Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(10), 1847-1864
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.910214

次线性框架下受随机扰动的非自治食饵模型相关问题

许晶晶*，**郭 睿**，**闫理坦**

东华大学理学院，上海
Email: *943672268@qq.com

收稿日期：2020年10月7日；录用日期：2020年10月22日；发布日期：2020年10月29日

摘 要

在本文，我们考虑次线性空间下的二种群随机食饵模型。研究模型中全局正解的存在性、有界性以及系统的稳定性。在相关定理的推导中，将会引用到G-布朗运动的许多基本性质和结论，大部分与经典布朗运动相似。全文的讨论都建立在满足局部Lipschitz条件的前提下。

关键词

食饵模型，G-布朗运动，G-随机微分方程，稳定性

Related Problems of Non-Autonomous Predator-Prey Model with Stochastic Disturbance under Sublinear Framework

Jingjing Xu*, **Rui Guo**, **Litan Yan**

College of Science, Donghua University, Shanghai
Email: *943672268@qq.com

* 通讯作者。

文章引用: 许晶晶, 郭睿, 闫理坦. 次线性框架下受随机扰动的非自治食饵模型[J]. 应用数学进展, 2020, 9(10): 1865-1878. DOI: 10.12677/aam.2020.910214

Received: Oct. 7^{th}, 2020; accepted: Oct. 22^{nd}, 2020; published: Oct. 29^{th}, 2020

Abstract

In this paper, we consider the two-species stochastic predator-prey model under sublinear space. We investigate the existence of global positive solution, boundedness of solution and the stability of system. To obtain the related theorem, some basic knowledge and properties of G-Brownian motion will be cited which are similar to classical Brown motion actually. And all the discussions are under the locally Lipschitz condition.

Keywords

Predator-Prey Model, G-Brownian Motion, G-Stochastic Differential Equations, Stability

1. 引言

近年来，生物数学模型由于其广泛性和深远的背景意义吸引了许多数学家和生物学家的研究兴趣。自从Volterra 和Lotka 提出食饵模型后，基于此模型的许多相关问题也得到了研究。令$x(t)$和$y(t)$ 分别表示食饵和捕食者的种群密度，则经典的确定性二种群食饵模型如下：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[r_1(t) - a_{11}(t)x - a_{12}(t)y] \\ \frac{dy}{dt} = y[-r_2(t) + a_{21}(t)x - a_{22}(t)y] \end{cases} \tag{1}$$

其中$r_1(t)$ 和$r_2(t)$ 分别表示食饵和捕食者的内禀增长率，$a_{11}(t)$ 和$a_{22}(t)$ 表示二者的密度制约系数。$a_{12}(t)$ 是捕食者对食饵的捕获率，而$a_{21}(t)$ 表示其将吸收的营养物质用于再繁殖的转化率。$r_i(t)$和$a_{ij}(t)$ 是定义在$R_+ = (0, +\infty)$, i,j=1,2 上的有界连续函数。该系统已经得到广泛研究 [1–5]，关于其解的持久性、灭绝性和渐近稳定性都有充分的论证。

由于现实生活中会受到各种各样的环境扰动来影响生态系统的动态行为，我们需要将环境噪声纳入考虑，并将该模型推广到随机系统中 [6]。Rudnicki [7] 将环境影响带来的随机扰动项加

入Lotka-Volterra食饵模型，并假设该扰动正比于相应的种群密度，于是得到了如下新模型：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[\sigma_1 dW_t^1 + \sigma_2 dW_t^2 + (\alpha - \beta y - \mu x)] \\ \frac{dy}{dt} = y[\rho_1 dW_t^1 + \rho_2 dW_t^2 + (-\gamma + \delta x - \nu y)] \end{cases}$$

其中W_t^1 和W_t^2 是两个相互独立的Wiener过程。Rudnicki在自治情况下证明了该系统解的分布密度能在L^1中收敛于一个不变密度或者利用Fokker-Planck 方程弱收敛于一个奇异测度。事实上，由中心极限定理可知随机扰动项服从正态分布，于是在短相关时间内，可以用$\sigma_i(t)dB_i(t)$ 来估计噪声，$\sigma_i(t)$ 代表噪声强度$B_i(t)$ 为布朗运动。由于环境噪声主要影响密度增长率，我们可以将$r_i(t)$ 替换为$r_i(t) + \sigma_i(t)dB_i(t)$，得到如下模型：

$$\begin{cases} dx = x[r_1(t) - a_{11}(t)x - a_{12}(t)y]dt + \sigma_1(t)xdB_1(t) \\ dy = y[-r_2(t) + a_{21}(t)x - a_{22}(t)y]dt + \sigma_2(t)ydB_2(t) \end{cases} \tag{2}$$

