Advances in Applied Mathematics **应用数学进展, 2020, 9(10), 1743-1750**
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.910201

Hans汉斯

三元变系数欧拉函数方程 $\varphi(abc)=\varphi(a)+5\varphi(b)+7\varphi(c)$的正整数解

路双宁，杨海，许　倩

西安工程大学理学院，陕西　西安
Email: 549488787@qq.com

收稿日期：2020年10月7日；录用日期：2020年10月19日；发布日期：2020年10月26日

摘　要

对于任意正整数解 n，欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示从 $1,2,\cdots,n-1$ 中与 n 互素的正整数解的个数。欧拉函数方程是数论及其应用中的一个重要的研究论题，不定方程的一元变系数和多元变系数问题使得我们延展出很多新的研究方法，对有关包含欧拉函数方程可解性的研究有着重要的理论意义和应用价值。利用初等数论相关内容及计算方法，研究了系数为奇数的三元欧拉函数方程 $\varphi(abc)=\varphi(a)+5\varphi(b)+7\varphi(c)$ 的可解性，其中 $\varphi(n)$ 为欧拉函数。得到了该方程共计25组正整数解。

关键词

欧拉函数，正整数解，方程，奇数

Positive Integer Solution of Ternary Variable Coefficient Euler Function Equation $\varphi(abc)=\varphi(a)+5\varphi(b)+7\varphi(c)$

Shuangning Lu, Hai Yang, Qian Xu

School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an Shaanxi
Email: 549488787@qq.com

Received: Oct. 7th, 2020; accepted: Oct. 19th, 2020; published: Oct. 26th, 2020

Abstract

For any positive integer solution *n*, Euler's function $\varphi(n)$ represents the number of positive integer solutions that are prime to *n* from $1,2,\cdots,n-1$. Euler's function equation is an important re-

文章引用：路双宁，杨海，许倩. 三元变系数欧拉函数方程 $\varphi(abc)=\varphi(a)+5\varphi(b)+7\varphi(c)$ 的正整数解[J]. 应用数学进展, 2020, 9(10): 1743-1750. DOI: 10.12677/aam.2020.910201

search topic in number theory and its applications. The univariate variable coefficients and multivariate variable coefficients of indeterminate equations have allowed us to extend many new research methods and research on the solvability of equations containing Euler functions. It has important theoretical significance and application value. Using the related content and calculation method of elementary number theory, the solvability of the ternary Euler function equation $\varphi(abc)=\varphi(a)+5\varphi(b)+7\varphi(c)$ with odd coefficients is studied, where $\varphi(n)$ is the Euler function. A total of 25 positive integer solutions of the equation are obtained.

Keywords

Euler Function, Positive Integer Solution, Equation, Odd Number

1. 引言

对于任意正整数解 n，欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示从 $1,2,\cdots,n-1$ 中与 n 互素的正整数解的个数[1]。欧拉函数方程是数论及其应用中的一个重要的研究论题，不定方程的一元变系数和多元变系数问题使得我们延展出很多新的研究方法，对有关包含欧拉函数方程可解性的研究有着重要的理论意义和应用价值。张四保，官春梅，孙树东，席小忠[2] [3] [4] [5]分别得出了方程 $\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 在 $k=3,4,6,7,8$ 时的全部正整数解，而孙翠芳，程智，张四保，杜先存[6] [7] [8]分别得出方程 $\varphi(abc)=k(\varphi(a)+\varphi(b)+\varphi(c))$ 在 $k=2,3,4$ 时的所有正整数解；白继文，张四保[9] [10]等人分别研究了四元欧拉函数方程 $\varphi(abcd)=k(\varphi(a)+\varphi(b)+\varphi(c)+\varphi(d))$ 在 $k=2,4$ 时的全部正整数解；夏衣旦·莫合德，张四保，姜莲霞[11] [12]分别讨论了一个包含 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的非线性方程 $\varphi(mn)=7\varphi(m)+8\varphi(n)+16$ 和 $\varphi(xy)=9\varphi(x)+16\varphi(y)+24$ 的解，利用整数的分解、欧拉函数 $\varphi(n)$ 的性质和初等方法从而得出了其全部解；袁合才，王波，王晓峰[13]讨论了混合型欧拉函数方程 $\varphi(abc)=2\varphi(a)\varphi(b)+6\varphi(c)$ 的正整数解问题，得到了该方程的所有正整数解；杨张媛，赵西卿，张明丽，高丽[14] [15]分别研究了三元变系数欧拉函数方程 $\varphi(abc)=k_1\varphi(a)+k_2\varphi(b)+k_3\varphi(c)$ 在 k_1,k_2,k_3 为连续的三个自然数时的全部正整数解。本文在前人对欧拉函数正整数解研究的基础上，利用初等数论的相关知识研究了系数为特定奇数的三元变系数欧拉函数方程 $\varphi(abc)=\varphi(a)+5\varphi(b)+7\varphi(c)$ 的正整数解。

