Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(10), 1865-1878
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.910215

F格上的度量问题–第二类度量

江婉文[1]**，陈 鹏**[2]

[1]罗格斯大学, 新伯朗士威克文理学院统计系, 美国
[2]中国科学院微电子研究所，北京
Email: jiangww_1997@126.com, chenpeng@ime.ac.cn

收稿日期：2020年10月7日；录用日期：2020年10月22日；发布日期：2020年10月29日

摘 要

本文研究了点式一类度量-第二类度量，通过$O_2 - nbd$映射簇对它进行了刻画，并进一步证明了它的诱导拓扑和它的余拓扑是一致的。另外，我们还证明了第二类度量是$Q - C_I$的，最后，证明了$L-$实直线$\mathbf{R}(L)$满足第二类度量和它的几个球映射的关系。

关键词

第一类度量，第二类度量，L-实直线，$R - nbd$映射簇，$O_2 - nbd$映射簇，$Q - C_I$

Metric Problems on F-Lattices–The Second Metric

Wanwen Jiang[1]**, Peng Chen**[2]

[1]Department of Statistics, School of Arts and Sciences, Rutgers University-New Brunswick, USA
[2]Institute of Microelectronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing
Email: jiangww_1997@126.com, chenpeng@ime.ac.cn

Received: Oct. 7^{th}, 2020; accepted: Oct. 22^{nd}, 2020; published: Oct. 29^{th}, 2020

文章引用: 江婉文, 陈鹏. F格上的度量问题–第二类度量[J]. 应用数学进展, 2020, 9(10): 1865-1878.
DOI: 10.12677/aam.2020.910215

Abstract

In this paper, firstly, we investigate a kind of pointwise metric-the second metric, and characterize it by using $O_2 - nbd$ mappings. Secondly, we prove that its induced topology is consistent with its cotopology. In addition, we also prove that the second metric is $Q - C_I$. Finally, we assert that L–real line is the second metric, and present the relationships between its several basic spheres.

Keywords

The First Metric, The Second Metric, L–Real Line, $R - nbd$ Mappings, $O_2 - nbd$ Mappings, $Q - C_I$

1. 预备知识

在文献 [1]里,我们给出了F格上的一种点式度量,并对这种定式度量进行了研究.在文献 [2]里,通过使用不同的连续性条件,我们把这种点式度量分为四类.文献 [2]已经研究了第一类.下面将研究第二类.

定义1.1 [1]F格L^X上的一个点式拟度量(简称点式拟度量)是一个映射$p : M \times M \to [0, +\infty)$,且满足下列条件:

(B1) $\forall a, b \in M$,如果$a \geq b$,那么$p(a, b) = 0$;

(B2) $\forall a, b, c \in M$,$p(a, c) \leq p(a, b) + p(b, c)$.

一个点式拟度量p被叫做一个点式伪度量(简称点式伪度量),如果p还满足下列条件:

(B3) $\forall a, b \in M$,$\exists x \not\leq b'$使得$p(a, x) < r \Leftrightarrow \exists y \not\leq a'$使得$p(b, y) < r$.

一个点式伪度量p,如果它还满足条件:

(B4) $\forall a, b \in M$,如果$p(a, b) = 0$,则$a \geq b$,
则称p是L^X上一个的点式度量(简称点式度量).

定义1.2 [2] [3] 一个映射$p : M \times M \to [0, +\infty)$是$L^X$上的第一类伪度量(或点式$Erceg$伪度量)当

且仅当p满足条件(B1),(B2),(B3)和条件① $p(a,b)=\bigvee_{c\ll b} p(a,c)$.

定义1.3 [2] 设$p: M\times M\longrightarrow [0,\infty)$是映射.$a,b\in M$,$\forall r\in[0,+\infty)$, 定义

(1) $U_r(a)=\bigvee\{c\in M\mid p(a,c)<r\}$; (2) $B_r(a)=\bigvee\{c\in M\mid p(a,c)\le r\}$;

(3) $Q_r(b)=\bigvee\{c\in M\mid p(c,b)>r\}$; (4) $P_r(b)=\bigvee\{c\in M\mid p(c,b)\ge r\}$.

映射$U_r(a): M\longrightarrow L^X$被称是$a$的第一类开邻域映射, $\{U_r(a)\mid a\in M, r\in[0,+\infty)\}$被称为$p$的第一类开邻域映射簇(简称$O_1-nbd$簇).

映射$B_r(a): M\longrightarrow L^X$被称是$a$的闭邻域映射, $\{B_r(a)\mid a\in M, r\in[0,+\infty)\}$被称为$p$的闭邻域映射簇(简称$C-nbd$簇).

映射$Q_r(b): M\longrightarrow L^X$被称是$a$的第二类开邻域映射, $\{Q_r(b)\mid b\in M, r\in[0,+\infty)\}$被称为$p$的第二类开邻域映射簇(简称$O_2-nbd$簇).

映射$P_r(b): M\longrightarrow L^X$被称是$a$的远-邻域映射, $\{P_r(b)\mid b\in M, r\in[0,+\infty)\}$被称为$p$的远-邻域映射簇(简称$R-nbd$映射簇).

定理1.1 [1] 如果映射$p: M\times M\to[0,+\infty)$满足(B3),则$\bigvee_{b\ll a} U_r(b)=U_r(a)$.

定义1.4 [1]设映射$p: M\times M\to[0,+\infty)$.$A\in L^X$,定义$D_r(A)=\bigvee\{b\in M\mid \exists a\ll A,\ p(a,b)<r\}$.

根据定义1.4和定理1.1,当$A\in L^X$,在A是分子时,即$A=b\in M$时,有下列结果:

推论1.1 [1] 设映射$p: M\times M\to[0,+\infty)$满足$(B3)$,$b\in M$,则$U_r(b)=D_r(b)$.

定义1.5 [1]设映射$p: M\times M\to[0,+\infty)$ 满足(B3).对每个$A\in L^X$和$\forall r>0$,定义映射$U_r(A)=\bigvee_{a\ll A} U_r(a)$.

根据定义,显然有下列结果:

定理1.2 [1]设映射$p: M\times M\to[0,+\infty)$ 满足(B3),则有下式成立:

(I) $D_r(A)=\bigvee_{a\ll A} D_r(a)$;

(II) $U_r(A)=D_r(A)$.

定义1.6 [1]设映射$p: M\times M\to[0,+\infty)$,且$A\in L^X$,定义$D_{-r}(A)=\bigvee\{a\in M\mid D_r(a)\le A\}$.