Cheng [8]研究了系统(2)的稳定性，例如全局正解的存在唯一性和解的有界性。Liu [9]进一步研究了非自治系统持久性和灭绝性的临界值以及系统的稳定性。

但是，现实生活中的许多概率模型都充满了不确定性，如正态分布的均值不确定性和方差不确定性。通过引入非线性和次线性期望，彭实戈院士 [10]建立了G-期望和相应的随机微分理论，包括G-正态分布、G-布朗运动等相关计算。这个理论在描述模型不确定性、优化问题和偏微分方程概率解释等方面起到了重要作用。此外，彭 [11]建立了G-布朗运动驱动的Itô 公式，构造非常有趣。在次线性期望下，G-布朗运动具有独立平稳增量并且服从G-正态分布，它的二次方差是一个不确定性过程但也具有独立平稳增量。因此研究G-布朗运动驱动的随机生物模型具有极大的意义，能更好地判断生态系统的变化。

近年来G-布朗运动驱动的随机微分方程(GSDE)研究取得了巨大的进展 [12] [13] [14]。X.Li研究了GSDEs 及其Lyapunov条件, Y.Ren研究了脉冲微分方程解的指数稳定性和p阶矩稳定性，以及G-布朗运动驱动的变时滞网络上的随机耦合系统的渐近性等。在本文中，我们用$\sigma_i(t)dB_i(t)$来表示误差项，其中$B_i(t)$ 为G-布朗运动，进一步探究二种群非自治食饵模型的相关问题，即

$$\begin{cases} dx = x[r_1(t) - a_{11}(t)x - a_{12}(t)y]dt + h_1(t)d\langle B_1\rangle_t + \sigma_1(t)xdB_1(t) \\ dy = y[-r_2(t) + a_{21}(t)x - a_{22}(t)y]dt + h_2(t)d\langle B_2\rangle_t + \sigma_2(t)xdB_2(t) \end{cases} \tag{3}$$

其中B_1和B_2为G-布朗运动，二次方差项刻画了G-布朗运动引起的空间不确定性。

2. 预备知识

在本节，我们先介绍非线性期望的相关知识和结论 [10]。Ω 为$\mathbb{R}^d$上的全体实值函数空间，ω_0=0. 对于$\omega \in \Omega$，令$B_t(\omega) := \omega_t$为标准过程，$\mathcal{B}(\Omega)$为Ω上的Borel代数。定义

$$Lip(\Omega) := \varphi(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}), n \geq 1, 0 \leq t_1 \leq \dots < t_n < \infty, \varphi \in C_{b,lip}(\mathbb{R}^{d\times n}),$$

DOI: 10.12677/aam.2020.910214

其中$C_{b,lip}(\mathbb{R}^{d\times n})$是定义在$\mathbb{R}^{d\times n}$ 上的有界一致Lipschitz连续函数全体构成的集合。

定义次线性单调函数$G:\mathbb{S}^d\to\mathbb{R}$，

$$G(A)=\frac{1}{2}\sup_{Q\in\Sigma}tr[AQ],$$

其中$\Sigma\subset\mathbb{S}^d_+$是一个有界凸闭集。于是可以在$(\Omega,Lip(\Omega))$上构造相关的G-期望：对给定$\xi\in Lip(\Omega)$，其具体形式如下

$$\xi=\varphi(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\ldots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}}),0\le t_1\le\ldots<t_n$$

定义

$$\mathbb{E}[\xi]:=u_1(0,0),$$

其中$u_1(0,0)\in\mathbb{R}$由如下过程得到：对$k=n,\ldots,1,\ u_k:=u_k(t,x;x_1,\ldots,x_{k-1})$ 为带有参数$(x_1,\ldots,x_{k-1})\in\mathbb{R}^{d\times(k-1)}$ 的关于(t,x)的函数，是定义在$[t_{k-1},t_k)\times\mathbb{R}^d$上的G- 热方程的解:

$$\frac{\partial_{u_k}}{\partial t}-G(D^2_{u_k})=0$$

边界条件为

$$u_k(t_k,x;x_1,\ldots,x_{k-1})=u_{k+1}(t_k,x;x_1,\ldots,x_{k-1},x),$$

其中$u_{n+1}=(t_n,x;x_1,\ldots,x_{n-1},x):=\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1},x)$. 注意到在期望$\mathbb{E}[\cdot]$ 下，标准过程$(B_t)_{t\ge0}$是一个G- 布朗运动。接下来，我们给出次线性期望框架下的一些定义。

Ω为给定集合，$\mathcal{H}$为定义在Ω上的实值函数所组成的一个线性空间。我们假设$\mathcal{H}$满足下述条件：

(1) 对实值常数c，$c\in\mathcal{H}$;

(2) 若$X\in\mathcal{H}$，则$|X|\in\mathcal{H}$

定义 2.1 *一个次线性期望$\mathbb{E}$是定义在随机变量空间$\mathcal{H}$上的泛函$\mathbb{E}:\mathcal{H}\mapsto\mathbb{R}$，满足:*