2. 相关引理

引理 1 [16] 若正整数 $n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 为素数，则欧拉函数

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)。$$

引理 2 [16]对任意的正整数 m,n，则有

$$\varphi(mn)=\frac{(m,n)\varphi(m)\varphi(n)}{\varphi((m,n))},$$

其中 (m,n) 表示 m 与 n 最大公约数。显然，当 $(m,n)=1$ 时，有 $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$。

引理 3 [16]当 $n\ge 2$ 时，有 $\varphi(n)<n$；当 $n\ge 3$ 时，$\varphi(n)$ 为偶数。

引理 4 [16]在欧拉函数方程 $\varphi(abc)=k+h\varphi(c)$ 中，若 $\varphi(ab)\ge k+h+1$，则该方程无正整数解。

3. 定理及其证明

定理 1 三元变系数欧拉函数方程 $\varphi(abc)=\varphi(a)+5\varphi(b)+7\varphi(c)$ 的正整数解共 25 组，分别为 $(a,b,c)=(3,12,3)$，$(3,11,5)$，$(3,11,8)$，$(3,32,3)$，$(3,17,3)$，$(5,7,3)$，$(5,7,4)$，$(8,7,3)$，$(5,7,6)$，$(5,9,4)$，$(5,14,3)$，$(10,7,3)$，$(8,2,2)$，$(10,2,2)$，$(12,2,2)$，$(26,1,2)$，$(26,2,1)$，$(13,2,2)$，$(28,1,2)$，$(28,2,1)$，$(36,1,2)$，$(36,2,1)$，$(42,1,2)$，$(42,2,1)$，$(21,2,2)$。

证 对于三元变系数欧拉函数方程

$$\varphi(abc)=\varphi(a)+5\varphi(b)+7\varphi(c) \tag{1}$$

由引理 2 可知

$$\varphi(abc)=\frac{(a,bc)\varphi(a)\varphi(bc)}{\varphi((a,bc))}=\frac{(a,bc)(b,c)}{\varphi((a,bc))\varphi((b,c))}\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)。$$

由引理 3 所以

$$\varphi(a)+5\varphi(b)+7\varphi(c)=\varphi(abc)\ge\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)，$$

$$\varphi(a)+5\varphi(b)=\varphi(abc)-7\varphi(c)\ge\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)-7\varphi(c)，$$

$$(\varphi(a)\varphi(b)-7)\varphi(c)\ge\varphi(a)\varphi(b)-7，\text{即}(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)\le 12。$$

根据 $\varphi(a)$ 和 $\varphi(b)$ 的不同取值分 14 种情形分别讨论。

情形 1 当 $(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)<0$ 时，有 $\varphi(a)=1,2,4$，$\varphi(b)>1$。

1.1 当 $\varphi(a)=1$，情形 $\varphi(b)>1$ 时，有

$$1+5\varphi(b)+7\varphi(c)=\varphi(abc)\ge\varphi(b)\varphi(c)，$$

即 $(\varphi(b)-7)(\varphi(c)-5)\le 36$。

1.1.1 若 $\varphi(a)=1$，$\varphi(b)=2$，$\varphi(c)$ 为任意值时，此时(1)式为 $\varphi(abc)=11+7\varphi(c)$，经检验，(1)无解。

1.1.2 若 $\varphi(a)=1$，$\varphi(b)=4$，此时 $\varphi(abc)=21+7\varphi(c)$，经检验，(1)无解。

1.1.3 若 $\varphi(a)=1$，$\varphi(b)=6$，此时 $\varphi(abc)=31+7\varphi(c)$，经检验，(1)无解。

1.1.4 若 $\varphi(a)=1$，$\varphi(b)=8$，此时 $\varphi(c)-5\le 36$，即

$$\varphi(c)=1,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,40。$$

当 $\varphi(c)=1$，$\varphi(abc)=48$ 时，即 $abc=65,104,105,112,130,140,144,156,168,180,210$，又 $a=c=1,2$，$b=15,16,20,24,30$，经检验，(1)无解。