定义1.7 [4] [5] (L^X,δ)是L-$fuzzy$拓扑空间.$a\in M$,$A\in\delta'$(即A是闭集),如果有$a\not\le A$,则称A 是a的闭远域.设$B\in L^X$, 如a 有闭远域A使得$B\le A$,则称B是a的远域,同时称B'是a的重域.

定义1.8 [4] [5] (i) a的重域族$Q(a)$称为a的$Q-neighborhoods$基,若对a的任一重域η, 存在$\xi\in Q(a)$ 使得$\xi\le\eta$;

(ii) (L^X,δ)称为是$Q-C_1$的,若对每一个$a\in M$有可数的$Q-neighborhoods$基.

定理1.3 [1] 设p是点式伪度量,则有$\bigvee_{z\not\le b'} P_\lambda(z)'\le D_\lambda(b)$.

定理1.4 [2] 如果p是第一类伪度量,那么

(I) $Q_r(a)=\bigvee\limits_{r<s}Q_s(a)$;

(II) $\bigvee\limits_{c\ll a}Q_r(c)=Q_r(a)$.

定理1.4 [1] 设p是点式伪度量,则$P_r(a)$在ζ_p中是一个闭集.

定理1.5 [1] 设p是点式拟度量,则$\{D_{-r}(\alpha)|\alpha\in MJ,r\in[0,+\infty)\}$是$L^X$上的余拓扑基,从而可得$L^X$ 上的余拓扑ψ_p.

定理1.6 [1] 设p是点式拟度量,则O_1-nbd簇$\{U_r(a)|a\in M,r\in[0,+\infty)\}$ 是L^X上的拓扑基,记对应的拓扑为ζ_p.

定理1.7 [1] 如果p是点式伪度量,则$\psi_p=\zeta_p'$.

定理1.8 [1] 设p是点式拟度量,$a\in M$,则$\forall r>0$有$\bigwedge\limits_{u<r}P_u(a)=P_r(a)$.

定理1.9 [1] 设p是点式拟度量,且$\bigwedge\limits_{c\ll a}p(c,a)=\lambda>0$,则$a\not\leq P_r(a)\Leftrightarrow r>\lambda$.

定理1.10 [4] L^X上的一个第一类伪度量(或$Erceg$伪度量)就是等价于满足下面条件的一族映射$\{D_r\mid D_r:L^X\to L^X,r>0\}$:

(D1) $D_r(A)\geq A$;

(D2) $D_r(\bigvee\limits_{i\in\Omega}A_i)=\bigvee\limits_{i\in\Omega}D_r(A_i)$;

(D3) $D_r\circ D_s\leq D_{r+s}$;

(D4) $D_r=\bigvee\limits_{s<r}D_s$;

(D5) $D_r^{-1}=D_r$.

定理1.11 [5] [6] [7] $L-fuzzy$实直线(或称L-实直线)$\mathbf{R}(L)$就是一个满足下面条件的逆序映射$\lambda:\mathbf{R}\to L$的等价类的集合:

$$\bigvee_{t\in\mathbf{R}}\lambda(t)=1,\ \bigwedge_{t\in\mathbf{R}}\lambda(t)=0.$$

这里,两个映射λ,μ等价当且仅当$\forall t\in\mathbf{R},\lambda(t-)=\mu(t-),\lambda(t+)=\mu(t+)$.$\mathbf{R}(L)$上的标准$L-fuzzy$拓扑是通过子基$\{l_t,r_t|t\in\mathbf{R}\}$生成.$\{l_t,r_t\}$分别定义如下:

$$l_t:\mathbf{R}(L)\to L,l_t(\lambda)=\lambda(t-)^{'},$$

$$r_t:\mathbf{R}(L)\to L,r_t(\lambda)=\lambda(t+).$$

如果$A\subset\mathbf{R}$,那么有$\bigvee\limits_{t\in A}l_t=l_{supA}$和$\bigvee\limits_{t\in A}r_t=r_{infA}$,且对每个$t\in\mathbf{R}$和$\forall s>0$,有$l_t\leq r_t^{'}\leq l_{t+s}$和$r_t\leq l_t^{'}\leq r_{t-s}$.

定理1.12 [7] 在$\mathbf{R}(L)$中,定义映射$\varepsilon:M(L^{\mathbf{R}(L)})\to\mathbf{R}$ 和$\sigma:M(L^{\mathbf{R}(L)})\to\mathbf{R}$使得$\forall e\in M(L^{\mathbf{R}(L)})$有:$\varepsilon(e)=sup\{t|e\leq l_t^{'}\},\sigma(e)=inf\{t|e\leq r_t^{'}\}$,则有

(a) $\varepsilon(e)=max\{t|e\leq l_t^{'}\},\sigma(e)=min\{t|e\leq r_t^{'}\}$.

(b) 如果$a, b \in M(L^{\mathbf{R}(L)})$且$a \le b$,则$\varepsilon(a) \ge \varepsilon(b)$和$\sigma(a) \le \sigma(b)$.

(c) 如果令$p(b, a) = max\{\varepsilon(b) - \varepsilon(a), \sigma(a) - \sigma(b), 0\}$,则$p$是$Shi$伪度量且$p$的$R - nbd$映射簇$\{P_r \mid r > 0\}$ 满足下列条件: $P_r(a) = l'_{\varepsilon(a)+r} \bigvee r'_{\sigma(a)-r}$.

2. 第二类度量性质

定义2.1 一个映射$p : M \times M \to [0, +\infty)$是第二类连续性点式伪度量(简称二类伪度量),如果$p$是一个点式伪度量且还满足下列条件

② $p(a, b) = \bigwedge\limits_{c \ll a} p(c, b)$.

如果二类伪度量p还满足条件(B4),则称p是第二类度量.

文 [3] [7] [8]中研究的点式Shi伪度量(度量)实际上就是我们给出的第二类伪度量(度量).

定理2.1 设p是第二类伪度量,则

$$\forall c, b \in M, c \le P_r(b) \Leftrightarrow p(c, b) \ge r.$$

证明 只须证明$c \le P_r(b) \Rightarrow p(c, b) \ge r$.取$c \in M$且$c \le P_r(b)$.那么$\forall h \ll c$,$\exists e \in M$使得$e \ge h$且$p(e, b) \ge r$. 由$p$满足(B1)和(B2)可知

$$r \le p(e, b) \le p(e, h) + p(h, b) = p(h, b).$$

因此由②得$p(c, b) = \bigwedge\limits_{h \ll c} p(h, b) \ge r$.