- *单调性：若$X\le Y$，则$\mathbb{E}[X]\le\mathbb{E}[Y]$.*
- *保常数性：对$c\in\mathbb{R}$，$\mathbb{E}[c]=c$.*
- *次可加性：对$X,Y\in\mathcal{H}$，$\mathbb{E}[X+Y]\le\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$.*
- *正齐次性：对$\lambda\ge0$，$\mathbb{E}[\lambda X]=\lambda\mathbb{E}[X]$.*

称三元组$(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$为一个次线性期望空间。

定义 2.2 *称次线性期望空间$(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$上的$d$维随机过程$(B_t)_{t\ge0}$为$G$-布朗运动，如果有：*

1. *$B_0(\omega)=0$;*
2. *(B_t)的增量平稳且独立，即对$t,s\ge0$，$B_{t+s}-B_t$和B_s 独立同分布，并且对于所有的$n\in\mathbb{N}$和$0\le t_1\le\ldots\le t_n\le t$，$B_{t+s}-B_t$独立于$(B_{t_1},B_{t_2},\ldots,B_{t_n})$.*

3. $\lim_{t\to 0}\mathbb{E}[|B_t|^3]t^{-1}=0$

记$L_G^p(\Omega)$为范数$\|\cdot\|_p:=\mathbb{E}[|\cdot|^p]^{\frac{1}{p}}$下$L_{ip}(\Omega)$的完备化空间。对每个$t\in[0,\infty)$，我们有如下表示:

- $\Omega_t:=\omega_{\cdot\wedge t}:\omega\in\Omega$;
- $\mathcal{F}_t:=\mathcal{B}(\Omega_t)$;
- $L^0(\Omega)$: $\mathcal{B}(\Omega)$-可测的实值函数空间;
- $L^0(\Omega_t)$: $\mathcal{B}(\Omega_t)$-可测的实值函数构成的空间;
- $\mathcal{B}_b(\Omega)$: $L^0(\Omega)$中的有界函数全体; $\mathcal{B}_b(\Omega_t):=\mathcal{B}_b(\Omega)\cap L^0(\Omega_t)$;
- $\mathcal{C}_b(\Omega)$: $\mathcal{B}_b(\Omega)$中的连续函数全体; $\mathcal{C}_b(\Omega_t):=\mathcal{C}_b(\Omega)\cap L^0(\Omega_t)$;

我们将G-期望$\mathbb{E}[\cdot]$的定义从$L_{ip}(\Omega)$扩张到$L^0(\Omega)$, i.e.,构造一个上期望$\bar{\mathbb{E}}[\cdot]$:

$$\bar{\mathbb{E}}[X]:=\sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}E^{\mathbb{P}}[X],X\in L^0(\Omega),$$

其中$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$是定义在$(\Omega,\mathcal{B}(\Omega))$上$\sigma-$可加的相对弱紧的概率测度族。该上期望在$L_{ip}(\Omega)$ 上与G-期望$\mathbb{E}[\cdot]$一致，从而在其完备空间$L_G^1(\Omega)$上也一致。于是可以定义概率测度族$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$的Choquet容度为：

$$\bar{C}(A):=\sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}\mathbb{P}(A),A\in\mathcal{B}(\Omega),$$

由此便引入了“拟必然”(q.s.)的概念：

定义 2.3 集合$A\in\mathcal{B}(\Omega)$，若$\bar{C}(A)=0$，则称A为极集。我们称一个性质为拟必然成立，如果其在极集以外都成立。

对于每一个$T\geq 0$，以及区间$[0,T]$的一个有限子集合$\Delta=\{t_1,...,t_N\},0=t_0<\ldots<t_N=T$.对给定的$p\geq 1$, 考虑以下形式的简单过程：对于一个给定的分割$\{t_1,...,t_N\}=\Delta$, 记

$$\eta_t(\omega)=\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j(\omega)1_{[t_j,t_{j+1}]}(t)$$

其中$\xi_j\in L_G^p(\Omega_{t_j}),j=0,\ldots,N-1$是给定的。这类简单过程的集合称为$M_G^{P,0}(0,T)$. 对$\eta\in M_G^{P,0}(0,T)$, 我们可以分别定义其关于G- 布朗运动的Bochner积分和Itô积分：

$$\int_0^t\eta_t(\omega)dt=\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j(\omega)(t_{j+1}-t_j)$$

及

$$\int_0^t\eta_s dB_s=\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})$$

对给定的$p \geq 1$, 在范数

$$\|\eta\|_{M_G^P(0,T)} := \left(\bar{\mathbb{E}}\left[\int_0^T |\eta_t|^p dt\right]\right)^{\frac{1}{p}}$$

下，$M_G^P(0,T)$记为$M_G^{P,0}(0,T)$的完备化空间。

可以发现，Borel-Cantelli引理和Markov不等式对Choquet容度和上期望依旧成立 [15]。

引理 1 *(Markov不等式)*对给定的$p > 0$，令$X \in L^0(\Omega_t)$满足$\bar{\mathbb{E}}[|X|^p] < \infty$. 则对$a > 0$,有

$$\bar{C}(|X| > a) \leq \frac{\bar{\mathbb{E}}[|X|^p]}{a^p}$$

引理 2 *(Borel-Cantelli引理)* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\Omega)$满足