当 $\varphi(c)=2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38,40$ 时，$\varphi(abc)=41+7\varphi(c)$，由引理 3 知(1)无解。

1.1.5 若 $\varphi(a)=1$，$\varphi(b)=10$，此时 $\varphi(c)-5\le 13$，即 $\varphi(c)=1,2,4,6,8,10,12,14,16,18$。

当 $\varphi(c)=1$，$\varphi(abc)=58$ 时，即 $abc=59,118$，又 $a=c=1,2$，$b=11,22$，经检验，(1)无解。

当 $\varphi(c)=2,4,6,8,10,12,14,16,18$ 时，$\varphi(abc)=51+7\varphi(c)$，由引理 3 知(1)无解。

1.1.6 若 $\varphi(a)=1$，$\varphi(b)=12$，此时 $\varphi(c)-5\le 7$，即 $\varphi(c)=1,2,4,6,8,10,12$。

当 $\varphi(c)=1$， $\varphi(abc)=68$ 时，不存在 abc 使得 $\varphi(abc)=68$，(1)无解。

当 $\varphi(c)=2,4,6,8,10,12$ 时， $\varphi(abc)=61+7\varphi(c)$，由引理 3 知(1)无解。

1.1.7 若 $\varphi(a)=1$， $\varphi(b)=14$，不存在 b 使得 $\varphi(b)=14$，(1)无解。

1.1.8 若 $\varphi(a)=1$， $\varphi(b)=16$，此时 $\varphi(c)-5\le 4$，即 $\varphi(c)=1,2,4,6,8$。

当 $\varphi(c)=1$，$\varphi(abc)=88$ 时，即 $abc=89,115,178,184,230,276$，又 $a=c=1,2$，$b=17,32,34,40,48,60$，经检验，(1)无解。

当 $\varphi(c)=2,4,6,8$ 时， $\varphi(abc)=81+7\varphi(c)$，由引理 3 知(1)无解。

1.1.9 若 $\varphi(a)=1$， $\varphi(b)\ge 18$ 时，此时 $\varphi(c)\le 8$。

当 $\varphi(c)=1$ 时，经检验，不存在 a,b,c 使(1)成立，(1)无解。

当 $\varphi(c)$ 为偶数时， $\varphi(abc)$ 为奇数，由引理 3 知(1)无解。

1.2 当 $\varphi(a)=2$， $\varphi(b)>1$ 时，有

$\varphi(abc)=2+5\varphi(b)+7\varphi(c)$。

1.2.1 若 $\varphi(a)=2$， $\varphi(b)=2$ 时， $\varphi(abc)=12+7\varphi(c)\ge 4\varphi(c)$，不存在 c 使(1)成立。

1.2.2 若 $\varphi(a)=2$， $\varphi(b)=4$ 时， $\varphi(abc)=22+7\varphi(c)\ge 8\varphi(c)$，即 $\varphi(c)\le 22$，即 $\varphi(c)=1,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22$。

当 $\varphi(c)=1,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22$ 时，不存在 a,b,c 使(1)成立。

当 $\varphi(c)=2$ 时，经检验， $(a,b,c)=(3,12,3)$。

1.2.3 若 $\varphi(a)=2$， $\varphi(b)=6$ 时， $\varphi(abc)=32+7\varphi(c)\ge 12\varphi(c)$，即 $\varphi(c)\le 6$，即 $\varphi(c)=1,2,4,6$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=39$，由引理 3 知(1)无解。

当 $\varphi(c)=2$ 时， $\varphi(abc)=46$， $abc=47,94$，经检验，(1)无解。

当 $\varphi(c)=4$ 时， $\varphi(abc)=60$， $abc=61,77,93,99,122,124,198,154,186$，经检验，(1)无解。

当 $\varphi(c)=6$ 时， $\varphi(abc)=74$，不存在 a,b,c 使得 $\varphi(abc)=74$，所以(1)无解。

1.2.4 若 $\varphi(a)=2$， $\varphi(b)=8$ 时， $\varphi(abc)=42+7\varphi(c)\ge 16\varphi(c)$，即 $\varphi(c)\le 4$，即 $\varphi(c)=1,2,4$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=49$，由引理 3 知(1)无解。