从证明可以看出:定理2.1结论成立,映射p仅需要满足(B1)、(B2)和②就可以了.

在文 [1]中,我们证明了定理1.3:当p是点式伪度量,则有$\bigvee\limits_{z \not\le b'} P_\lambda(z)' \le D_\lambda(b)$.如果$p$是第二类伪度量,则有:

定理2.2 设p是第二类伪度量,则有$\bigvee\limits_{z \not\le b'} P_\lambda(z)' = D_\lambda(b)$.

证明 由此,须证明$\bigvee\limits_{z \not\le b'} P_\lambda(z)' \ge D_\lambda(b)$.

设$a \ll D_\lambda(b)$.则$p(b, a) < \lambda$.对$\forall x \not\le a'$,即$a \not\le x'$,由(B3)存在$z \not\le b'$ 使得$p(x, z) < \lambda$,由定理2.1可得$x \not\le P_\lambda(z)$.因此知$x \not\le \bigwedge\limits_{z \not\le b'} P_\lambda(z)$.因为由$x \not\le a'$暗示$x \not\le \bigwedge\limits_{z \not\le b'} P_\lambda(z)$, 可得$\bigwedge\limits_{z \not\le b'} P_\lambda(z) \le a'$,即$a \le \bigvee\limits_{z \not\le b'} P_\lambda(z)'$. 从而知$\bigvee\limits_{z \not\le b'} P_\lambda(z)' \ge D_\lambda(b)$.命题得证.

定理2.3 设p是点式拟度量,如果满足②,则①$\forall a, b \in M$,$p(a, b) = \bigvee\limits_{e \ll b} p(a, e)$成立.

证明 $p(a, b) \ge \bigvee\limits_{e \ll b} p(a, e)$显然.设$p(a, b) > \bigvee\limits_{e \ll b} p(a, e)$,那么$\exists s, r > 0$使得$p(a, b) > s > r > \bigvee\limits_{e \ll b} p(a, e)$.从而$s < p(a, b) \le p(a, e) + p(e, b) < p(e, b) + r \Rightarrow p(e, b) > s - r$.由$e \ll b$的任意性

得$\bigwedge\limits_{e\ll b} p(e,b) \geq s-r$,这和$\bigwedge\limits_{e\ll b} p(e,b)=0$矛盾,所以$p(a,b)=\bigvee\limits_{e\ll b} p(a,e)$.

定理2.4 设p是第二类伪度量,则$\forall a,b\in M$,有$\bigvee\limits_{x\not\leq a'} p(x,b)=\bigvee\limits_{y\not\leq b'} p(y,a)$.

为了证明定理2.4,我们需要下列引理2.1.

引理2.1 设映射p是点式拟度量,且满足①,则$\forall c,b\in M, a\leq B_r(b)\Leftrightarrow p(a,b)\leq r$.

证明 须证$c\leq B_r(b)\Rightarrow p(b,c)\leq r$.取$c\in M$且$c\leq B_r(b)$.那么$\forall h\ll c$,$\exists e\in M$ 使得$e\geq h$且$p(b,e)\leq r$. 由p满足(B1)和(B2)可知$p(b,h)\leq p(b,e)+p(e,h)=p(b,e)\leq r$.因此由①得$p(b,c)=\bigvee\limits_{h\ll c} p(b,h)\leq r$.

定理2.4的证明 显然$\forall a,b\in M$, $\bigvee\limits_{x\not\leq a'} p(x,b)=\bigvee\limits_{y\not\leq b'} p(y,a)$等价于下面式子:

$(B3)^*$ $\exists x\not\leq a', p(x,b)>r\Leftrightarrow \exists y\not\leq b', p(y,a)>r$.

现证$(B3)^*$成立.设$\exists x\not\leq a'$使得$p(x,b)>r$,知$\exists s$使得$p(x,b)>s>r$.由引理2.1得$b\not\leq B_s(x)$.再由定理2.2和推论1.1可得:

$$b\not\leq B_s(x)\geq U_s(x)=\bigvee_{z\not\leq x'} P_s(z)'(U_s(x)=D_s(x)).$$

由此知:为每个$z\not\leq x'$, 得$b\not\leq P_s(z)'$.由于$x\not\leq a'$,即$a\not\leq x'$, 当然有$b\not\leq P_s(a)'$,也就是$P_s(a)\not\leq b'$.因此这里$\exists y\in M$ 且$y\leq P_s(a)$使得$y\not\leq b'$.由定理2.1知$p(y,a)\geq s>r$.同理,反之可证.从而命题成立.

定理2.5 设p是点式拟度量,且满足②.则p是第二类伪度量$\Leftrightarrow p$满足$(B3)^*$.

证明 $(\Rightarrow)$. 由定理2.4可得.

$(\Leftarrow)$. 须证p满足(B3).

首先证明$\bigvee\limits_{z\not\leq b'} Q_s(z)'\leq B_s(b)$.

设$a\not\leq B_r(b)$,那么存在$c\ll a$使得$c\not\leq B_r(b)$,由定理2.3和引理2.1知$p(b,c)>r$.为每个$z\not\leq b'(b\not\leq z')$,根据$(B3)^*$知存在$x\not\leq c'$使得$p(x,z)>r$,这表明$x\leq Q_r(z)$.因此$Q_r(z)\not\leq c'$,即$c\not\leq Q_r(z)'$.因为对每个$z\not\leq b'$, 根据$c\ll a$ 得到$a\not\leq Q_r(z)'$,即为每个$z\not\leq b'$有$B_r(b)\geq Q_r(z)'$, 从而当然有$B_r(b)\geq\bigvee\limits_{z\not\leq b'} Q_s(z)'$,即$\bigwedge\limits_{z\not\leq b'} Q_s(z)\geq B_s(b)'$成立.

由此可得下列式：

$$b\not\leq\bigwedge_{x\not\leq a'} P_s(x)\geq\bigwedge_{x\not\leq a'} Q_s(x)\geq B_s(z)'\geq U_r(a)'.$$

即可得$U_r(a)\not\leq b'$.由此存在$y\leq U_r(a)$使得$y\not\leq b'$且$p(a,y)<r$.同样,反之可证.

定义2.2 映射F, $G: M\rightarrow L^X$, $F\circ G$与$F\odot G$分别指$\forall a,b\in M$有$F\circ G(a)=\bigvee\{F(b)|b\leq G(a)\}$和$F\odot G(a)=\bigwedge\{F(b)|b\not\leq G(a)\}$.