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}(A_n) < \infty.$$

则$\limsup_{n\to\infty} A_n$为一个极集。

定义 2.4 给定$p \geq 1$，我们记$M_*^P([0,T])$为$M_b^P([0,T])$关于如下范数的完备化空间,:

$$\|\eta\|_p := \left(\bar{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{T}\int_0^t |\eta_t|^p dt\right]\right)^{1/p}$$

注意到，对给定的$\eta \in M_*^2(0,T)$，存在关于t路径连续的过程$\bar{X}$使得对任意$t \in [0,T]$，都有$\bar{C}(|X_t - \bar{X}_t| \neq 0) = 0$ [16].

定义 2.5 对给定$p \geq 1$, 称随机过程η属于$M_\omega^P([0,T])$, 如果存在一个趋于无穷大的停时序列$\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$与之相关联，使得

$$\eta \mathbb{1}_{[0,\tau_m \wedge T]} \in M_*^P([0,T]), \forall m \in \mathbb{N}.$$

引理 3 *(B-D-G不等式) [17]*对$\eta \in M_\omega^P([0,T])$，下属不等式成立：给定$p > 0$，存在取值仅依赖于$p$的$C_p > 0$, 使得

$$\bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s \eta_u dB_u\right|^p\right] \leq C_p \bar{\sigma}^{\frac{p}{2}} \bar{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^t |\eta_s|^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}\right].$$

3. 全局正解的存在性

对n维随机微分方程

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s)\, ds + \int_0^t f(s, X_s)\, d\langle B, B\rangle_s, 0 \leq t \leq T, q.s. \tag{4}$$

其中$x \in \mathbb{R}^n$为初值，$\langle B, B\rangle = (\langle B^i, B^j\rangle)_{i,j=1,2,\ldots,d}$为B的方差矩阵。回顾一致Lipschitz连续条件：

(H1) 对$p \geq 2$和$x \in \mathbb{R}^n, f(\cdot,x), h^{ij}(\cdot,x), g^j(\cdot,x) \in M_*^p([0,T];\mathbb{R}^n), i,j = 1,\ldots,d.$
(H2) 系数f,h和g关于x一致Lipschitz连续，i.e.对每个$t \in [0,T]$和$x,x' \in \mathbb{R}^n$，有

$$|f(t,x) - f(t,x')| + \|h(t,x) - h(t,x')\| + \|g(t,x) + g(t,x')\| \leq C_L|x - x'|$$

其中$\|\cdot\|$为矩阵的Hilbert-Schmidt范数。

在本文，我们假设所讨论模型的系数为关于t连续的确定性函数，并且关于x,x'(或者y,y')$\in B_0(R) := a : |a| < R$ 局部Lipschitz连续。同时，我们增加下述假设：
假设 1 存在一个确定性的非负函数$V \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$，使得

$$\inf_{|x|>R}\inf_{t\in[0,T]} V(t,x) \to \infty, asR \to \infty,$$

并且存在常数$C_{LY} > 0$，对所有的$(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$，有

$$\mathcal{L}V(t,x) \leq C_{LY}V(t,x),$$

其中$\mathcal{L}$是一个微分算子，定义如下：

$$\mathcal{L}V(t,x) = \partial_t V + \partial_{x^\nu}Vf^\nu + G\left((\partial_{x^\nu}V\cdot(h^{\nu ij} + h^{\nu ji}) + \partial^2_{x^\mu x^\nu}V\cdot g^{\mu i}g^{\nu j})^d_{i,j=1}\right)$$

引理 4 对每个具有连续路径$X \in M^1_\omega([0,T];\mathbb{R}^n)$和每个$V \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$，我们有$\eta(V,X) \in M^p_\omega([0,T];\mathbb{S}^d)$, $\forall p \geq 1$，其中

$$\eta.^{ij}(V,X) := \partial_{x^\nu}V(\cdot,X.)(h^{\nu ij}(\cdot,X.) + h^{\nu ji}(\cdot,X.)) + \partial^2_{x^\mu x^\nu}V(\cdot,X.)g^{\mu i}(\cdot,X.)g^{\nu j}(\cdot,X.).$$

在本文，我们假设系统(3)的系数是有界的，容易证明这些系数也满足局部Lipschitz条件。

定理 3.1 假设局部*Lipschitz*条件和假设*1*成立。那么，对任意初值$(x_0,y_0) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$，系统*(3)*在$\mathbb{R}^2_+$上存在唯一的全局解$q.s.$.
证明 3.1 考虑如下系统

$$\begin{cases} du(t) = x[r_1(t) - a_{11}(t)e^{u(t)} - a_{12}(t)e^{v(t)}]dt + h_1(t)d\langle B_1\rangle_t + \sigma_1(t)xdB_1(t) \\ dv(t) = y[-r_2(t) + a_{21}(t)e^{u(t)} - a_{22}(t)e^{v(t)}]dt + h_2(t)d\langle B_2\rangle_t + \sigma_2(t)xdB_2(t) \end{cases} \tag{5}$$

