Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(10), 1734-1742**
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.910200

粘性Cahn-Hilliard方程的可解性

黄　梅，蒲志林，段　芳

四川师范大学，四川 成都
Email: 1129733562@qq.com

收稿日期：2020年10月7日；录用日期：2020年10月19日；发布日期：2020年10月26日

摘　要

本文研究粘性Cahn-Hilliard方程的可解性问题。通过构造扇形算子并且利用文献中的方法证明了粘性Cahn-Hilliard方程局部解的存在性和整体解的存在性。同时，考虑带有非线性的粘性Cahn-Hilliard方程，研究其可解性问题。

关键词

粘性Cahn-Hilliard方程，局部解，全部解

Solvability of Viscous Cahn-Hilliard Equation

Mei Huang, Zhilin Pu, Fang Duan

Sichuan Normal University, Chengdu Sichuan
Email: 1129733562@qq.com

Received: Oct. 7th, 2020; accepted: Oct. 19th, 2020; published: Oct. 26th, 2020

Abstract

In this paper, we study the solvability of the viscous Cahn-Hilliard equation. By constructing sectorial operators and empolying the method in reference, the existence of local solutions and global solutions for viscous Cahn-Hilliard equation are proved. At the same time, the existence of solutions for the viscous Cahn-Hilliard equation with nonlinear term is studied.

Keywords

Viscous Cahn-Hilliard Equation, Local Solution, Global Solution

文章引用：黄梅，蒲志林，段芳．粘性 Cahn-Hilliard 方程的可解性[J]．应用数学进展, 2020, 9(10): 1734-1742.
DOI: 10.12677/aam.2020.910200

1. 引言

考虑如下的粘性 Cahn-Hilliard 方程及初边值问题：

$$(1-\nu)u_t=\Delta\mu(u),u=u(t,x),(t,x)\in R\times\Omega, \tag{1}$$

$$\mu(u)=-\Delta u-f(u)+\nu u_t, \tag{2}$$

$$u(t,x)=\Delta u(t,x)=0,\ x\in\partial\Omega, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}=\frac{\partial(\Delta u)}{\partial N}=0,\ x\in\partial\Omega, \tag{4}$$

其中 $\nu\in[0,1]$，Ω 是 $R^N(N=1,2,3)$ 上的一个有界开集，$-\Delta$ 为 Laplace 算子，$u=u(t,x)$ 是未知函数，f 是最高次为 $2p-1$ 的一个多项式，且有如下形式：

$$f(u)=\sum_{j=1}^{2p-1}a_j u^j,a_{2p-1}>0,p\in N,p\geq 2 \tag{5}$$

粘性 Cahn-Hilliard 方程是描述二元合金分解的典型 Cahn-Hilliard 模型的推广，由 A.Novick-Cohn 在文献[1]中提出用来分析粘性一阶变相动力学。$\nu=0$ 时，是适当限制条件下的 Cahn-Hilliard 方程；$\nu=1$ 时，是我们熟悉的线性热方程；$\nu\in(0,1)$ 时，是本文所研究的模型。

粘性 Cahn-Hilliard 方程解的存在性已有文献研究，例如文献[2]研究了广义粘性 Cahn-Hilliard 方程在 R^N 中的可解性，这一结果在[3]中得到了推广；文献[4]考虑粘性 Cahn-Hilliard 方程的解析解，证明了解的存在唯一性。在 Neumann 边界条件下的粘性 Cahn-Hilliard 方程，其动力学性质研究可参考文献[5] [6]；无界区域上的粘性 Cahn-Hilliard 方程的动力学性质研究可参考文献[7]；关于 $\nu\in(0,1)$ 时方程的渐进行为也有详细研究，例如[8]。文献[9]采用质量守恒的 crank-Nicolson 型有限差分法，对粘性 Cahn-Hilliard 方程进行了数值求解。

