Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(10), 1686-1692
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.910195

最大度为3的符号图的全染色

王　超

浙江师范大学，数学与计算机科学学院，浙江 金华
Email: 992178085@qq.com

收稿日期：2020年9月26日；录用日期：2020年10月8日；发布日期：2020年10月15日

摘　要

在图$G=(V,E)$中，使得相邻和相关联的元素均染不同颜色的染色方法，称为图G的正常全染色。使得G为正常全染色的最少颜色数，称为G的全色数，记为$\chi_T(\Gamma)$。在本文中，我们给出全染色在符号图中的定义，并在最大度为3的符号图中证明了全色数的上界为5。

关键词

符号图，全染色，最大度

Total Coloring of Signed Graphs with Maximum Degree 3

Chao Wang

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 992178085@qq.com

Received: Sep. 26th, 2020; accepted: Oct. 8th, 2020; published: Oct. 15th, 2020

Abstract

For graph $G=(V,E)$, a proper total coloring is a coloring of V and E such that no two adjacent or incident elements get the same color. The total chromatic number of G, denoted by $\chi_T(\Gamma)$, is the smallest integer k such that G have a proper total coloring. In this paper, we give a definition of total coloring in signed graphs, and prove the total chromatic number is 5 in signed graph with maximum degree 3.

文章引用: 王超. 最大度为 3 的符号图的全染色[J]. 应用数学进展, 2020, 9(10): 1686-1692.
DOI: 10.12677/aam.2020.910195

Keywords

Signed Graph, Total Coloring, Maximum Degree

1. 引言

图的染色问题是图论的主要研究问题之一，图的染色一般分为点染色，边染色，全染色和其他特定的染色。本文中提到的图 $G=(V,E)$ 均为简单图，$V(G)$，$E(G)$，$\Delta(G)$分别表示图 G 的顶点集合和边集合，简记为 V，E，Δ。如果 $x\in V(G)$，$e\in E(G)$，$G-x$ 表示从图 G 去掉点 x 及和点 x 相关联的边，$G-e$ 则表示从图 G 中去掉边 e。

定义 1.1 在图 $G=(V,E)$ 中，对点和边同时进行染色，并且当相邻和相关联的元素均染不同颜色的染色方法，称为图 G 的正常全染色，使得图 G 为正常全染色的最少颜色数，称为图 G 的全色数，记为 $\chi_T(G)$。

当我们对图 $G=(V,E)$ 进行全染色时，因为要同时考虑点和边，在确定全色数时要比确定色数和边色数更困难。根据上述定义，显然 $\chi_T(G)\ge\Delta+1$。Behzad [1]在 1965 年提出了著名的全染色猜想(TTC)：对任意的图 G，$\chi_T(G)\le\Delta+2$。

在 1969 年，Vijayaditya [2]证明了 $\Delta\le 3$ 时全染色猜想成立，之后 Vostochka [3]证明了 $\Delta\le 5$ 时全染色猜想成立。

在本文中，我们给出全染色在符号图中的定义，并在最大度为 3 的符号图中给出了全色数的上界。符号图是 Harary [4]在 1953 年提出：一个符号图 $\Gamma=(G,\sigma)$ 是在图 G 的基础上，对其边集 $E(G)$加上符号 $\sigma:\{E(G)\to +1,-1\}$，G 称为 $\Gamma=(G,\sigma)$ 的基础图。在符号图 $\Gamma=(G,\sigma)$ 中，对任意的一条边 e，如果 $\sigma(e)=1$，则称 e 是正边；如果 $\sigma(e)=-1$，则称 e 是负边。符号颜色 $M_n=\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n\}$ 当 $n=2k+1$；$M_n=\{\pm1,\pm2,\cdots,\pm n\}$ 当 $n=2k$。我们称 M_n 为符号颜色集，在 M_n 中颜色±1 是两个不同但互为相反的颜色。在图 $G=(V,E)$ 中一个 incidence 表示 $(v,e):v\in V,e\in E$，v 是 e 的一个顶点。$I(G)$表示图 $G=(V,E)$ 中所有的 incidence，此时我们有 $|I(G)|=2|E(G)|$。现在我们给出符号图中全染色的定义：

定义 1.2 在符号图 $\Gamma=(G,\sigma)$ 中，一个全染色 f 是用颜色集 M_n 中的颜色同时对符号图 Γ 中的 incidence 和点进行染色，并且如果 f 满足下面的三个条件：