定理2.6 设p是第二类伪度量,且$\{Q_r(b)\mid b\in M, r\in[0,+\infty)\}$是它的$O_2-nbd$映射簇,则有下面的结论:

(R1) $\forall a \in M, \bigwedge\limits_{r>0} Q_r(a) = \underline{0}$;

(R2) $\forall a, b \in M, a \leq b, \forall r \in (0, +\infty), b \not\leq Q_r(a)$;

(R3) $\forall r, s \in (0, +\infty), Q_r \odot Q_s \geq Q_{r+s}$;

(R4) $\forall a \in M, Q_r(a) = \bigvee\limits_{r<s} Q_s(a)$;

(R5) $\forall a, b \in M, Q_r(a) \not\leq b' \Leftrightarrow Q_r(b) \not\leq a'$.

证明 (R1)假设$\bigwedge\limits_{r>0} Q_r(a) \neq \underline{0}$,那么存在$b \in M$使得$b \leq \bigwedge\limits_{r>0} Q_r(a)$, 因而$\forall r > 0, b \leq Q_r(a) \leq P_r(a)$,由此得$p(b,a) \geq r$.由于$r$是任意的,所以$p(b,a) = +\infty$,矛盾.

(R2)由$a \leq b$,那么$\forall r \in (0, +\infty)$,根据(B1)有$p(b,a) = 0 < r$,由此得$b \not\leq Q_r(a)$,否则,如果$b \leq Q_r(a)$,由$Q_r(a) \geq P_r(a)$得$p(b,a) \geq r$,矛盾.

(R3)设$c \ll Q_{r+s}(a)$,则有$p(c,a) > r+s$.现证$c \leq Q_r \odot Q_s(a)$.假如$c \not\leq Q_r \odot Q_s(a) = \bigwedge\{Q_r(b) | b \not\leq Q_s(a)\}$,那么存在$b \in M$ 使得$c \not\leq Q_r(b)$和$b \not\leq Q_s(a)$, 由此知$p(c,b) \leq r$和$p(b,a) \leq s$,根据(B2)得$p(c,a) \leq r+s$,矛盾,因此有$Q_r \odot Q_s \geq Q_{r+s}$.

(R4)由定理1.4中(I)和定理2.3直接可得.

(R5)由定理2.5可得.

定理2.7 设映射簇$\{Q_r | Q_r : M \to L^X, r \in [0, +\infty)\}$满足(R1)-(R5),定义映射$p : M \times M \longrightarrow [0, +\infty)$如下:

$$\forall a, b \in M, p(b,a) = \bigwedge\{r | b \not\leq Q_r(a)\},$$

则p是第二类伪度量且$p(b,a) = \bigvee\{r | b \leq Q_r(a)\}$,$p$的$O_2 - nbd$映射簇恰好是$\{Q_r | r \in [0, +\infty)\}$.

证明 首先证明: (1) $p(b,a) > r \Rightarrow b \leq Q_r(a)$并且$b \leq Q_r(a) \Rightarrow p(b,a) \geq r$.

实际上,根据$b \not\leq Q_r(a)$,得$p(b,a) = \bigwedge\{u \mid b \not\leq Q_u(a)\} \leq r$.即$p(b,a) > r \Rightarrow b \leq Q_r(a)$.设$p(b,a) = \bigwedge\{u \mid b \not\leq Q_u(a)\} < r$,则存在$u < r$使得$b \not\leq Q_u(a)$,由(R4)可知$Q_u(a) \geq Q_r(a)$,因此$b \not\leq Q_r(a)$,即$b \leq Q_r(a) \Rightarrow p(b,a) \geq r$.

我们还要证p确实是从$M \times M \to [0, +\infty)$的映射.让$a, b \in M$,根据$\bigwedge\limits_{r>0} Q_r(a) = \underline{0}$知$b \not\leq \bigwedge\limits_{r>0} Q_r(a)$,因此存在$r > 0$使得$b \not\leq Q_r(a)$,由此可得$p(b,a) \leq r$,这显示$p(b,a) \in [0, +\infty)$.

(B1) 如果$\forall a, b \in M, a \leq b$,则由(R2)知$\forall r \in (0, +\infty)$有$b \not\leq Q_r(a)$,由(1)得$p(b,a) \leq r$,由$r$的任意性得$p(b,a) = 0$.

(B2) 设$p(b,a) = r, p(c,b) = s$,那么$\forall t > 0$有$p(b,a) < r+t$和$p(c,b) < s+t$由(1)知有$b \not\leq Q_{r+t}(a)$且$c \not\leq Q_{s+t}(b)$,因此$c \not\leq Q_{s+t} \odot Q_{r+t}(a)$,由(R3)知$c \not\leq Q_{r+s+2t}(a)$,由(1) 这显示$p(c,a) \leq r+s+2t$,因$t$是任意的,所以有$p(c,a) \leq r+s$,即得$p(c,a) \leq p(c,b) + p(b,a)$.

② 如果$a, b \in M, p(b,a) = 0$,那么由(1)知$\forall r > 0$有$b \not\leq Q_r(a)$,由此知$\exists c \ll b$ 使得$c \not\leq Q_r(a)$,因而有$p(c,a) \leq r$,进而知$\bigwedge\limits_{c \ll b} p(c,a) \leq r$,由$r$的任意性知$\bigwedge\limits_{c \ll b} p(c,a) = 0$.

如果$p(b,a) = r > 0$.因p已满足(B1)与(B2),所以有$p(b,a) \leq \bigwedge\limits_{c \ll b} p(c,a)$.因此只须证$p(b,a) \geq$

$\bigwedge_{c\ll b} p(c,a)$.令$\bigwedge_{c\ll b} p(c,a) = u > 0$.设$s < \bigwedge_{c\ll b} p(c,a) = u$,可知对$\forall c \ll b$有$s < p(c,a)$,由(1)知$c \leq Q_s(a)$,进而知$b \leq Q_s(a)$,再由(R4)和$p(b,a) = \bigvee\{r|b \not\leq Q_r(a)\}$得$p(b,a) > s$.因$s < u$是任意的,所以得$p(b,a) \geq u = \bigwedge_{c\ll b} p(c,a)$.

(B3) 由定理2.5可直接得.