显然，*(5)*的系数满足局部*Lipschitz*条件。因此，对任意给定的初值$(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2_+$，存在唯一一个局部解$(u(t),v(t)), t \in [0,\tau_e)$，其中$\tau_e$为爆破时刻。因此，由*Itô*公式，能得到$(e^{u(t)},e^{v(t)})$是系统*(3)*的唯一局部正解，初值为$(x_0,y_0)$.

要证明正解是全局的，我们只需证明$\tau_e = \infty, q.s.$ 令$m_0 \geq 1$充分大使得x_0,y_0属于$[1/m_0,m_0]$. 对每个整数$m \geq m_0$，定义停时

$$\tau_m = inf\{t \in [0,\tau_e); min\{x(t),y(t)\} \leq \frac{1}{m}\ or\ max\{x(t),y(t)\} \geq m\},$$

令$\inf\emptyset=\infty$.显然，随着$m\to\infty$，τ_m不断递增。令$\tau_\infty=\lim_{m\to\infty}\tau_m$，$\tau_\infty\le\tau_e\ q.s.$ 如果能证明$\tau_\infty=\infty\ q.s.$, 则有$\tau_e=\infty\ q.s.$并且对所有$t\ge 0,(x(t),y(t))\in\mathbb{R}^2_+\ q.s.$

为了证明该结论，我们先定义一个C^2上的函数$V:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}_+$,

$$V(x,y)=c_1(x-1-\log x)+c_2(y-1-\log y)$$

c_1,c_2为常数。我们可以推出这是一个非负函数，因为

$$u-1-\log(u)\ge 0\ on\ u>0$$

令$m\ge m_0\ and\ T>0$为任意数。当$0\le t\le\tau_m\wedge T$, 对函数V 运用G-$It\hat{o}$公式，得到

$$\begin{aligned}V(X,Y)=&V(x_0,y_0)+\int_0^{T\wedge\tau_m}(c_1-\frac{c_1}{x})\sigma_1(t)xdB_1(t)\\&+\int_0^{T\wedge\tau_m}(c_1-\frac{c_1}{x})x(r_1(t)-a_{11}(t)x-a_{12}(t)y)dt+\int_0^{T\wedge\tau_m}\left[(c_1-\frac{c_1}{x})h_1x+\frac{c_1}{x^2}\right]d\langle B_1\rangle_t\\&+\int_0^{T\wedge\tau_m}(c_2-\frac{c_2}{y})\sigma_2(t)ydB_2(t)+\int_0^{T\wedge\tau_m}(c_2-\frac{c_2}{y})y(-r_2(t)+a_{21}(t)x-a_{22}(t)y)dt\\&+\int_0^{T\wedge\tau_m}\left[(c_2-\frac{c_2}{y})h_2y+\frac{c_2}{y^2}\right]d\langle B_2\rangle_t\end{aligned}\tag{6}$$

运用的定理1的标记，上述不等式可以写为

$$\begin{aligned}V(X,Y)-V(x_0,y_0)=&\int_0^{T\wedge\tau_m}LV(X,Y)dt\\&+\int_0^{T\wedge\tau_m}(c_1-\frac{c_1}{x})\sigma_1(t)xdB_1(t)+\int_0^{T\wedge\tau_m}(c_2-\frac{c_2}{y})\sigma_2(t)ydB_2(t)\\&+\int_0^{T\wedge\tau_m}\left[(c_1-\frac{c_1}{x})h_1x+\frac{c_1}{x^2}\right]d\langle B_1\rangle_t+\int_0^{T\wedge\tau_m}\left[(c_2-\frac{c_2}{y})h_2y+\frac{c_2}{y^2}\right]d\langle B_2\rangle_t\\&-\int_0^{T\wedge\tau_m}G\left(\eta(V,x)\right)dt-\int_0^{T\wedge\tau_m}G\left(\eta(V,y)\right)dt\\=&\int_0^{T}LV(X,Y)\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}dt\\&+\int_0^{T}(c_1-\frac{c_1}{x})\sigma_1(t)x\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}dB_1(t)+\int_0^{T}(c_2-\frac{c_2}{y})\sigma_2(t)y(t)\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}dB_2(t)\\&+\int_0^{T}\left[(c_1-\frac{c_1}{x})h_1x+\frac{c_1}{x^2}\right]\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}d\langle B_1\rangle_t+\int_0^{T}\left[(c_2-\frac{c_2}{y})h_2y+\frac{c_2}{y^2}\right]\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}d\langle B_2\rangle_t\\&-\int_0^{T}G\left(\eta(V,x)\right)\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}dt-\int_0^{T}G\left(\eta(V,y)\right)\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}dt\end{aligned}\tag{7}$$