当 $\varphi(c)=2$ 时， $\varphi(abc)=56$， $abc=87,116,174$，经检验，(1)无解。

当 $\varphi(c)=4$ 时， $\varphi(abc)=70$， $abc=71,142$，经检验，(1)无解。

1.2.5 若 $\varphi(a)=2$， $\varphi(b)=10$ 时， $\varphi(abc)=52+7\varphi(c)\ge 20\varphi(c)$，即 $\varphi(c)\le 4$，即 $\varphi(c)=1,2,4$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=59$，由引理 3 知(1)无解。

当 $\varphi(c)=2$ 时， $\varphi(abc)=66$， $abc=67,134$，经检验，(1)无解。

当 $\varphi(c)=4$ 时， $\varphi(abc)=80$， $abc=123,164,165,176,200,246,264,300$，经检验， $(a,b,c)=(3,11,5)$，$(3,11,8)$。

1.2.6 若 $\varphi(a)=2$， $\varphi(b)=12$ 时， $\varphi(abc)=62+7\varphi(c)\ge 24\varphi(c)$，即 $\varphi(c)\le 3$，即 $\varphi(c)=1,2$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=69$，由引理 3 知(1)无解。

当 $\varphi(c)=2$ 时， $\varphi(abc)=76$，不存在 a,b,c 使得 $\varphi(abc)=76$，所以(1)无解。

1.2.7 若 $\varphi(a)=2$， $\varphi(b)=14$ 时，不存在 b 使得 $\varphi(b)=14$，所以(1)无解。

1.2.8 若 $\varphi(a)=2$， $\varphi(b)=16$ 时， $\varphi(abc)=82+7\varphi(c)\ge 32\varphi(c)$，即 $\varphi(c)\le 3$，即 $\varphi(c)=1,2$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=89$，由引理 3 知(1)无解。

当 $\varphi(c)=2$ 时， $\varphi(abc)=96$， $abc=97,119,153,194,195,208,218,224,238,260,280,288$，经检验， $(a,b,c)=(3,32,3)$， $(3,17,3)$。

1.2.9 若 $\varphi(a)=2$，$\varphi(b)\geq 18$ 时，$\varphi(c)\leq 2$。

当 $\varphi(c)=1$ 时，$\varphi(abc)$ 为奇数，由引理 3 知(1)无解。

当 $\varphi(c)=2$ 时，经检验不存在 a,b,c 使得(1)成立，所以(1)无解。

1.3 当 $\varphi(a)=4$，$\varphi(b)>1$ 时，有

$$\varphi(abc)=4+5\varphi(b)+7\varphi(c)。$$

1.3.1 若 $\varphi(a)=4$，$\varphi(b)=2$ 时，$\varphi(abc)=14+7\varphi(c)\geq 8\varphi(c)$，即 $\varphi(c)\leq 14$，即 $\varphi(c)=1,2,4,6,8,10,12,14$。

当 $\varphi(c)=1$ 时，$\varphi(abc)=21$，由引理 3 知(1)无解。

当 $\varphi(c)=2$ 时，$\varphi(abc)=28$，$abc=29,58$，经检验，(1)无解。

当 $\varphi(c)=4$ 时，$\varphi(abc)=42$，$abc=43,49,86,98$，经检验，(1)无解。

当 $\varphi(c)=6$ 时，$\varphi(abc)=56$，$abc=87,116,174$，经检验，(1)无解。

当 $\varphi(c)=8$ 时，$\varphi(abc)=70$，$abc=71,142$，经检验，(1)无解。

当 $\varphi(c)=10$ 时，$\varphi(abc)=84$，$abc=129,147,172,196,258,294$，经检验，(1)无解。

当 $\varphi(c)=12$ 时，$\varphi(abc)=98$，不存在 a,b,c 使得 $\varphi(abc)=98$，所以(1)无解。

当 $\varphi(c)=14$ 时，不存在 c 使得 $\varphi(c)=14$，所以(1)无解。

1.3.2 若 $\varphi(a)=4$，$\varphi(b)=4$ 时，$\varphi(abc)=24+7\varphi(c)\geq 16\varphi(c)$，即 $\varphi(c)\leq 2$，即 $\varphi(c)=1,2$。