(1) 对任意的 $e=uv$，$f(u)\ne\sigma_e f(v)$，$f(u,e)=\sigma_e f(v,e)$，σ_e 表示边 e 的符号；

(2) 对任意的 $e_1=uv$，$e_2=vw$，$f(v,e_1)\ne f(v,e_2)$；

(3) 对任意的 $v\in V(\Gamma)$，v 是 e 的一个顶点，$f(v)\ne f(v,e)$。

此时称 f 为符号图 $\Gamma=(G,\sigma)$ 的正常全染色，使得 Γ 为正常全染色的最少颜色数，称为 Γ 的全色数，记为 $\chi_T(\Gamma)$。如果 $f(x)=a$ 或 $f(x,xy)=a$，则称在点 x 上颜色 a 存在。否则称在点 x 上缺少颜色 a。

此时，我们可以看出当符号图 $\Gamma=(G,\sigma)$ 中所有边都是正边时，定义 1.1 和 1.2 相同，所以定义 1.1 是定义 1.2 的一个特殊情况。根据定义 1.2，我们有对任意的符号图 Γ，$\chi_T(\Gamma)\ge\Delta+1$，$\Delta$ 表示图 Γ 的最大度。在本文中我们给出了最大度为 3 的符号图中全色数的上界。

定理 1 如果 $\Gamma=(G,\sigma)$ 是最大度为 3 的符号图，则 $\chi_T(\Gamma)\le 5$。

2. 定理 1 的证明

在证明定理 1 之前，我们需要一些准备工作，首先考虑符号图 $\Gamma=(G,\sigma)$ 中的圈 $C_n: x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}=x_1$，我们对 C_n 做如下特殊的全染色，记为 $\Re$。

情况 1：如果 C_n 有偶数条正边，则

$$
\begin{array}{lll}
\Re(x_1)=1 & \Re(x_{i+1})=-\Re(x_i) & \text{当}x_ix_{i+1}\text{为正边} \\
 & \Re(x_{i+1})=\Re(x_i) & \text{当}x_ix_{i+1}\text{为负边} \\
\Re(x_1,x_1x_2)=2 & \Re(x_{i+1},x_ix_{i+1})=\Re(x_i,x_ix_{i+1}) & \text{当}x_ix_{i+1}\text{为正边} \\
 & \Re(x_{i+1},x_ix_{i+1})=-\Re(x_i,x_ix_{i+1}) & \text{当}x_ix_{i+1}\text{为负边} \\
 & \Re(x_{i+1},x_{i+1}x_{i+2})=-\Re(x_{i+1},x_ix_{i+1}) & 1\le i\le n
\end{array}
$$

情况 2：如果 C_n 有奇数条正边，则

$$
\begin{array}{lll}
\Re(x_1)=1 & \Re(x_{i+1})=-\Re(x_i) & \text{当}x_ix_{i+1}\text{为正边} \\
 & \Re(x_{i+1})=\Re(x_i) & \text{当}x_ix_{i+1}\text{为负边} \\
\Re(x_1,x_1x_2)=2 & \Re(x_{i+1},x_ix_{i+1})=\Re(x_i,x_ix_{i+1}) & \text{当}x_ix_{i+1}\text{为正边} \\
 & \Re(x_{i+1},x_ix_{i+1})=-\Re(x_i,x_ix_{i+1}) & \text{当}x_ix_{i+1}\text{为负边} \\
 & \Re(x_{i+1},x_ix_{i+1})=-\Re(x_{i+1},x_{i+1}x_{i+2}) & 1\le i\le n-1 \\
\text{对}x_n\text{和}x_nx_1 & \Re(x_n)=-\Re(x_n,x_nx_{n-1}) & \\
 & \Re(x_1,x_nx_1)=-\Re(x_1) &
\end{array}
$$

此时，我们称上述在圈 C_n 上的染色方法为特殊染色，根据上述的特殊染色，我们可以得出在最大度为 2 的符号图 Γ 中，$\chi_T(\Gamma)\le 4$。因为当 Γ 是一条路时，对其点用颜色±1 进行染色，其边用±2 进行染色。在正边个数为奇数的圈 C_n 中，我们称点 x_1，x_{n-1} 和点 x_n 为特殊点。不难看出，如果 $\Re$ 是圈 C_n 上的特殊染色，对非特殊点 x_i 来说，我们交换点 x_i 和 incidence (x_i,x_ix_{i+1}) 的颜色并根据边 x_ix_{i+1} 的符号确定 (x_{i+1},x_ix_{i+1}) 的颜色，交换后 $\Re$ 仍然是 C_n 的正常全染色。