由于$(c_1-\frac{c_1}{x})\sigma_1(t)x$和$(c_2-\frac{c_2}{y})\sigma_2(t)y$关于$t$连续，同时分别关于$x$,$y$一致$Lipschitz$连续，于是可以发

现，对任意$p \geq 2$，$(c_1 - \frac{c_1}{x})\sigma_1(t)x\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}$和$(c_2 - \frac{c_2}{y})\sigma_2(t)y(t)\mathbb{1}_{[0,\tau_m]} \in M_*^P([0,T])$ [17]. 于是，取G-期望得到

$$\bar{\mathbb{E}}\left[\int_0^T (c_1 - \frac{c_1}{x})\sigma_1(t)x\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}dB_1(t)\right] = 0$$

及

$$\bar{\mathbb{E}}\left[\int_0^T (c_2 - \frac{c_2}{y})\sigma_2(t)y(t)\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}dB_2(t)\right] = 0$$

另一方面，对任意$p \geq 1$，$\eta(V,x)$和$\eta(V,y) \in M_\omega^P([0,T];\mathbb{R})$, 这表明了$\eta(V,x)\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}$和$\eta(V,y)\mathbb{1}_{[0,\tau_m]} \in M_\omega^P([0,T];\mathbb{R})$. 因此，由 [18]附录可得

$$\bar{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \left[(c_1 - \frac{c_1}{x})h_1 x + \frac{c_1}{x^2}\right]\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}d\langle B_1\rangle_t - \int_0^T G\left(\eta(V,x)\right)\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}dt\right] \leq 0$$

及

$$\bar{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \left[(c_2 - \frac{c_2}{y})h_2 y + \frac{c_2}{y^2}\right]\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}d\langle B_2\rangle_t - \int_0^T G\left(\eta(V,y)\right)\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}dt\right] \leq 0$$

通过假设1, 我们有

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{E}}V(X_{T\wedge\tau_m}, Y_{T\wedge\tau_m}) &\leq V(x_0,y_0) + \bar{\mathbb{E}}\left[\int_0^{T\wedge\tau_m} LV(X,Y)dt\right] \\ &\leq V(x_0,y_0) + \bar{\mathbb{E}}\left[\int_0^{T\wedge\tau_m} C_{LY}V(t,x,y)dt\right] \\ &\leq V(x_0,y_0) + \bar{\mathbb{E}}\left[\int_0^{T\wedge\tau_m} C_{LY}V(x_{t\wedge\tau_m}, y_{t\wedge\tau_m})dt\right]\end{aligned}$$

再由$Gronwall$不等式 [10]，得到

$$\bar{\mathbb{E}}V(X_{T\wedge\tau_m}, Y_{T\wedge\tau_m}) \leq V(x_0,y_0)e^{C_{LY}T}$$

注意到，对每个$\omega \in \tau_k \leq T$, 至少存在$X_{T\wedge\tau_m}$和$Y_{T\wedge\tau_m}$中的一项等于m或者$\frac{1}{m}$. 记$\hat{c}$=min$\{c_1, c_2\}$, 于是

$$V\left(X(\tau_m,\omega), Y(\tau_m,\omega)\right) \geq \hat{c}\left[(k - 1 + \log\frac{1}{k}) \wedge (\frac{1}{k} - 1 + \log k)\right]$$

因此，可以得到

$$\begin{aligned}V(x_0,y_0)e^{C_{LY}T} &\geq \bar{\mathbb{E}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau_m \leq T\}}(\omega)V\left(X(\tau_m,\omega), Y(\tau_m,\omega)\right)\right] \\ &\geq \bar{C}(\{\omega : \tau_m \leq T\})V\left(X(\tau_m,\omega), Y(\tau_m,\omega)\right) \\ &\geq \bar{C}(\{\omega : \tau_m \leq T\})\hat{c}\left[(k - 1 + \log\frac{1}{k}) \wedge (\frac{1}{k} - 1 + \log k)\right]\end{aligned}$$

其中$\mathbb{1}_{\tau_m \le T}$是$\tau_m \le T$的示性函数。令$m \to \infty$有

$$\lim_{m\to\infty} \bar{C}\{\omega : \tau_m \le T\} = 0$$

从而

$$\bar{C}\{\tau_\infty \le T\} = 0$$

因为$T > 0$是任意的，我们可以得出

$$\bar{C}\{\tau_\infty = \infty\} = 1.\ q.s.$$

于是现在我们完成了整个证明，即在$\mathbb{R}_+^2$上存在唯一局部解$q.s.$

4. 渐近有界性

在本节，我们将继续讨论系统(3)的渐近有界性。首先为了讨论方便，做如下标记：

$$f(t,x,y) = \begin{pmatrix} x[r_1(t) - a_{11}(t)x - a_{12}(t)y] \\ y[-r_2(t) + a_{21}(t)x - a_{22}(t)y] \end{pmatrix},$$

$$h(t,x,y) = \begin{pmatrix} h_1(t)x \\ h_2(t)y \end{pmatrix}, g(t,x,y) = \begin{pmatrix} \sigma_1(t)x \\ \sigma_2(t)y \end{pmatrix} \tag{8}$$