本文研究粘性 Cahn-Hilliard 方程可解性问题。首先利用扇形算子及文献[10]中解的存在性定理，证明了初边值问题(1.1)~(1.4)局部解的存在性；其次在局部解存在的前提下，借鉴文献[10]中全局解的存在性定理，证明了初边值问题(1.1)~(1.4)的全局解在一定条件下的存在性，即任意给定 $u_0\in L^2(\Omega)$，初边值问题(1.1)~(1.4)的解 u，满足 $\|\Delta u\|^2$ 是有界的，从而得到全局解存在。最后我们考虑带有非线性的粘性 Cahn-Hilliard 方程，即

$$(1-\nu)u_t+g(u)=\Delta(-\Delta u-f(u)+\nu u_t),u=u(t,x),(t,x)\in R\times\Omega,$$

其中 g 是多项式函数。文献[11]研究了它的渐进形态，本文研究它的解的存在情况。

2. 预备知识

考虑 Banach 空间 X 中的抽象 Cauchy 问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=F(u),t>0\\ u(0)=u_0\end{cases} \tag{6}$$

其中，$A:D(A)\subset X\to X$ 是扇形正算子，分数幂算子 $A^{-\alpha}:X\to X$ 定义为：

$$A^{-\alpha}v=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-At}v\mathrm{d}t,$$

其中 $\alpha\in(0,+\infty)$。由[10]知道 $A^{-\alpha}\left(\alpha\in(0,+\infty)\right)$ 是有界线性算子，并且 $A^{-\alpha}$ 是可逆的。记 $A^{\alpha}=\left(A^{-\alpha}\right)^{-1}$ 及 $X^{\alpha}:=D(A)$；假设 $F:X^{\alpha}\to X$ 在 X^{α} 的有界集上 Lipschtz 连续。

定义 2.1 [10] (局部 X^{α} 解)：设 X 是一个 Banach 空间，$\alpha\in[0,1)$ 且 $u_0\in X^{\alpha}$。若存在 $\tau>0$ 和函数 $u\in\left(C(0,\tau),X^{\alpha}\right)$ 满足

1) $u(0)=u_0$；

2) $u\in C^1\left((0,\tau),X\right)$；

3) $\forall t\in(0,\tau),u(t)\in D(A)$；

4) $\forall t\in(0,\tau)$，u 满足方程(6)；

则 u 称为(2.1)的局部 X^{α} 解。

定义 2.2 [10] (全局 X^{α} 解)：函数 $u=u(t)$ 称为全局 X^{α} 解，如果它满足定义 2.1 且 $\tau=+\infty$。

定理 2.1 [10] (局部 X^{α} 解的存在性)：对每个 $u_0\in X^{\alpha}$，存在(6)的唯一 X^{α} 解 $u=u(t,u_0)$，它是定义在最大存在区间 $\left[0,\tau_{u_0}\right)$ 上的。即 $\tau_{u_0}=+\infty$ 或者如果 $\tau_{u_0}<+\infty$，则 $\limsup\limits_{t\to\tau_{u_0}^-}\left\|u(t,u_0)\right\|_{X^{\alpha}}=+\infty$。

关于方程全局 X^{α} 解的存在性是非常重要的。文献[10]引入了如下的一个假设条件 H：

1) 存在一个 Banach 空间 Y，$D(A)\subset Y$；

2) 存在一个局部有界函数 $C:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$；

3) 存在一个非减函数 $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$；

4) 存在某个数 $\theta\in[0,1)$。

使得 $\forall u_0\in X^{\alpha}$，满足：

$$\left\|u(t,u_0)\right\|_Y\le C\left(\left\|u_0\right\|_{X^{\alpha}}\right),t\in\left(0,\tau_{u_0}\right),$$

$$\left\|F\left(u(t,u_0)\right)\right\|_X\le g\left(\left\|u(t,u_0)\right\|_Y\right)\left(1+\left\|u(t,u_0)\right\|_{X^{\alpha}}^{\theta}\right),t\in\left(0,\tau_{u_0}\right).$$