让$s = \bigvee\{r|b \leq Q_r(a)\}$,现证$s = p(b,a)$.如果$s < p(b,a)$,则存在$t$满足$s < t < p(b,a)$,由$\bigvee\{r|b \leq Q_r(a)\} < t$,则可得$b \not\leq Q_t(a)$.再由(1)可得$p(b,a) \leq t$,矛盾.如果$s > p(b,a)$,那么存在$t$满足$s > t > p(b,a)$.由$s = \bigvee\{r|b \leq Q_r(a)\} > t$,存在$r > t$使得$b \leq Q_r(a)$,由(1)得$p(b,a) \geq r > t$, 矛盾,因此$s = p(b,a)$.

现证p的$O_2 - nbd$映射簇恰是$\{Q_r|r \in [0,+\infty)\}$.

设p的$O_2 - nbd$映射簇是$\{Q'_r|r \in [0,+\infty)\}$.我们能证对每个$r \in (0,+\infty)$,$Q'_r = Q_r$,即须证对每个$a \in M$,有$Q'_r(a) = Q_r(a)$.

证明如下:由(1)知:如果$p(b,a) > r$则$b \leq Q_r(a)$,因此有$Q'_r(a) \leq Q_r(a)$.反之,设$b \ll Q_r(a) = \bigvee_{r<s} Q_s(a)$,那么存在$s > r$使得$b \leq Q_s(a)$, 根据(1)得$p(b,a) \geq s$,进而$p(b,a) > r$, 由此可得$b \leq Q'_r(a)$,因而$Q_r(a) \leq Q'_r(a)$.当$r = 0$,$Q_0(a) = \bigvee_{0<s} Q_s(a) = \bigvee_{0<s} Q'_r(a) = Q'_0(a)$也成立.综上所述,命题被证.

3. 第二类度量进一步性质

定理3.1 设p是第二类伪度量,则下列结论:

(I) $R - nbd$映射簇$\{P_r(b)|r \in [0,+\infty), b \in M\}$是闭拓扑基,记这个拓扑为$\eta_p$;

(II) η_p=ζ'_p.

证明 (I) 须证$\{P_r(b)|r \in [0,+\infty), b \in M\}$的任意子集的交构成一个拓扑.即

$$\eta_p = \{\bigwedge_{i\in\Gamma} P_i(b_i)|\Gamma \subseteq [0,+\infty), b_i \in M\}$$

由于$\bigwedge\emptyset = \underline{1}$,$a \in M$, $\bigwedge_{r>0} P_r(a) = \emptyset$.从而

(i) $\underline{0}, \underline{1} \in \eta_p$;

(ii) $A \subseteq \eta_p$,$B \subseteq \eta_p$,根据η_p定义,$A \bigwedge B \in \eta_p$显然;

(iii) 须证明对$\forall a, b \in M$和$\forall r, s \in [0,+\infty)$,$P_r(a) \vee P_s(b)$是$\{P_r(a) \mid a \in M, r \in (0,+\infty)\}$中一些元素的交.

当$r = 0$、$s = 0$或者$r = s = 0$时,对$\forall a, b \in M$,$P_0(a) = \underline{1}$,从而$P_0(a) \vee P_s(b) = \underline{1} \in \eta_p$.

当$\forall r, s \in (0,+\infty)$时,对$\forall a, b \in M$,让$A = P_r(a) \vee P_s(b)$. 那么根据定理1.4,$A$是$\zeta_p$中的一个闭

DOI: 10.12677/aam.2020.910215

集.因此A'在ζ_p中能够表成下列形式: $A' = \bigvee_i D_{r_i}(c_i)$, 即

$$A = (\bigvee_i D_{r_i}(c_i))' = \bigwedge_i D_{r_i}(c_i)',$$

根据定理2.2我们能够得到

$$A = \bigwedge_i \bigwedge_{z \not\leq c_i'} P_{r_i}(z).$$

由此得$\{P_r(b) | r \in [0, +\infty), b \in M\}$构成一个闭拓扑基,$\eta_p$是它的生成拓扑.

(II) 由定理2.2知对每个$D_r(b)$,它在η_p中是开集,且由定理1.4,对每个$P_r(b)$,它在ζ_p'中是闭集,这蕴含η_p=ζ_p'. 证毕.

从定理3.1的证明过程可知,只要$\bigvee_{z \not\leq b'} P_\lambda(z)' = D_\lambda(b)$成立,就有定理3.1结论成立,

推论3.1 设p是第二类伪度量,则η_p=ψ_p.

证明 由定理1.7和定理3.1中的(I)可得.

定理3.2 p是第二类伪度量,则：

(1).$a \not\leq P_r(a)$⇔$r > 0$;

(2).$\{P_r(a)'\}$是a的一个$Q - neighborhoods$基,即ζ_p是$Q - C_I$.

证明 (1).由于p是第二类伪度量,得$\bigwedge_{c \ll a} p(c, a) = 0$.根据定理1.9知命题成立.

(2).设B是a远域.则$\exists a$的闭远域A,满足$B \leq A$.由定理3.1,$\{P_r(b) | r \in [0, +\infty), b \in M\}$是$\zeta_p$的闭拓扑基得$A = \bigwedge P_{r_i}(b_{r_i})$.由$a \not\leq A \Rightarrow \exists P_{r_i}(b_{r_i})$满足$a \not\leq P_s(b)$(记$P_{r_i}(b_{r_i}) = P_s(b)$).令$p(a, b) = t$,知$p(a, b) = t < s$.设$\forall e$满足$p(e, b) \geq s$.由$s \leq p(e, b) \leq p(e, a) + p(a, b) = p(e, a) + t \Rightarrow s - t \leq p(e, a)$,由于$s - t \leq p(e, a) \Rightarrow e \leq P_{s-t}(a)$,从而$P_s(b) \leq P_{s-t}(a)$.

对任意$r > 0$,根据$P_r(a)$的定义,这里存在$t \in Q^+ = \{$全体正有理数$\}$且$0 < t < r$使得$P_r(a) \leq P_t(a)$.即B是a远域,由(1)必存在$t \in Q^+$满足$a \not\leq P_t(a)$ 且$B \leq P_t(a)$,由此知$\{P_t(a)', t \in Q^+\}$是a的一个$Q - neighborhoods$基,由Q^+的可数性知ζ_p是$Q - C_I$.

定理3.3 设p是第一类伪度量,则ζ_p不是$Q - C_I$.

为了证明这个结论只需给出一个反例就够.