现在我们根据上述在圈中的特殊全染色 $\Re$ 来证明定理 1，首先证明下面的相关引理。

引理 2.1 符号图 $\Gamma=(G,\sigma)$ 是最大度为 3 的连通图，如果 $\Gamma=(G,\sigma)$ 不是 3-正则的，则 $\chi_T(\Gamma)\le 5$。

证明：对符号图 Γ 的点数做归纳，因为符号图 Γ 不是 3-正则的，因此 Γ 有一个点 x 使得 $d(x)\le 2$，当点数为 1，2，3 时，该结果显然成立。现在假设图 Γ 的点数大于 3，对符号图 $\Gamma-x$，根据归纳假设，$\Gamma-x$ 有一个正常的 5-全染色 f，其颜色为 $\{\pm a,\pm b,c\}$。现在我们将用相同的 5 个颜色把 f 扩展为图 Γ 上的正常全染色，我们分为两个情况讨论：

情况 1：如果 $d(x)=1$，$xy\in E(\Gamma)$，在 $\Gamma-x$ 中，颜色 $\{\pm a,\pm b\}$ 中至少有一个颜色在点 y 上没有使用，设为 a，此时用颜色 a 对 incidence (y,xy) 染色并根据边 xy 的符号对 (x,xy) 和点 x 染色，不妨假设边 xy 为正边，$f(y)=b$，因此我们可用颜色 a 对 (x,xy) 染色，用颜色 c 对点 x 染色。

情况 2：如果 $d(x)=2$，$xy,xz\in E(\Gamma)$，根据归纳假设符号图 $\Gamma-x$ 有正常的 5-全染色 f，因此点 y 和点 z 至少分别缺少两个颜色，我们不妨考虑点 y 和点 z 分别缺少两个颜色的情况，此时在符号图 Γ 中 $d(y)=d(z)=3$。

情况 2.1：点 y 和点 z 缺少的两个颜色相同

情况 2.1.1：当缺少的两个颜色为相反颜色时，记为 $\{\pm a\}$，此时用颜色 a 对 incidence (y,xy) 染色，根据边 xy 的符号对 (x,xy) 染色，再用与 (x,xy) 相反的颜色对 (x,xz) 染色，根据边 xz 的符号对 (z,xy) 染色，

例如：$f(y,xy)=f(x,xy)=a$，则 $f(x,xz)=-a$，$f(z,xz)=-a$ 当边 xz 为正边，否则 $f(z,xz)=a$，现在考虑点 x，因为 incidence(x,xy)，(x,xz)，点 y 和点 z 至多使用四个不同的颜色，再根据边 xy 和 xz 的符号即可对点 x 进行染色。

情况 2.1.2：当缺少的两个颜色不相反时，记为 $\{a,b\}$，此时分别用颜色 a 和 b 对 incidence(y,xy) 和 (z,xz) 染色，根据边 xy 和 xz 的符号对 (x,xy)，(x,xz) 染色，对于点 x，可采用情况 2.1.1 中对点 x 的方法染色。

情况 2.2：点 y 和点 z 缺少两个颜色至多一个相同，记为 a，此时我们可以在点 y 和点 z 缺少的颜色中找出两个颜色既不相同又不相反的颜色，不妨记为 $\{-a,b\}$，此时分别用颜色-a 和 b 对 incidence(y,xy) 和 (z,xz) 染色，根据边 xy 和 xz 的符号对 (x,xy)，(x,xz) 染色，对于点 x，仍旧采用情况 2.1.1 中对点 x 的方法染色，该引理得证。

引理 2.2 符号图 $\Gamma=(G,\sigma)$ 是连通的 3-正则图，如果 $\Gamma=(G,\sigma)$ 包含割边 $e=uv$，则 $\chi_T(\Gamma)\le 5$。