定理 2.2 [10] (全局 X^{α} 解的存在性)：如果假设 H 成立，则(6)存在全局 X^{α} 解。

引理 2.1 [12]：对 $\forall\eta>0$，

$$\left\{\left|\Delta u\right|^2+\eta\left|u\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}},\left\{\left|\Delta u\right|^2+\eta\left(\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

是 H^2 上的等价范数，同样地，

$$\left\{\left|\Delta^2 u\right|^2+\eta\left|u\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}},\left\{\left|\Delta^2 u\right|^2+\eta\left(\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

是 H^4 上的等价范数。

3. 主要结果

本节给出粘性 Cahn-Hilliard 方程局部解和全局解的存在性定理。令 $X=L^2(\Omega)$，内积记为 $(\cdot,\cdot)$，范数记为 $\|\cdot\|$。更一般地，把 Banach 空间 Z 上的范数记为 $\|\cdot\|_Z$。

显然，由关于f的表达式(5)知，存在$\lambda_0>0$，使得对任意$v\in R$，

$$\left|f'(v)\right|<\lambda_0. \tag{7}$$

对$u\in L^2(\Omega)$，均值定义为：

$$\langle u\rangle=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x, x\in\Omega,$$

其中$|\Omega|$是Ω的测度。

对(1)作Ω上的积分，利用格林公式可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u(t,x)\mathrm{d}x=0,$$

因此，

$$\langle u\rangle=const.=\langle u_0\rangle, \tag{8}$$

故粘性 Cahn-Hilliard 方程是满足质量守恒的，这对后面范数估计起着至关重要的作用。

令算子$A=(-\Delta)B_\nu+\rho I\ (\rho>0)$，$B_\nu=-\Delta\left[(1-\nu)I-\nu\Delta\right]^{-1}$，其定义域为：

$$D(A)=\left\{\phi\in H^4:\frac{\partial u}{\partial N}=\frac{\partial(\Delta u)}{\partial N}\bigg|_{\partial\Omega}=0\right\},$$

首先讨论算子A的性质，有如下的命题：

命题 3.1 当$\nu\in(0,1)$时，算子B_ν是X到X上的有界算子，更进一步，$-\Delta B_\nu:H^2(\Omega)\to X$是一个扇形算子。

证明：算子B_ν还可写为

$$B_\nu=\frac{1}{\nu}I-\frac{1-\nu}{\nu}\left[(1-\nu)I-\nu\Delta\right]^{-1},$$

由扇形算子定义可知：$\exists M_0>0$，使得

$$\left\|\left((1-\nu)I-\nu\Delta\right)^{-1}\right\|\le M_0 \quad , \tag{9}$$

故可证得$B_\nu:L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$是一个有界算子。

注意到，算子$-\Delta B_\nu$有以下形式：

$$-\Delta B_\nu=\frac{1}{\nu}(-\Delta)-\frac{1-\nu}{\nu^2}I+\frac{(1-\nu)^2}{\nu^2}\left[(1-\nu)I-\nu\Delta\right]^{-1},$$

它是扇形算子$\frac{1}{\nu}(-\Delta)$的一个有界扰动，因此$-\Delta B_\nu$是一个扇形算子(参考[10])。

定理 3.1 当$\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)$，$\nu\in(0,1)$时，初边值问题(1)~(4)存在局部$X^\alpha$解。

证明：由命题 3.1 可知，要证明局部X^α解的存在性，还需要验证非线性项

$$B_\nu f:X^\alpha(\Omega)\to X,$$

满足局部 Lipschtiz 连续。由(5)可知，$f(u)$关于$u\in\Omega$局部 Lipschitz 连续。

更进一步，有如下的 Sobolev 空间嵌入关系：

$$\begin{cases} H^2(\Omega)\subset L^{\infty}(\Omega) & n\le 3 \\ H^2(\Omega)\subset W^{1,4}(\Omega) & n\le 3 \\ X^{\frac{1}{2}}(\Omega)\subset H^2(\Omega) & \end{cases}, \tag{10}$$