1984年,梁基华在文献 [4]中曾举下面例子来说明第一类伪度量拓扑不是$Q - C_I$的,但未给出详细证明.例子如下:

例子3.1 设X, Y是两个非空集,$| Y | > \aleph_0$,$L = \mathcal{P}(Y)$.那么$(L, \cup, \cap, \ ')$是一个完全分配格且有拟序对合对应“ ′ ”,这里“ ′ ”是集的补运算.$\forall r > 0$,定义$D_r : L \to L$如下:对每一个$A \in L$,$D_r(A) = A$.则$\{D_r \mid r > 0\}$ 满足第一类伪度量的等价条件(D1)–(D5)(见定理1.10),且它的度量拓扑ζ_p不是$Q - C_I$.

为了说明第一类伪度量与第二类伪度量在L-拓扑的意义下是不等价的,文献 [9]也曾引用了上述例子(见文献 [3]中例6.6).

张德学在[*Zentralblatt Math., zbl 0983.54012*]指出了例子3.1的不正确性(其实证明很简单,有兴趣的可以自己去证一下),也就是例子3.1 的L- 拓扑ζ_p仍然是$Q-C_I$的.

史福贵在文献 [8]中又给出下面另一个例子去说明表明第一类伪度量诱导的拓扑一般不是$Q-C_I$的.

例子3.2 设ω_1表示第一个不可数序数,$[0,\omega_1]$ 表示从0到ω_1的所有序数之集.令

$$L=[-\omega_1,0]\cup[0,\omega_1],$$

那么L^X是一个具有逆序对合对应的完全分配格.再令$X=\{x\}$是一个单点集合.对每个实数$r>0$和每个$A\in L^X$(L^X与L同构),规定$D_r(A)=A$,即$D_r:L^X\to L^X$是一个恒同映射,那么$\{D_r\mid r>0\}$是一个第一类度量的相关邻域映射族且它的拓扑是$T=L^X$.取$L-fuzzy$点x_{ω_1},那么x_{ω_1}的远域族是$\{C_a\mid a\in[-\omega_1,\omega_1)\}$, 这里$C_a$ 表示取值a的常值$L-fuzzy$集.显然$\{C_a\mid a\in[-\omega_1,\omega_1)\}$没有可数子集构成$x_{\omega_1}$的闭远域基(可查考定义1.8中远域定义).

分析该例子发现就是相同的分子距离定义为0,不同的定义为$+\infty$,我们知道$+\infty$并非数(例子3.1其实也是如此),而第一类伪度量的值域取值$[0,+\infty)$,根本不取值$+\infty$,这样,上面史福贵给出的例子太过于平庸,也没有给出严格证明.严格说来,第一类伪度量是不是$Q-C_I$ 的?还是未能正确解决.

那么第一类伪度量与第二类伪度量究竟是不是等价呢? 我们知道,在一般拓扑中的两种度量是否等价应看它们诱导的拓扑是否相同(见 [10]的第四章中度量等价的定义). 如果两种伪度量诱导的拓扑相同, 那么我们就说这两种伪度量等价,否则它们不等价.因此在L-拓扑的意义下, 第一类伪度量与第二类伪度量是否等价只能从拓扑的角度去考察.

我们发现由于史福贵给出的例子由于其平庸性而去论证第一类伪度量与第二类伪度量在L-拓扑的意义下是不等价的还是无实际意义.

由于涉及到无限序数,本人也尝试性地给了下面例子3.3(不过本人对此例感觉也没有把握,为了说明,还是例举如下,跟大家参考).

下面尝试我们给出第一类伪度量而非第二类伪度量的例子,并证明它是$Q-C_I$.

设序数由小到大的排列是:$0,1,2,\cdots,n,\cdots,\omega,\omega+1,\cdots,\omega+n,\cdots,\omega.2,\cdots\omega.n,$

$\cdots,\omega^2,\cdots,\omega^n,\cdots,\omega^{\omega},\cdots,\omega_1,\cdots$

例子3.3 设ω_1表示第一个不可数序数.令$L=[0,\omega_1]$表示从0到ω_1的所有序数之集合.$\alpha\in[0,\omega_1]$,令$\alpha'=\omega_1-\alpha$,则L是一个具有逆序对合对应的完全分配格.则$M(L)=(0,\omega_1]$.

定义函数$p:M\times M\to[0,+\infty)$如下:

$$\forall a,b\in M,\quad p(a,b)=\begin{cases}0, & a\geq b;\\ 1, & a<b.\end{cases}$$

那么p是$[0,\omega_1]$上第一类伪度量.事实上,不难验证p满足(B1)和(B2).下证(B3)和①.

(B3) 从 $\bigwedge\limits_{y>\omega_1-b} p(a,y)=1 \Leftrightarrow y>\omega_1-b$蕴含$y>a \Leftrightarrow \omega_1-b\geq a \Leftrightarrow x>\omega_1-a$蕴含$x>b \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{x>\omega_1-a} p(b,x)=1$能够获得 $\bigwedge\limits_{y>\omega_1-b} p(a,y)=\bigwedge\limits_{x>\omega_1-a} p(b,x)$.

①如果$a,b\in(0,\omega_1]$且$a\geq b$,那么$p(a,b)=0$.根据(B1),有$\bigvee\limits_{x\ll b} p(a,x)=0$.此时有$p(a,b)=\bigvee\limits_{x<b} p(a,x)$.同理,当$a<b$,有$p(a,b)=\bigvee\limits_{x<b} p(a,x)=1$,即$p$满足①.

但是,p不是第二类伪度量.

事实上,$\forall a\in(0,\omega_1]$,$p(a,a)=0$,然而$\bigwedge\limits_{c<a} p(c,a)=1$.因此$p(b,a)\neq\bigwedge\limits_{c<b} p(c,a)$.

再看例子3.3,由于$\bigwedge\limits_{c<a} p(c,a)=1=\lambda$,当$r>1$时,$P_r(a)=\phi$;当$r\leq 1$时,根据定理1.9,$P_r(a)$都不是$R-nbd$映射;其次当$c\geq a$,有$a\leq P_r(a)\leq P_r(c)$,当$c<a$时,$c\not\leq P_r(c)$.于是取$a=\omega_1$,则可得到$a$的$R-nbd$映射族为$\{P_r(\alpha)|\alpha<\omega_1,r>0\}$,由于$\omega_1=2^\omega$,因此不可能存在可数$R-nbd$映射族,即$p$不可能是$Q-C_I$,即$\forall c\leq a\in M$都没有可数远域基(根据定理3.1知:$\{P_r(b)|r\in[0,+\infty),b\in M\}$是一个在$L$上的闭拓扑基,显然其它不同的基一样都不是$Q-C_I$的).