证明：因为 $e=uv$ 是符号图 Γ 的一条割边，则 $\Gamma-e$ 有两个连通分支 Γ_1 和 Γ_2，$u\in\Gamma_1$，$v\in\Gamma_2$，因此 $d_{\Gamma_1}(u)=d_{\Gamma_2}(v)=2$，根据引理 2.1，$\Gamma_1$ 和 Γ_2 分别有正常的 5-全染色 f_1 和 f_2。

情况 1：如果 $e=uv$ 是正边，通过对 f_1 和 f_2 中的颜色进行排列调整，使得

(1) $f_1(u)\ne f_2(v)$；

(2) 在 Γ_1 中与点 u 相关联的两个 incidence 的颜色和在 Γ_2 中与点 v 相关联的两个 incidence 的颜色相同。

此时，对 $e=uv$ 上的两个 incidence 可用第五种颜色染色，现在我们便可以将 f_1 和 f_2 组合并将其扩展为符号图 Γ 上的一个正常的 5-全染色 f。

情况 2：如果 $e=uv$ 是负边，通过对 f_1 和 f_2 中的颜色进行排列调整，使得

(1) $f_1(u)=f_2(v)=c$；

(2) 在 Γ_1 中与点 u 相关联的两个 incidence 的颜色和在 Γ_2 中与点 v 相关联的两个 incidence 的颜色相同，并且使用的两个颜色相反。

类似的，对 $e=uv$ 上的两个 incidence 可用剩余的两个相反颜色染色，现在便可将 f_1 和 f_2 组合并将其扩展为 Γ 上的一个正常的 5-全染色 f，该引理得证。

在图 $G=(V,E)$ 中，对集是没有公共顶点的边集合，当对集 M 覆盖图 G 中的所有点时，称 M 为完美对集或 1-因子。

引理 2.3 [5] 如果 G 是没有割边的 3-正则图，则 G 的边集可分解为 1-因子和边不交的圈的并集。

在符号图中，我们可以看出引理 2.3 仍然成立，我们将借助引理 2.3 来证明下面的引理。

引理 2.4 符号图 $\Gamma=(G,\sigma)$ 是连通的 3-正则图，如果符号图 Γ 不包含割边 $e=uv$，则 $\chi_T(\Gamma)\le 5$。

证明：根据引理 2.3，我们有 $E(\Gamma)$ 可以分解为 1-因子 F 和边不交的圈 $C^1,C^2,C^3,\cdots$

首先，我们对圈 $C^1,C^2,C^3,\cdots$ 中的点做标号：$C^i:x_1^ix_2^i\cdots x_{n_i}^ix_1^i$，同时设计如下算法：

算法 1：对任意的两个正边个数为奇数的圈 C^i 和 C^j 满足

$$x_1^ix_1^j,\ x_{n_i-1}^ix_{n_j-1}^j\notin E(\Gamma) \tag{1}$$

步骤 1：如果 $C^1,C^2,C^3,\cdots$ 中没有正边数为奇数的圈，对每一个圈 C^i 的点标号 $C^i:x_1^ix_2^i\cdots x_{n_i}^ix_1^i$，如果 Γ 含有正边数为奇数的圈 $C^1,C^2,\cdots$ 我们标记 C^1 中的一个顶点为 x_1^1。

步骤 2：如果 x_1^1 与正边个数为奇数的未标号圈的顶点相邻，我们进行步骤 3，如果 x_1^1 不相邻正边个数为奇数的未标号圈的顶点，我们在以点 x_1^1 起点的两个方向中选择任意一个方向对圈 C^1 中的其他点进行标号。此时，如果 $x_{n_1-1}^1$ 与正边个数为奇数的未标号圈的顶点相邻，我们进行步骤 4，否则，我们回到步骤 1，对未标号的圈继续做顶点标号。

步骤 3： 如果 x_1^1 与正边个数为奇数的未标号圈的顶点相邻，并将这个圈重新编号为 C^2，在 C^2 中与点 x_1^1 相邻的点记为 $x_{n_2-1}^2$ 并在以点 $x_{n_2-1}^2$ 起点的两个方向中任选一个方向对 C^2 中的其他点进行标号，此时我们回到步骤 2 考虑点 x_1^2。

步骤 4： 如果 x_1^1 不相邻正边个数为奇数的未标号圈的顶点但是 $x_{n_1-1}^1$ 与正边个数为奇数的未标号圈的顶点相邻，记为 y，我们将这个圈重新编号为 C^2 并将 y 标号为 x_1^2，再以点 x_1^2 起点的两个方向中选择任意一个方向对圈 C^2 中的其他点进行标号，此时，我们回到步骤 2 考虑点 $x_{n_2-1}^2$。