令 U 是 X^{α} 上的有界子集，则 $B_v f: X^{\alpha}\to X$ 在有界集 U 上是 Lipschitz 连续的，即：$\phi,\psi\in U$

$$\begin{aligned} &\left\|B_v\left(f(\phi)\right)-B_v\left(f(\psi)\right)\right\| \\ &\le \left\|\left((1-\nu)I-\nu\Delta\right)^{-1}\right\|_{L(X,X)}\left\|\Delta f(\phi)-\Delta f(\psi)\right\| \\ &\le M_0\left\|\left[f'(\phi)\Delta\phi-f'(\psi)\Delta\psi\right]+\left[f''(\phi)|\nabla\phi|^2-f''(\psi)|\nabla\psi|^2\right]\right\|, \\ &\le C_U\left\|\phi-\psi\right\|_{X^{\alpha}} \end{aligned}$$

其中 C_U 是关于 U 的常数。因此初边值问题(1)~(4)的局部 X^{α} 解存在。

在局部 X^{α} 解存在的基础上进一步讨论全局解的存在性。

定理 3.2 当 $\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)$，$\nu\in(0,1)$ 时，在条件(5)和(7)成立的情况下，初边值问题(1)~(4)存在唯一的全局 X^{α} 解。

证明：用 $v=u_t+\epsilon_0 u$ 与(1)作内积有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2+\epsilon_0\|\Delta u\|^2+(1-\nu)\|v\|^2-(1-\nu)\epsilon_0(u,v)+\nu\epsilon_0(\Delta u,v)+\nu\|\nabla v\|=(-\Delta f(u),v), \tag{11}$$

由 Poincare 不等式得：

$$\|u\|^2\le\lambda\|\nabla u\|^2, \tag{12}$$

由(12)以及 Hölder 不等式和 Young 不等式可得

$$\|\nabla u\|^2=-\int_{\Omega}u\cdot\Delta u\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{\lambda}{2}\|\Delta u\|^2,$$

则

$$\|\nabla u\|^2\le\lambda\|\Delta u\|^2, \tag{13}$$

更进一步，由(12)和(13)得

$$\|u\|^2\le\lambda^2\|\Delta u\|^2,$$

又由 Hölder 不等式和 Young 不等式可得

$$-(1-\nu)\epsilon_0(u,v)\ge-\frac{(1-\nu)\epsilon_0\lambda^2}{2}\|\Delta u\|^2-\frac{(1-\nu)\epsilon_0}{2}\|v\|^2, \tag{14}$$

$$\nu\epsilon_0(\Delta u,v)\ge-\frac{\epsilon_0^2\nu\lambda}{4}\|\Delta u\|^2-\nu\|\nabla v\|^2, \tag{15}$$

将(14)和(15)代入(11)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2+c_1\|\Delta u\|^2+c_2\|v\|^2\le(-\Delta f(u),v), \tag{16}$$

其中 $c_1=\epsilon_0-\frac{(1-\nu)\epsilon_0\lambda^2}{2}-\frac{\epsilon_0^2\nu\lambda}{4}, c_2=(1-\nu)\left(1-\frac{\epsilon_0}{2}\right)$。

最后由 Young 不等式可得

$$\left(-\Delta f\left(u\right),v\right)=\left(\nabla f\left(u\right),\nabla v\right)\le\frac{\lambda_0^2}{4c_2}\left\|\Delta u\right\|^2+c_2\left\|v\right\|^2,\tag{17}$$

将(17)代入(16)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\Delta u\right\|^2+c_3\left\|\Delta u\right\|^2\le1,$$

其中 $c_3=c_1-\frac{\lambda_0^2}{4c_2}$，取适当的 ϵ_0，使得 $c_3>0$。则由 Gronwall 引理得：

$$\left\|\Delta u\right\|^2\le M,$$

其中 M 是一个大于 0 的常数。再由(8)得

$$\left\|\Delta u\right\|^2+\left|\langle u\rangle\right|^2\le M+\left|\langle u_0\rangle\right|^2.$$