由上面的结果能得出:由于第一类伪度量与第二类伪度量由于不同的连续性公理①和②的不同,导致这两种度量局部性质呈现出一些本质上差异,即第一类伪度量所诱导拓扑可能不是$Q-C_I$的,也就是这种度量的点$a\in M$与P_r的关系不能直接反映格上“点式拓扑的特点”,即不能直接反映点和它的重域关系,而根据定理3.2,第二类度量却恰好可以.

例子3.4 设$L=[0,1]$, $M=(0,1]$.定义函数$p:M\times M\to[0,+\infty)$ 如下:

$$\forall a,b\in M,\quad p(a,b)=\begin{cases}0, & a\geq b;\\ 1, & a<b.\end{cases}$$

那么p是$[0,1]$上第一类伪度量. 在 [1]中,我们已经证明它是一个p点式伪度量.现验证它满足①.

①. 如果$a,b\in(0,1]$且$a\geq b$,那么可得$p(a,b)=0$.根据(B1),则有$\bigvee\limits_{x\ll b} p(a,x)=0$.此时有$p(a,b)=\bigvee\limits_{x<b} p(a,x)$.同理,当$a<b$,有$p(a,b)=\bigvee\limits_{x<b} p(a,x)=1$,即$p$满足①.

但是, p不是第二类伪度量.事实上,$\forall a\in(0,1]$,$p(a,a)=0$,然而$\bigwedge\limits_{c<a} p(c,a)=1$.

因此$p(b,a)\neq\bigwedge\limits_{c<b} p(c,a)$.

例子3.4表明,从第一类伪度量函数出发,是不能得到第二类伪度量.定理2.4表明,从第二类伪度量函数出发,却可以容易地得到第一类伪度量度量函数.

其次,例子3.4中p所诱导的拓扑仍然是$Q-C_I$.我们可以验证对$\forall a\in[0,1]$,a所有远域集合是$[0,a)$.由此可推出p是第二类伪度量$\Rightarrow\zeta_p$是$Q-C_I$是充分而非必要条件.

注3.1 正是有推论3.1,从而对第二类伪度量的拓扑进行讨论时,用p的远-邻域映射簇$\{P_r(a)\mid r\in[0,+\infty),a\in M\}$ 作为基(生成拓扑η_p)能够十分和谐的刻画邻近结构.但是在第一类度量中,正是由于$\bigvee\limits_{z\not\leq b'} P_\lambda(z)'=D_\lambda(b)$的不成立,这导致:正如梁和彭分别在文献 [4]和 [9]指出的那样: $Erceg$度量的确不能直接反映格上“点式拓扑的特点”即不能直接反映点和它的重域关系 [4].

定理3.4 在$L-$实直线$\mathbf{R}(L)$ [6] [7]中,定义映射$\varepsilon : M(L^{\mathbf{R}(L)}) \to \mathbf{R}$和$\sigma : M(L^{\mathbf{R}(L)}) \to \mathbf{R}$使得$\forall e \in M(L^{\mathbf{R}(L)})$有:

$$\varepsilon(e) = sup\{t|e \le l_t^{'}\}, \sigma(e) = inf\{t|e \le r_t^{'}\}.$$

令$p(a,b) = max\{\varepsilon(a) - \varepsilon(b), \sigma(b) - \sigma(a), 0\}$, 则

(i) p是第二类伪度量;

(ii) $U_r(b) = l_{\psi(b)+r} \bigwedge r_{\omega(b)-r}$.

为证明定理3.4,我们先证明下列定理3.5.

定理3.5 在$L-$实直线$\mathbf{R}(L)$中,令$\psi(b) = \bigvee\{t|b \not\le l_t\}$, $\omega(b) = \bigwedge\{t|b \not\le r_t\}$, $\varepsilon(e) = \bigvee\{t|e \le l_t^{'}\}, \sigma(e) = \bigwedge\{t|e \le r_t^{'}\}$, 则

(a) $\bigvee\limits_{z \not\le b'} \varepsilon(z) = \psi(b)$;

(b) $\bigwedge\limits_{z \not\le b'} \sigma(z) = \omega(b)$;.

(c) $\bigwedge\limits_{z \not\le a'} \psi(z) = \varepsilon(a)$;

(d) $\bigvee\limits_{z \not\le a'} \omega(z) = \sigma(a)$.

证明 (a) $s > \bigvee\limits_{z \not\le b'} \varepsilon(z) \Rightarrow \forall z \not\le b', s > \varepsilon(z) \Rightarrow \forall z \not\le b', z \not\le l_s' \Rightarrow l_s' \le b' \Rightarrow b \le l_s \Rightarrow s \ge \psi(b)$,因此$\bigvee\limits_{z \not\le b'} \varepsilon(z) \ge \psi(b)$.反过来有$s > \psi(b) \Rightarrow b \le l_s \Rightarrow l_s' \le b' \Rightarrow \forall z \not\le b', z \not\le l_s' \Rightarrow \forall z \not\le b', s \ge \varepsilon(z) \Rightarrow s \ge \bigvee\limits_{z \not\le b'} \varepsilon(z)$，从而$\bigvee\limits_{z \not\le b'} \varepsilon(z) \le \psi(b)$.

(b) $s < \bigwedge\limits_{z \not\le b'} \sigma(z) \Rightarrow \forall z \not\le b', s < \sigma(z) \Rightarrow \forall z \not\le b', z \not\le r_s' \Rightarrow r_s' \le b' \Rightarrow b \le r_s \Rightarrow s \le \omega(b)$, 因此$\bigwedge\limits_{z \not\le b'} \sigma(z) \le \omega(b)$. 反过来有$s < \omega(b) \Rightarrow b \le r_s \Rightarrow r_s' \le b' \Rightarrow \forall z \not\le b', z \not\le r_s' \Rightarrow \forall z \not\le b', s \le \sigma(z) \Rightarrow s \le \bigwedge\limits_{z \not\le b'} \sigma(z)$. 从而$\bigwedge\limits_{z \not\le b'} \sigma(z) \ge \omega(b)$.