步骤 5： 因为图 Γ 是有限的，该算法最终会结束。我们从一个正边个数为奇数的未标号圈开始，重复步骤 2 的整个过程，我们可以对所有的正边个数为奇数的圈中的点完成标号，对正边个数为偶数的圈中的点我们可以对其选择任意标号。

现在我们根据对每一个圈 C^i 中点的标号 $C^i: x_1^i x_2^i \cdots x_{n_i}^i x_1^i$ 和算法 1 的结果对符号图 Γ 做全染色。在符号图 Γ 中，圈 $C^1, C^2, C^3, \cdots$ 是 Γ 上的所有圈，令 f 是圈 $C^1, C^2, C^3, \cdots$ 的特殊染色，使用的颜色为 $\{\pm1, \pm2\}$，现在我们将 f 扩展为符号图 Γ 上 5-全染色，其颜色集扩充为 $\{\pm1, \pm2, 3\}$。任取 $x_h^k x_q^p \in F$。

情况 1： $x_h^k x_q^p$ 是正边。

情况 1.1：如果 $f(x_h^k) \neq f(x_q^p)$，用颜色 3 对 $(x_h^k, x_h^k x_q^p)$ 和 $(x_q^p, x_h^k x_q^p)$ 进行染色。

情况 1.2：如果 $f(x_h^k) = f(x_q^p)$。

情况 1.2.1：如果点 x_h^k 和 x_q^p 中有一个点不是特殊点，不妨设为 x_h^k。此时用颜色 3 对 $(x_h^k, x_h^k x_q^p)$ 和 $(x_q^p, x_h^k x_q^p)$ 染色并交换点 x_h^k 和 incidence $(x_h^k, x_h^k x_{h+1}^k)$ 的颜色，再根据边 $x_h^k x_{h+1}^k$ 的符号确定 $(x_{h+1}^k, x_h^k x_{h+1}^k)$ 的颜色。

情况 1.2.2：如果点 x_h^k 和 x_q^p 都是特殊点，根据算法 1， $x_h^k x_q^p$ 可能是 $x_{n_k}^k x_{n_p}^p$， $x_1^k x_{n_p-1}^p$ 和 $x_{n_k-1}^k x_1^p$。当 $x_h^k x_p^p = x_{n_k}^k x_{n_p}^p$，根据特殊染色 f, 不妨令 $f(x_h^k) = f(x_q^p) = 2$，此时我们有边 $x_{n_k}^k x_1^k$ 和边 $x_{n_p}^p x_1^p$ 有相同的符号，否则的话会与 $f(x_h^k) = f(x_q^p)$ 矛盾。如果边 $x_{n_k}^k x_1^k$ 和 $x_{n_p}^p x_1^p$ 边都是正边，f 是特殊染色，因此 $(x_{n_k}^k, x_{n_k}^k x_1^k)$ 和 $(x_1^k, x_{n_k}^k x_1^k)$ 的颜色都是-1。现在我们用颜色 3 对点 x_q^p 重新染色并用颜色 1 对 $(x_q^p, x_h^k x_q^p)$ 和 $(x_h^k, x_h^k x_q^p)$ 染色。如果边 $x_{n_k}^k x_1^k$ 和 $x_{n_p}^p x_1^p$ 边都是负边，可做类似处理。此时， $f(x_1^k, x_{n_k}^k x_1^k) = -1$， $f(x_{n_k}^k, x_{n_k}^k x_1^k) = 1$，用颜色 3 对点 x_q^p 重新染色并用颜色-1 对 $(x_q^p, x_h^k x_q^p)$ 和 $(x_h^k, x_h^k x_q^p)$ 染色，该情况得证。