假设 2 对$l > 0$，存在常数K_l使得

$$|f(t,x,y) - f(t,x',y')|^2 \vee |h(t,x,y) - h(t,x',y')|^2 \vee |g(t,x,y) - g(t,x',y')|^2 \le K_l(|(x,y) - (x',y')|^2)$$

其中$t \ge 0$，(x,y)且$(x',y') \in \mathbb{R}_+^2$，$|(x,y)| \vee |(x',y')| \le l$.

假设 3 存在常数$c_1, c_2, p \ge 2$和函数$V(t,x,y)$使得

$$c_1|(x,y)|^p \le V(t,x,y) \le c_2|(x,y)|^p$$

并且，$LV(t,x,y) \le C_{LY}V(t,x,y)$

定理 4.1 若假设2和假设3成立，那么系统(3)是渐近有界的，*i.e.*,

$$\lim_{t\to\infty} \sup \bar{\mathbb{E}}|(x,y)_t|^p \le \frac{c_2}{c_1}|(x_0,y_0)|^p$$

证明 4.1 定义停时

$$\tau_k = \inf\{t : |(x(t),y(t))| \ge k\}, t \ge 0$$

对$e^{\epsilon t}V(t,x,y)$运用G-$It\hat{o}$'公式，其中ϵ为一个任意数，于是有

$$\begin{aligned} d\left(e^{\epsilon t}V(t,x,y)\right) = & V(x,y)\epsilon e^{\epsilon t}dt + e^{\epsilon t}V_x(x,y)x[r_1(t)-a_{11}(t)x-a_{12}(t)y]dt \\ & + e^{\epsilon t}V_x(x,y)\sigma_1(t)xdB_1(t) + e^{\epsilon t}V_x(x,y)h_1(t)xd\langle B_1\rangle_t \\ & + \frac{1}{2}e^{\epsilon t}V_{xy}(x,y)\sigma_1^2x^2d\langle B_1\rangle_t \\ & + e^{\epsilon t}V_y(x,y)y[-r_2(t)+a_{21}(t)x-a_{22}(t)y]dt + e^{\epsilon t}\sigma_2(t)ydB_1(t) \\ & + e^{\epsilon t}V_y(x,y)h_2(t)yd\langle B_2\rangle_t + \frac{1}{2}e^{\epsilon t}V_{yx}(x,y)\sigma_2^2y^2d\langle B_2\rangle_t \end{aligned}$$

从0到τ_k积分，得到

$$\begin{aligned} e^{\epsilon(t\wedge\tau_k)}V(x_{t\wedge\tau_k},y_{t\wedge\tau_k}) = & V(x_0,y_0) + \int_0^{t\wedge\tau_k} e^{\epsilon s}LV(x,y)ds + M_t^0 \\ & + \int_0^{t\wedge\tau_k} e^{\epsilon s}V_x\sigma_1(s)xdB_1(s) + \int_0^{t\wedge\tau_k} e^{\epsilon s}V_y\sigma_2(s)ydB_2(s) \end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned} M_t^0 = & \int_0^{t\wedge\tau_k} V_xh_1xd\langle B_1\rangle_t + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_k} e^{\epsilon s}V_{xy}\sigma_1^2x^2d\langle B_1\rangle_t \\ & + \int_0^{t\wedge\tau_k} V_yh_yxd\langle B_2\rangle_t + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_k} e^{\epsilon s}V_{yx}\sigma_2^2y^2d\langle B_2\rangle_t \\ & - \int_0^{t\wedge\tau_k} e^{\epsilon s}G\left(\eta(V,x)\right)ds - \int_0^{t\wedge\tau_k} e^{\epsilon s}G\left(\eta(V,y)\right)ds \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^{t\wedge\tau_k} e^{\epsilon s}LV(x,y)ds & \le \int_0^{t\wedge\tau_k} e^{\epsilon s}C_{LY}V(x,y)ds \\ & \le \int_0^{t\wedge\tau_k} e^{\epsilon s}C_{LY}c_2|(x,y)|^pds \end{aligned}$$

根据 *[18]*, M_t^0为一个G-鞅。对*(9)*式取G-期望，可以得到

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}e^{\epsilon t\wedge\tau_k}c_1|(x,y)_{t\wedge\tau_k}|^p & \le \bar{\mathbb{E}}e^{\epsilon t\wedge\tau_k}V(x,y) \\ & \le c_2|(x_0,y_0)|^p + \int_0^{t\wedge\tau_k} e^{\epsilon s}\bar{\mathbb{E}}C_{LY}c_2|(x,y)_s|^pds \end{aligned}$$

