M. (2017) Convective Nonlocal Cahn-Hilliard Equations with Reaction Terms. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, **20**, 1529-1553. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.1529

[13] Savostianov, A. and Zelik, S. (2016) Global Well-Posedness and Attractors for the Hyperbolic Cahn-Hilliard-Oono Equation in the Whole Space. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **26**, 1357-1384. https://doi.org/10.1142/S0218202516500329

[14] Henry, D. (1981) Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/BFb0089647

[15] Cholewa, J.W. and Dlotko, T. (2000) Global Attractors in Abstract Parabolic Problems: The Abstract Cauchy Problem. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526404

[16] 张世清. 泛函分析及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2018.

[17] 王明新. 索伯列夫空间[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[18] Raugel, G. (2000) Global Attractors in Partial Differential Equations. *Handbook of Dynamical Systems*, **2**, 885-982. https://doi.org/10.1016/S1874-575X(02)80038-8