当 $x_h^k x_q^p = x_1^k x_{n_p-1}^p$ 或者 $x_h^k x_q^p = x_{n_k-1}^k x_1^p$，这两种情况类似，我们介绍 $x_h^k x_q^p = x_1^k x_{n_p-1}^p$ 时的情况，根据特殊染色 f， $f(x_1^k) = f(x_{n_p-1}^p) = 1$ 并且边 $x_{n_p}^p x_1^p$ 和边 $x_{n_p-1}^p x_{n_p}^p$ 有相反的符号，令 $x_{n_p-1}^p x_{n_p}^p$ 是正边， $x_{n_p}^p x_1^p$ 是负边。因此 $f(x_1^p, x_{n_p}^p x_1^p) = -1$， $f(x_{n_p}^p, x_{n_p}^p x_1^p) = 1$， $f(x_{n_p}^p, x_{n_p}^p x_{n_p-1}^p) = 2$， $f(x_{n_p-1}^p, x_{n_p}^p x_{n_p-1}^p) = 2$， $f(x_{n_p}^p) = -2$。下面考虑边 $x_{n_p-1}^p x_{n_p-2}^p$ 的符号：

如果 $x_{n_p-1}^p x_{n_p-2}^p$ 是正边，则 $f(x_{n_p-1}^p, x_{n_p-1}^p x_{n_p-2}^p) = f(x_{n_p-2}^p, x_{n_p-1}^p x_{n_p-2}^p) = -2$， $f(x_{n_p-2}^p) = -1$，此时交换点 $x_{n_p-2}^p$ 和 incidence $(x_{n_p-2}^p, x_{n_p-1}^p x_{n_p-2}^p)$ 得到染色 f_1。因为 $x_{n_p-2}^p$ 不是特殊点，f_1 是正常的全染色，$f_1(x_{n_p-2}^p) = -2$， $f_1(x_{n_p-1}^p, x_{n_p-2}^p x_{n_p-1}^p) = f_1(x_{n_p-2}^p, x_{n_p-2}^p x_{n_p-1}^p) = -1$。现在 f_1 的基础上再次交换点 $x_{n_p-1}^p$ 和 incidence $(x_{n_p-1}^p, x_{n_p-2}^p x_{n_p-1}^p)$ 的颜色得到染色 f_2，则 $f_2(x_{n_p-1}^p) = -1$， $f_2(x_{n_p-1}^p, x_{n_p-2}^p x_{n_p-1}^p) = f_2(x_{n_p-2}^p, x_{n_p-2}^p x_{n_p-1}^p) = 1$，现在用颜色 3 对 $(x_1^k, x_1^k x_{n_p-1}^p)$ 和 $(x_{n_p-1}^p, x_1^k x_{n_p-1}^p)$ 进行染色，该情况得证。如果 $x_{n_p-1}^p x_{n_p-2}^p$ 是负边，用上述方法做类似处理。

情况 2： $x_h^k x_q^p$ 是负边。

情况 2.1：如果 $f(x_h^k) = f(x_q^p)$。

情况 2.1.1：如果点 x_h^k 和 x_q^p 中有一个点不是特殊点，不妨设为 x_h^k。根据特殊染色 f，不妨令 $f(x_h^k) = f(x_q^p) = 1$，用颜色 3 对点 x_q^p 重新染色，用颜色 1 对 $(x_q^p, x_h^k x_q^p)$ 染色，用颜色-1 对 $(x_h^k, x_h^k x_q^p)$ 染色。

情况 2.1.2：如果点 x_h^k 和 x_q^p 中都是特殊点，根据算法 1， $x_h^k x_q^p$ 可能是 $x_{n_k}^k x_{n_p}^p$， $x_1^k x_{n_p-1}^p$ 和 $x_{n_k-1}^k x_1^p$。当