(c) $s > \bigwedge\limits_{z \not\le a'} \psi(z) \Rightarrow \exists z \not\le a', s > \psi(z) \Rightarrow \exists z \not\le a', z \le l_s \Rightarrow l_s \not\le a' \Rightarrow a \not\le l_s' \Rightarrow \varepsilon(a) \le s$,因此$\bigwedge\limits_{z \not\le a'} \psi(z) \ge \varepsilon(a)$. 反过来有$s > \varepsilon(a) \Rightarrow a \not\le l_s' \Rightarrow l_s \not\le a' \Rightarrow \exists z \not\le a', z \le l_s \Rightarrow \exists z \not\le a', s \ge \psi(z) \Rightarrow s \ge \bigwedge\limits_{z \not\le a'} \psi(z)$.从而$\varepsilon(a) \ge \bigwedge\limits_{z \not\le a'} \psi(z)$.

(d) $s < \bigvee\limits_{z \not\le a'} \omega(z) \Rightarrow \exists z \not\le a', s < \omega(z) \Rightarrow \exists z \not\le a', z \le r_s \Rightarrow r_s \not\le a' \Rightarrow a \not\le r_s' \Rightarrow \sigma(a) \ge s$,因此$\sigma(a) \ge \bigvee\limits_{z \not\le a'} \omega(z)$. 反过来有$s < \sigma(a) \Rightarrow a \not\le r_s' \Rightarrow r_s \not\le a' \Rightarrow \exists z \not\le a', z \le r_s \Rightarrow \exists z \not\le a', \omega(z) \ge s \Rightarrow s \le \bigvee\limits_{z \not\le a'} \omega(z)$.从而$\sigma(a) \le \bigvee\limits_{z \not\le a'} \omega(z)$.

定理3.4的证明 (i)由定理1.12和定理2.3,可得.

(ii)由定理1.12知$P_r(a) = l'_{\varepsilon(a)+r} \bigvee r'_{\sigma(a)-r}$,再根据定理2.2有$\bigvee\limits_{z \not\le b'} P_r(z)' = U_r(b)$,因此须证

$$\bigvee_{z \not\le b'} P_r(z)' = l_{\psi(b)+r} \bigwedge r_{\omega(b)-r}.$$

因为 $\bigvee_{z\not\leq b'} P_r(z)' = \bigvee_{z\not\leq b'} (l'_{\varepsilon(z)+r} \bigvee r'_{\sigma(z)-r})' = \bigvee_{z\not\leq b'} (l_{\varepsilon(z)+r} \bigwedge r_{\sigma(z)-r})$,也就是要证

$$\bigvee_{z\not\leq b'} (l_{\varepsilon(z)+r} \bigwedge r_{\sigma(z)-r}) = l_{\psi(b)+r} \bigwedge r_{\omega(b)-r}.$$

由定理1.11和定理3.3,有

$$\bigvee_{z\not\leq b'} (l_{\varepsilon(z)+r} \bigwedge r_{\sigma(z)-r}) \leq l_{r+\bigvee\limits_{z\not\leq b'} \varepsilon(z)} \bigwedge r_{-r+\bigwedge\limits_{z\not\leq b'} \sigma(z)} = l_{\psi(b)+r} \bigwedge r_{\omega(b)-r}.$$

反过来,设$\forall a \ll l_{\psi(b)+r} \bigwedge r_{\omega(b)-r}$.同样由定理1.9和定理3.3分别得

$$a \ll l_{\psi(b)+r} = l_{\bigvee\limits_{z\not\leq b'} \varepsilon(z)+r} = \bigvee_{z\not\leq b'} l_{\varepsilon(z)+r};$$

$$a \ll r_{\omega(b)-r} = r_{\bigwedge\limits_{z\not\leq b'} \sigma(z)-r} = \bigvee_{z\not\leq b'} r_{\sigma(z)-r}.$$

因此这里存在$z_1 \not\leq b'$和$z_2 \not\leq b'$分别使得$a \leq l_{\varepsilon(z_1)+r}$和$a \leq r_{\sigma(z_2)-r}$.由$z_1 \not\leq b'$和$z_2 \not\leq b'$知$b \not\leq z_1'$和$b \not\leq z_2'$.因$b \in M(L^{\mathbf{R}(L)})$,所以得$b \not\leq z_1' \bigvee z_2'$,即$z_1 \bigwedge z_2 \not\leq b'$. 令$z = z_1 \bigwedge z_2$,则根据定理1.12有$\varepsilon(z_1) \leq \varepsilon(z)$,再由定理1.11得$l_{\varepsilon(z_1)+r} \leq l_{\varepsilon(z)+r}$,同理由定理1.11得$\sigma(z_2) \geq \sigma(z)$和$r_{\sigma(z)-r} \geq r_{\sigma(z_2)-r}$. 因此有

$$a \leq l_{\varepsilon(z)+r} \bigwedge r_{\sigma(z)-r}.$$

即 $\bigvee_{z\not\leq b'} (l_{\varepsilon(z)+r} \bigwedge r_{\sigma(z)-r}) \geq l_{\psi(b)+r} \bigwedge r_{\omega(b)-r}$成立.

综上所述知$U_r(b) = l_{\psi(b)+r} \bigwedge r_{\omega(b)-r}$.

参考文献

[1] Chen, P. (2017) Metrics in L-Fuzzy Topology. China Science Press (Postdoctoral Library), Beijing. (In Chinese)

[2] Chen, P. and Shi, F.-G. (2007) Further Simplification of Erceg's Metric and Its Properties. *Advances in Mathematics*, **36**, 586-592. (In Chinese)

[3] Shi, F.G. (2001) Pointwise Pseudo-Metrics in L-Fuzzy Set Theory. *Fuzzy Sets and Systems*, **121**, 200-216. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00013-0

[4] 梁基华. 关于不分明度量空间的几个问题[J]. 数学年刊, 1984, 6A(1): 59-67.

[5] Wang, G.J. (1988) Theory of L-fuzzy Topological Space. Shanxi Normal University Publishers, Xi'an. (In Chinese)

[6] Hutton, B. (1977) Uniformities on Fuzzy Topological Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **58**, 559-571. https://doi.org/10.1016/0022-247X(77)90192-5

[7] Shi, F.G. (2005) Pointwise Pseudo-Metric on the L-Real Line. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **4**, 79-88.

[8] Shi, F.G. and Zheng, C.Y. (2005) Metrization Theorems in L-Topological Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **149**, 455-471. https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.02.003

[9] Peng, Y.W. (1993) Simplification of Erceg's Fuzzy Metric Function and Its Application. *Fuzzy Sets and Systems*, **54**, 181-189. https://doi.org/10.1016/0165-0114(93)90275-M

[10] Engelking, R. (1977) General Topology. Polish Science Publishers, Warszawa.