令 $Y=\left\{\phi\in H^2\left(\Omega\right):\frac{\partial\phi}{\partial N}=\frac{\partial\left(\Delta\phi\right)}{\partial N}\bigg|_{\partial\Omega}=0\right\}$，由引理 2.1 可知 Y 上的等价范数为 $\left\{\left\|\Delta u\right\|^2+\left|\langle u\rangle\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$。为了利用定理 2.2 完善证明，还需近一步处理。

将(1)改写为：

$$u_t=\left(B_\nu\Delta+\rho I\right)u-B_\nu f\left(u\right)-\rho u,$$

其中 $\rho>0$ 且有

$$0<\rho\le Re\sigma\left(B_\nu\Delta+\rho I\right),$$

由空间嵌入定理(10)，在 Y 空间上有下列先验估计：

$$\begin{aligned}\left\|-B_\nu f\left(u\left(t\right)\right)-\rho u\left(t\right)\right\|&\le\left\|B_\nu\right\|_{L(X,X)}\left\|f\left(u\left(t\right)\right)\right\|+\rho\left\|u\left(t\right)\right\|\\&\le\left\|B_\nu\right\|_{L(X,X)}\sup_{|s|\le c_4\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}}\left(\left|f\left(s\right)\right|+\rho\right)\left(1+\left\|u\left(t\right)\right\|_{H^2(\Omega)}\right),\\&=g\left(\left\|u\left(t\right)\right\|_{H^2(\Omega)}\right)\end{aligned}$$

其中 $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是一个增函数，证毕。

以上的讨论过程是粘性 Cahn-Hilliard 方程的解的存在情况研究的新思路，拓展了粘性 Cahn-Hilliard 方程研究的方法，用新的方法证明了粘性 Cahn-Hilliard 方程局部解和全局解的存在性。

4. 推论

这一节我们考虑粘性 Cach-Hilliard 方程带有非线性的形式，即考虑下面的初边值问题：

$$\left(1-\nu\right)u_t+g\left(u\right)=\Delta\mu\left(u\right),u=u\left(t,x\right),\left(t,x\right)\in R\times\Omega,\tag{18}$$

$$\mu\left(u\right)=-\Delta u-f\left(u\right)+\nu u_t,\tag{19}$$

$$u\left(t,x\right)=\Delta u\left(t,x\right)=0,\ x\in\partial\Omega,\tag{20}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}=\frac{\partial\left(\Delta u\right)}{\partial N}=0,\ x\in\partial\Omega,\tag{21}$$

其中 f 的定义如前面的(5)而 g 的定义如下：

$$g(u)=\sum_{i=1}^{2q-1} b_i u^i, b_{2q-1}>0, q\in N, q\geq 2, \tag{22}$$

有不等式：

$$g(s)s\geq qb_{2q-1}s^{2q}-c', \forall s\in R, \tag{23}$$

由关于 g 的表达式(22)知

$$\exists\lambda_1>0, \forall v\in R, |g'(v)|<\lambda_1, \tag{24}$$

其中 λ_1 是一个常数。显然该初边值问题不满足质量守恒，下面讨论该初边值问题的局部 X^α 解和全局 X^α 解。

根据上一节中局部解的讨论过程，(10)同样成立。很容易可以得到当 $\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ 时该初边值问题的局部 $X^\alpha\left(\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)\right)$ 解存在。令 V 是 X^α 空间上的有界集，$\phi,\psi\in V$，则该方程的非线性项 $B_\nu f-\left((1-\nu)I-\nu\Delta\right)^{-1}g: X^\alpha\to L^2(\Omega)$ 满足 Lipschitz 连续，即