$x_h^k x_p^p = x_{n_k}^k x_{n_p}^p$，不妨令 $f\left(x_h^k\right)=f\left(x_q^p\right)=2$，同样的，边 $x_{n_k}^k x_1^k$ 和边 $x_{n_p}^p x_1^p$ 有相同的符号，如果边 $x_{n_k}^k x_1^k$ 和边 $x_{n_p}^p x_1^p$ 都为正边，则边 $x_{n_k}^k x_1^k$ 和边 $x_{n_p}^p x_1^p$ 上 incidence 的颜色都是−1。用颜色 3 对 $\left(x_{n_k}^k, x_{n_k}^k x_1^k\right)$ 和 $\left(x_1^k, x_{n_k}^k x_1^k\right)$ 染色，用颜色 1 对 $\left(x_q^p, x_h^k x_q^p\right)$ 染色，用颜色−1 对 $\left(x_h^k, x_h^k x_q^p\right)$ 染色。如果边 $x_{n_k}^k x_1^k$ 和边 $x_{n_p}^p x_1^p$ 都是负边时，考虑边 $x_{n_k}^k x_{n_k-1}^k$ 和边 $x_{n_p}^p x_{n_p-1}^p$，如果二者有一个是正边，不妨设为 $x_{n_k}^k x_{n_k-1}^k$，此时用颜色 3 对 $\left(x_{n_k}^k, x_{n_k}^k x_{n_k-1}^k\right)$，$\left(x_{n_k-1}^k, x_{n_k}^k x_{n_k-1}^k\right)$ 和 $x_{n_p}^p$ 重新染色，用颜色 2 对 $\left(x_{n_p}^p, x_{n_p}^p x_{n_k}^k\right)$ 染色，用颜色−2 对 $\left(x_{n_k}^k, x_{n_p}^p x_{n_k}^k\right)$ 染色。如果边 $x_{n_k}^k x_{n_k-1}^k$ 和边 $x_{n_p}^p x_{n_p-1}^p$ 都是负边，用颜色 3 对 $x_{n_p-1}^p$ 和 $x_{n_k}^k$ 重新染色，f 是特殊染色并且 $x_{n_p}^p x_1^p$ 是负边，则 $f\left(x_{n_p}^p, x_{n_p}^p x_1^p\right)=1$，用颜色 1 对 $\left(x_{n_p-1}^p, x_{n_p}^p x_{n_p-1}^p\right)$ 重新染色，用颜色−1 对 $\left(x_{n_p}^p, x_{n_p}^p x_{n_p-1}^p\right)$ 重新染色，此时我们可以用颜色 2 对 $\left(x_{n_k}^k, x_{n_p}^p x_{n_k}^k\right)$ 染色，用颜色−2 对 $\left(x_{n_p}^p, x_{n_p}^p x_{n_k}^k\right)$ 染色，得证。

当 $x_h^k x_q^p = x_1^k x_{n_p-1}^p$ 或者 $x_h^k x_q^p = x_{n_k-1}^k x_1^p$，这两种情况类似，我们介绍 $x_h^k x_q^p = x_1^k x_{n_p-1}^p$ 时的情况，根据特殊染色 f，$f\left(x_h^k\right)=f\left(x_q^p\right)=1$，此时用颜色 3 对点 x_h^k 重新染色，用颜色 1 对 $\left(x_h^k, x_h^k x_q^p\right)$ 染色，因为边 $x_h^k x_q^p$ 是负边，用颜色−1 对 $\left(x_q^p, x_h^k x_q^p\right)$ 染色。

情况 2.2：$f\left(x_h^k\right) \neq f\left(x_q^p\right)$。

情况 2.2.1：如果点 x_h^k 和 x_q^p 中有一个点不是特殊点，不妨设为 x_h^k。用颜色 3 对点 x_h^k 和 x_q^p 重新染色，当 $q \neq n_p$ 时用颜色 $f\left(x_q^p\right)$ 对 $\left(x_q^p, x_h^k x_q^p\right)$ 染色，此时，根据边 $x_h^k x_q^p$ 的符号，对其上的另一个 incidence $\left(x_h^k, x_h^k x_q^p\right)$ 用颜色 1 或−1 染色，而 x_h^k 不是特殊点，和它相关联的两个 incidence 的颜色为±2，因此该情况得证。当 $q = n_p$ 时，用颜色 $-f\left(x_q^p, x_q^p x_1^p\right)$ 对 $\left(x_q^p, x_h^k x_q^p\right)$ 染色，根据边 $x_h^k x_q^p$ 的符号对 $\left(x_h^k, x_h^k x_q^p\right)$ 染色，该情况得证。

情况 2.2.2：如果点 x_h^k 和 x_q^p 中都是特殊点，因为 $f\left(x_h^k\right) \neq f\left(x_q^p\right)$。