当 $\varphi(c)=1$ 时，$\varphi(abc)=31$，由引理 3 知(1)无解。

当 $\varphi(c)=2$ 时，$\varphi(abc)=38$，不存在 a,b,c 使得 $\varphi(abc)=38$，所以(1)无解。

1.3.3 若 $\varphi(a)=4$，$\varphi(b)=6$ 时，$\varphi(abc)=34+7\varphi(c)\geq 24\varphi(c)$，即 $\varphi(c)\leq 2$，即 $\varphi(c)=1,2$。

当 $\varphi(c)=1$ 时，$\varphi(abc)=41$，由引理 3 知(1)无解。

当 $\varphi(c)=2$ 时，$\varphi(abc)=48$，$abc=65,104,105,112,130,140,144,156,168,180,210$，经检验，$(a,b,c)=(5,7,3)$，$(5,7,4)$，$(8,7,3)$，$(5,7,6)$，$(5,9,4)$，$(5,14,3)$，$(10,7,3)$。

1.3.4 若 $\varphi(a)=4$，$\varphi(b)\geq 8$ 时，$\varphi(c)\leq 1$，即 $\varphi(c)=1$。

当 $\varphi(c)=1$ 时，$\varphi(abc)$ 是奇数，由引理 3 知(1)无解。

情形 2 当 $(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)=0$ 时，有 $\varphi(b)=1$，$\varphi(a)$ 为任意数；$\varphi(a)=5$，$\varphi(b)$ 为任意数。

当 $\varphi(a)=5$，$\varphi(b)$ 为任意数时，由引理 3 知 $\varphi(a)=5$ 不存在，所以(1)无解。

当 $\varphi(b)=1$，$\varphi(a)$ 为任意数时，此时(1)式为 $\varphi(abc)=\varphi(a)+5+7\varphi(c)\geq\varphi(a)\varphi(c)$，即 $(\varphi(a)-7)(\varphi(c)-1)\leq 12$。

2.1 当 $\varphi(c)=1$ 且 $\varphi(a)$ 为任意时，$\varphi(abc)=12+\varphi(a)$，由引理 4 知，$\varphi(bc)=1,2<12+1+1$，所以方程有正整数解。

2.1.1 当 $\varphi(a)=1$ 时，$\varphi(abc)$ 是奇数，由引理 3 知(1)无解。

2.1.2 当 $\varphi(a)=2$ 时，$\varphi(abc)=14$，不存在 a,b,c 使得 $\varphi(abc)=14$，所以(1)无解。

2.1.3 当 $\varphi(a)=4$ 时，$\varphi(abc)=16$，$a=5,8,10,12$，有 $(a,b,c)=(8,2,2)$，$(10,2,2)$，$(12,2,2)$。

2.1.4 当 $\varphi(a)=12$ 时，$\varphi(abc)=24$，$a=13,21,26,28,36,42$，有 $(a,b,c)=(26,1,2)$，$(26,2,1)$，$(13,2,2)$，$(21,2,2)$，$(28,2,1)$，$(28,1,2)$，$(36,2,1)$，$(36,1,2)$，$(42,2,1)$，$(42,1,2)$。

2.2 当 $\varphi(c)=2$ 时，$\varphi(a)-7\leq 12$，即 $\varphi(a)=1,2,4,6,8,10,12,14,16,18$。

若 $\varphi(a)=1$，$\varphi(abc)=20$，$abc=25,33,44,50,66$，经检验，(1)无解。

若 $\varphi(a)=2,4,6,8,10,12,14,16,18$，$\varphi(abc)=19+\varphi(a)$，由引理 3 知(1)无解。

2.3 当 $\varphi(c)=4$ 时，$\varphi(a)-7\leq 4$，即 $\varphi(a)=1,2,4,6,8,10$。

若 $\varphi(a)=1$，$\varphi(abc)=34$，不存在 a,b,c 使得 $\varphi(abc)=34$，所以(1)无解。

若 $\varphi(a)=2,4,6,8,10$， $\varphi(abc)=33+\varphi(a)$，由引理 3 知(1)无解。

2.4 当 $\varphi(c)=6$ 时， $\varphi(a)-7\le 2$，即 $\varphi(a)=1,2,4,6,8$。

若 $\varphi(a)=1$， $\varphi(abc)=48$， $abc=65,104,105,112,130,140,144,156,168,180,210$，经检验，(1)无解。