$$\begin{aligned}
&\left\|\left[B_\nu\left(f(\phi)\right)-\left((1-\nu)I-\nu\Delta\right)^{-1}g(\phi)\right]-\left[B_\nu\left(f(\psi)\right)-\left((1-\nu)I-\nu\Delta\right)^{-1}g(\psi)\right]\right\|\\
&\leq M_0\left\|\Delta f(\phi)-\Delta f(\psi)\right\|+M_0\left\|g(\phi)-g(\psi)\right\|\\
&\leq M_0\left\|\left[f'(\phi)\Delta\phi-f'(\psi)\Delta\psi\right]+\left[f''(\phi)|\nabla\phi|^2-f''(\psi)|\nabla\psi|^2\right]\right\|\\
&\quad+M_0\left(\left\|g(\phi)\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\left\|g(\psi)\right\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\\
&\leq C_V\left\|\phi-\psi\right\|_{X^\alpha}
\end{aligned},$$

其中 C_V 是关于 V 的常数。故可以知道该初边值问题的局部 $X^\alpha\left(\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)\right)$ 解存在。

定理 4.1 当 $\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)$，$\nu\in(0,1)$ 时，在条件(5)，(7)和(22)~(24)成立的情况下，初边值问题(18)~(21)存在唯一的全局 X^α 解。

证明：用 $w=u_t+\epsilon_1 u$ 与(18)作内积有 u

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2+\epsilon_1\|\Delta u\|^2+(1-\nu)\|w\|^2-(1-\nu)\epsilon_1(u,w)+\nu\epsilon_1(\Delta u,w)+\nu\|\nabla v\|+(g(u),w)=(-\Delta f(u),w)$$

根据 Hölder 不等式和 Young 不等式可得

$$-(1-\nu)\epsilon_1(u,w)\geq-\frac{(1-\nu)\epsilon_1\lambda^2}{2}\|\Delta u\|^2-\frac{(1-\nu)\epsilon_1}{2}\|w\|^2, \tag{25}$$

$$\nu\epsilon_1(\Delta u,w)\geq-\frac{\epsilon_1^2\nu\lambda}{4}\|\Delta u\|^2-\nu\|\nabla w\|^2, \tag{26}$$

由(25)和(26)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2+c_5\|\Delta u\|^2+c_6\|w\|^2+(g(u),w)\leq(-\Delta f(u),w),$$

其中 $c_5=\epsilon_1-\frac{(1-\nu)\epsilon_1\lambda^2}{2}-\frac{\epsilon_1^2\nu\lambda}{4}$，$c_6=(1-\nu)\left(1-\frac{\epsilon_1}{2}\right)$，

又由

$$\left(-\Delta f(u),w\right)=\left(\nabla f(u),\nabla w\right)\le\frac{\lambda_0^2}{4c_6}\|\Delta u\|^2+c_6\|w\|^2,$$

则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2+\left(c_5-\frac{\lambda_0^2}{4c_6}\right)\|\Delta u\|^2+\epsilon_1\int_\Omega g(u)u\mathrm{d}x\le-\int_\Omega g(u)u_t\mathrm{d}x,$$

由(23)以及 Young 不等式和格林公式有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2+\left(c_5-\frac{\lambda_0^2}{4c_6}-\frac{\lambda_1^2\lambda^2}{2}\right)\|\Delta u\|^2+\epsilon_1 q b_{2q-1}\|u\|_{L^{2q}(\Omega)}^{2q}\le c'|\Omega|+\frac{1}{2}\|u_t\|^2, \tag{27}$$

再将 u_t 与(18)作内积得

$$\|u_t\|^2+\|\nabla u_t\|^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2+\int_\Omega g(u)u_t\mathrm{d}x=\left(-\Delta f(u),u_t\right),$$

由(7)，(24)以及格林公式和 Yong 不等式得到

$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2\le-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2+\left(\frac{\lambda_0^2\lambda}{2}+\frac{\lambda_1^2\lambda^2}{2}\right)\|\Delta u\|^2, \tag{28}$$

将(28)带入(27)，再由空间嵌入定理有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2+c_7\|\Delta u\|^2+\epsilon_1 q b_{2q-1}\|u\|_{L^{2q}(\Omega)}^{2q}\le c'|\Omega|,$$