当 $f\left(x_h^k\right) = -f\left(x_q^p\right)$，此时 $x_h^k x_q^p$ 可能是 $x_{n_k}^k x_{n_p}^p$，$x_1^k x_{n_p-1}^p$ 和 $x_{n_k-1}^k x_1^p$。如果 $x_h^k x_q^p = x_{n_k}^k x_{n_p}^p$，根据特殊染色 f，不妨令 $f\left(x_h^k\right)=2$，$f\left(x_q^p\right)=-2$。此时，用颜色 3 对点 x_h^k 和 x_q^p 重新染色，用颜色 2 对 $\left(x_h^k, x_h^k x_q^p\right)$ 染色，用颜色−2 对 $\left(x_q^p, x_h^k x_q^p\right)$ 染色。当 $x_h^k x_q^p = x_1^k x_{n_p-1}^p$ 或者 $x_h^k x_q^p = x_{n_k-1}^k x_1^p$，这两种情况类似，我们介绍 $x_h^k x_q^p = x_1^k x_{n_p-1}^p$ 时的情况，根据特殊染色 f，我们有 $f\left(x_h^k\right)=1$，$f\left(x_q^p\right)=-1$。此时，用颜色 3 对点 x_h^k 和 x_q^p 重新染色，用颜色 1 对 $\left(x_h^k, x_h^k x_q^p\right)$ 染色，用颜色−1 对 $\left(x_q^p, x_h^k x_q^p\right)$ 染色。

当 $f\left(x_h^k\right) \neq -f\left(x_q^p\right)$，又 $f\left(x_h^k\right) \neq f\left(x_q^p\right)$，因此 $x_h^k x_q^p = x_{n_k}^k x_{n_p-1}^p, x_{n_k}^k x_1^p, x_{n_p}^p x_{n_k-1}^k$ 或者 $x_{n_k}^k x_1^p$，上述情况均类似，我们介绍 $x_h^k x_q^p = x_{n_k}^k x_1^p$ 时的情况，根据特殊染色 f，不妨令 $f\left(x_h^k\right)=2$，$f\left(x_q^p\right)=1$。

如果 $x_{n_k}^k x_1^k$ 是负边，$f\left(x_1^k, x_{n_k}^k x_1^k\right)=-1$，$f\left(x_{n_k}^k, x_{n_k}^k x_1^k\right)=1$，用颜色 3 对 x_q^p 重新染色，用颜色 1 对 $\left(x_q^p, x_h^k x_q^p\right)$ 染色，用颜色−1 对 $\left(x_h^k, x_h^k x_q^p\right)$ 染色。如果 $x_{n_k}^k x_1^k$ 是正边，则 $f\left(x_1^k, x_{n_k}^k x_1^k\right)=-1$，$f\left(x_{n_k}^k, x_{n_k}^k x_1^k\right)=-1$，用颜色 3 对点 x_q^p，incidence $\left(x_h^k, x_h^k x_1^k\right)$ 和 $\left(x_1^k, x_h^k x_1^k\right)$ 重新染色，用颜色 1 对 $\left(x_q^p, x_h^k x_q^p\right)$ 染色，用颜色−1 对 $\left(x_h^k, x_h^k x_q^p\right)$ 染色，该引理得证。

和图的点染色及边染色类似，在对符号图进行全染色时，我们也只需考虑连通图即可。此时，便可以根据引理 2.1，引理 2.2 和引理 2.4 得出：对任意的最大度为 3 的符号图 $\Gamma=(G,\sigma)$，$\chi_T(\Gamma) \leq 5$，因此定理 1 得证。而在本文中，我们考虑的是最大度为 3 的符号图，对其他符号图的全染色问题未曾涉及，类比全染色猜想(TTC)，我们可以提出下述问题：

问题 1：对任意的符号图 $\Gamma=(G,\sigma)$，$\chi_T(\Gamma) \leq \Delta+2$？

参考文献

[1] Behzad, M. (1965) Graphs and Their Chromatic Numbers. Ph.D. Thesis, Michigan State University, Michigan.

[2] Vijayaditya, N. (1971) On Total Chromatic Number of a Graph. *Journal of the London Mathematical Society*, **s2-3**, 405-408. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-3.3.405

[3] Kostochka, A.V. (1996) The Total Chromatic Number of Any Multigraph with Maximum Degree Five Is at Most Seven. *Discrete Mathematics*, **162**, 199-214. https://doi.org/10.1016/0012-365X(95)00286-6

[4] Harary, F. (1953) On the Notion of Balance of a Signed Graph. *The Michigan Mathematical Journal*, **2**, 143-146. https://doi.org/10.1307/mmj/1028989917

[5] Behzad, M., Chartrand, G. and Lesniak-Foster, L. (1979) Graphs and Digraphs, Wadsworth International.