若 $\varphi(a)=2,4,6,8$， $\varphi(abc)=47+\varphi(a)$，由引理 3 知(1)无解。

2.5 当 $\varphi(c)=8,10,12$ 时， $\varphi(a)-7\le 1$，即 $\varphi(a)=1,2,4,6,8$。

若 $\varphi(a)=1$，不存在 a,b,c 使得 $\varphi(abc)$ 成立，所以(1)无解。

若 $\varphi(a)=2,4,6,8$， $\varphi(abc)$ 是奇数，由引理 3 知(1)无解。

2.6 当 $\varphi(c)\ge 14$ 时， $\varphi(a)-7\le 0$，即 $\varphi(a)=1,2,4,6$。

若 $\varphi(a)=1$，不存在 a,b,c 使得 $\varphi(abc)$ 成立，所以(1)无解。

若 $\varphi(a)=2,4,6$， $\varphi(abc)$ 是奇数，由引理 3 知(1)无解。

情形 3 当 $(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)=1$ 时，有 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=2$，则 $\varphi(abc)=16+7\varphi(c)\ge 12\varphi(c)$，即 $\varphi(c)\le 3$，即 $\varphi(c)=1,2$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=23$，由引理 3 知(1)无解。

当 $\varphi(c)=2$ 时， $\varphi(abc)=30$， $abc=31,62$，经检验，(1)无解。

情形 4 当 $(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)=2$ 时，有 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=3$ 或 $\varphi(a)=7$， $\varphi(b)=2$，由引理 3 知(1)无解。

情形 5 当 $(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)=3$ 时，有 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=4$ 或 $\varphi(a)=8$， $\varphi(b)=2$。

5.1 若 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=4$，则 $\varphi(abc)=26+7\varphi(c)\ge 24\varphi(c)$， $\varphi(c)\le 1$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=33$，由引理 3 知(1)无解。

5.2 若 $\varphi(a)=8$， $\varphi(b)=2$，则 $\varphi(abc)=18+7\varphi(c)\ge 16\varphi(c)$， $\varphi(c)\le 2$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=25$，由引理 3 知(1)无解。

当 $\varphi(c)=2$ 时， $\varphi(abc)=32$， $abc=51,64,68,80,96,102,120$，经检验，(1)无解。

情形 6 当 $(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)=4$ 时，有 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=5$ 或 $\varphi(a)=9$， $\varphi(b)=2$ 或 $\varphi(a)=7$， $\varphi(b)=3$，由引理 3 知(1)无解。

情形 7 当 $(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)=5$ 时，有 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=6$ 或 $\varphi(a)=10$， $\varphi(b)=2$。

7.1 若 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=6$，则 $\varphi(abc)=36+7\varphi(c)\ge 36\varphi(c)$， $\varphi(c)\le 1$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=43$，由引理 3 知(1)无解。

7.2 若 $\varphi(a)=10$， $\varphi(b)=2$，则 $\varphi(abc)=20+7\varphi(c)\ge 20\varphi(c)$， $\varphi(c)\le 1$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=27$，由引理 3 知(1)无解。

情形 8 当 $(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)=6$ 时，有 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=7$ 或 $\varphi(a)=11$， $\varphi(b)=2$ 或 $\varphi(a)=7$， $\varphi(b)=4$ 或 $\varphi(a)=8$， $\varphi(b)=3$，由引理 3 知(1)无解。

情形 9 当 $(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)=7$ 时，有 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=8$ 或 $\varphi(a)=12$， $\varphi(b)=2$。

9.1 若 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=8$，则 $\varphi(abc)=46+7\varphi(c)\ge 48\varphi(c)$， $\varphi(c)\le 1$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=53$，由引理 3 知(1)无解。

9.2 若 $\varphi(a)=12$， $\varphi(b)=2$，则 $\varphi(abc)=22+7\varphi(c)\ge 24\varphi(c)$， $\varphi(c)\le 1$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=29$，由引理 3 知(1)无解。

情形 10 当 $(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)=8$ 时，有 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=9$ 或 $\varphi(a)=13$， $\varphi(b)=2$ 或 $\varphi(a)=7$， $\varphi(b)=5$ 或 $\varphi(a)=9$， $\varphi(b)=3$，由引理 3 知(1)无解。

情形 11 当 $(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)=9$ 时，有 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=10$ 或 $\varphi(a)=14$， $\varphi(b)=2$ 或 $\varphi(a)=8$， $\varphi(b)=4$。

11.1 若 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=10$， 则 $\varphi(abc)=56+7\varphi(c)\ge 60\varphi(c)$， $\varphi(c)\le 1$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=63$， 由引理 3 知(1)无解。