其中 $c_7=c_5-\frac{\lambda_0^2}{4c_6}-\frac{\lambda_0^2\lambda}{2}-\lambda_1^2\lambda^2$。取适当 ϵ_1，使得 $c_7>0$，则由 Gronwall 引理得：$\exists M_1>0$，

$$\|\Delta u\|^2\le M_1,$$

则

$$\|\Delta u\|^2+\|u\|^2\le\left(1+\lambda^2\right)M_1.$$

将(18)改写为：

$$u_t=\left(B_\nu\Delta+\rho I\right)u-B_\nu f(u)-\left((1-\nu)I-\nu\Delta\right)^{-1}g(u)-\rho u,$$

由空间嵌入定理(10)，在 Y 空间上有下列先验估计：

$$\begin{aligned}&\left\|-B_\nu f(u(t))-\left((1-\nu)I-\nu\Delta\right)^{-1}g(u(t))-\rho u(t)\right\|\\&\le\|B_\nu\|_{L(X,X)}\|f(u(t))\|+M_0\|g(u(t))\|+\rho\|u(t)\|\\&\le\max\left(\|B_\nu\|_{L(X,X)},M_0\right)\sup_{|s|\le c_8\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}}\left(|f(s)|+|g(s)|+\rho\right)\left(1+\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}\right),\\&=g\left(\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}\right)\end{aligned}$$

其中 $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是一个增函数，证毕。

以上的结果，拓展了粘性 Cach-Hilliard 方程的讨论范围，得出了在一定条件下带有非线性的粘性 Cach-Hilliard 方程局部解和全局解的存在性。当然，我们所作的假设条件还可以得到更一般的结论，这将是我们后面所要努力的。

参考文献

[1] Novick-Cohen, A. (1988) On the Viscous Cahn-Hilliard Equation, Material Instabilities in Continuum Mechanics and Related Mathematical Problems. Clarendon Press, Oxford, 329-342.

[2] Dlotko, T., Kania, M.B. and Sun, C.Y. (2012) Analysis of the Viscous Cahn-Hilliard Equation in R^N. *Journal of Differential Equation*, **252**, 2771-2791. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.08.052

[3] Bui, L.T.T., Dao, A.N. and Díaz, J.L. (2017) Critical Case for the Viscous Cahn-Hilliard Equation. *Electronic Journal of Differential Equations*, **176**, 1-8.

[4] Choo, S.M. and Chung, S.K. (2003) Asymtotic Behaviour of the Viscous Cahn-Hilliard Equation. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **11**, 143-154. https://doi.org/10.1007/BF02935727

[5] Rossi, R. (2007) Global Attractor for the Weak Solutions of a Class of Viscous Cahn-Hilliard Equations, Dissipative Phase Transitions. *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, **71**, 247-268. https://doi.org/10.1142/9789812774293_0013

[6] Carvalho, A.N. and Dlotko, T. (2008) Dynamics of the Viscous Cahn-Hilliard Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **344**, 703-725. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.03.020

[7] Cholewa, J.W. and Dlotko, T. (2010) Dynamics of the Modified Viscous Cahn-HillIiard Equation in R^N. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **35**, 277-294.

[8] Elliott, C.M. and Stuart, A.M. (1996) Viscous Cahn-Hilliard Equation II. Analysis. *Journal of Differential Equations*, **128**, 387-414. https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0101

[9] Choo, S.M. and Chung, S.K. (2004) A Conservative Nonlinear Difference Scheme for the Viscous Cahn-Hilliard Equation. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **16**, 53-68. https://doi.org/10.1007/BF02936150

[10] Cholewa, J.W. and Dlotko, T. (2000) Global Attractors in Abstract Parabolic Problems. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526404

[11] 任永华. 粘性 Cahn-Hilliard 方程的整体吸引子[J]. 应用数学进展, 2016, 5(4): 818-822.

[12] Pazy, A. (1983) Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equation. Spring Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1