11.2 若 $\varphi(a)=14$， $\varphi(b)=2$， 则 $\varphi(abc)=24+7\varphi(c)\ge 28\varphi(c)$， $\varphi(c)\le 1$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=31$， 由引理 3 知(1)无解。

11.3 若 $\varphi(a)=8$， $\varphi(b)=4$， 则 $\varphi(abc)=28+7\varphi(c)\ge 32\varphi(c)$， $\varphi(c)\le 1$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=35$， 由引理 3 知(1)无解。

情形 12 当 $(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)=10$ 时，有 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=11$ 或 $\varphi(a)=15$， $\varphi(b)=2$ 或 $\varphi(a)=7$， $\varphi(b)=6$ 或 $\varphi(a)=10$， $\varphi(b)=3$，由引理 3 知(1)无解。

情形 13 当 $(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)=11$ 时，有 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=12$ 或 $\varphi(a)=16$， $\varphi(b)=2$。

13.1 若 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=12$， 则 $\varphi(abc)=66+7\varphi(c)\ge 72\varphi(c)$， $\varphi(c)\le 1$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=73$， 由引理 3 知(1)无解。

13.2 若 $\varphi(a)=16$， $\varphi(b)=2$， 则 $\varphi(abc)=26+7\varphi(c)\ge 32\varphi(c)$， $\varphi(c)\le 1$。

当 $\varphi(c)=1$ 时， $\varphi(abc)=33$， 由引理 3 知(1)无解。

情形 14 当 $(\varphi(a)-5)(\varphi(b)-1)=12$ 时，有 $\varphi(a)=6$， $\varphi(b)=13$ 或 $\varphi(a)=17$， $\varphi(b)=2$ 或 $\varphi(a)=7$， $\varphi(b)=7$ 或 $\varphi(a)=11$， $\varphi(b)=3$ 或 $\varphi(a)=8$， $\varphi(b)=5$ 或 $\varphi(a)=9$， $\varphi(b)=4$，由引理 3 知(1)无解。

综合上述结论可知(1)式共有 18 组正整数解，证毕。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(No. 11226038，11371012)，陕西省教育厅专项基金(14JK1311)。

参考文献

[1] 闵嗣鹤, 严士健. 初等数论[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2003: 58.

[2] 张四保. 有关 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的方程的正整数解[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(20): 302-305.

[3] 官春梅, 张四保. 与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 有关的方程的正整数解[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(9): 221-225.

[4] 孙树东. 一个与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 有关的方程的正整数解[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2015, 16(2): 161-164.

[5] 张四保, 席小忠. 有关方程 $\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的正整数解[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2016, 39(1): 41-47.

[6] 孙翠芳, 程智. 关于方程 $\varphi(abc)=2(\varphi(a)+\varphi(b)+\varphi(c))$ [J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(23): 267-271.

[7] 张四保, 杜先存. 一个包含 Euler 函数方程的正整数解[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2015, 49(4): 497-501.

[8] 张四保. 不定方程 $\varphi(xyz)=4(\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z))$ 的解[J]. 东北石油大学学报, 2013, 37(6): 113-118.

[9] 白继文, 赵西卿. 与 Euler 函数有关的一个方程的正整数解[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2016, 52(4): 17-21.

[10] 张四保, 杨燕妮, 姜莲霞, 席小忠. 与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 有关的一个四元不定方程的解[J]. 重庆理工大学学报(自然科学版), 2019, 33(11): 214-221.

[11] 夏衣旦·莫合德, 张四保, 熊满玉. 一个有关 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的非线性方程的解[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2018, 39(2): 4-7.

[12] 姜莲霞. 包含 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的一个非线性方程的正整数解[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2018, 19(6): 719-723.

[13] 袁合才, 王波, 王晓峰. 三元变系数混合型欧拉函数方程 $\varphi(abc)=2\varphi(a)\varphi(b)+6\varphi(c)$ 的正整数解[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(12): 303-307.

[14] 杨张媛, 赵西卿. 方程 $\varphi(abc)=\varphi(a)+2\varphi(b)+3\varphi(c)$ 的正整数解[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2018, 38(2): 38-42.

[15] 张明丽, 高丽. 关于一个三元变系数欧拉函数方程的正整数解[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2020, 54(1): 23-29.

[16] Rosen, K.H. (2005) Elementary Number Theory and Its Applications. Fifth Edition, Pearson Education, Inc., Addison Wesley, Boston, 233-245.