等价于

$$\bar{\mathbb{E}}e^{\epsilon t\wedge\tau_k}c_1|(x,y)_{t\wedge\tau_k}|^p \le c_2|(x_0,y_0)|^p + \frac{c_2C_{LY}}{c_1}\int_0^{t\wedge\tau_k}\bar{\mathbb{E}}e^{\epsilon s}c_1|(x,y)|^pds$$

通过$Gronwall$不等式，有

$$\bar{\mathbb{E}}e^{\epsilon t\wedge\tau_k}c_1|(x,y)_{t\wedge\tau_k}|^p \le c_2|(x_0,y_0)|^pe^{\frac{c_2C_{LY}}{c_1}t}$$

令$k \to \infty$，有

$$\bar{\mathbb{E}}|(x,y)_t|^p \le \frac{c_2}{c_1}|(x_0,y_0)|^p e^{(\frac{c_2 C_{LY}}{c_1}-\epsilon)t}$$

取$\epsilon = \frac{c_2 C_{LY}}{c_1}$, 得到

$$\lim_{t\to\infty}\sup \bar{\mathbb{E}}|(x,y)_t|^p \le \frac{c_2}{c_1}|(x_0,y_0)|^p$$

于是便完成了整个证明过程。

5. 稳定性

最后一小节我们将讨论矩稳定性，先给出稳定性的定义：

定义 5.1 $X^{s,(x,y)}$表示初值为$(X,Y)_s=(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$的*GSDE(3)*的解。我们称系统的解为：

(i) p阶稳定,$p>0$, 如果对每个$\epsilon>0$, 都存在$\delta>0$, 使得

$$\sup_{|(x,y)|\le\delta}\sup_{t\ge s}\bar{\mathbb{E}}[|X_t^{s,(x,y)}|^p] < \epsilon;$$

(ii) 渐近p阶稳定, 如果满足p阶稳定且

$$\bar{\mathbb{E}}[|X_t^{s,(x,y)}|^p] \to 0, as\ t\to\infty';$$

(iii) 指数p阶稳定，如果存在常数C和λ满足

$$\bar{\mathbb{E}}[|X_t^{s,(x,y)}|^p] \le C|(x,y)|^p e^{-\lambda(t-s)}.$$

特别地，当$p=2$, 我们称系统为均方（渐近，指数）稳定。

引理 5 *([18],定理5.5)* 假设存在函数$V(t,x,y)\in\mathcal{C}^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^2)$使得对所有的$t\ge 0$, 存在常数$c_1>0$，$c_2>0$及$p>0$, 满足

$$c_1|(x,y)|^p \le V(t,x,y) \le c_2|(x,y)|^p$$

则，

(a) 解为p阶稳定，若

$$LV \le 0,$$

(b) 解为p阶指数稳定，如果存在$\lambda>0$使得对所有$(t,x,y)\in\mathcal{C}^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^2)$,

$$LV(t,x,y) \le -\lambda V(t,x,y).$$

现在，我们给出G框架下指数稳定的相关定理。

定理 5.1 考虑满足以下条件的系统(3):

(a) $h(t,x,y), f(t,x,y)$及$g(t,x,y)$满足局部$Lipschitz$条件；

(b) $f(t,(x,y)) = h(t,(x,y)) = g(t,(x,y)) \equiv 0$

(c) 对$t \geq 0$, 存在常数$K > 0$使得

$$x^2[r_1(t)-a_{11}(t)x-a_{12}(t)y]+y^2[-r_2(t)+a_{21}(t)x-a_{22}(t)y]\vee h_1x^2+h_2y^2\vee\sigma_1^2x^2+\sigma_2^2y^2 \leq K(x^2+y^2)$$

如果系统的解为指数p阶稳定，$p > 0$, 即对所有$(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\bar{\mathbb{E}}[|X_t^{s,(x,y)}|^p] \leq C|(x,y)|^p e^{-\lambda(t-s)}$$

其中$\lambda > 0$, 那么

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\log(|(x,y)|) \leq -\frac{\lambda}{p} < 0,\ \ q.s.,$$

这意味着解是拟必然指数稳定的。

证明 5.1 不失一般性，我们考虑$s = 0$的情形。对$(|(x,y)_t|^2+\delta)^{\frac{p}{2}}$运用$G$-$It\hat{o}$公式，可知对每个$m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left(|(x,y)_t|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}} = {} & \left(|(x,y)_{m-1}|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}} \\
& + \int_{m-1}^{t} p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}}\left[x^2(r_1-a_{11}x-a_{12}y)+y^2(-r_2+a_{21}x-a_{22}y)\right]du \\
& + \int_{m-1}^{t} p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}}\sigma_1x^2dB_1(u) + \int_{m-1}^{t} p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}}\sigma_2y^2dB_2(u) \\
& + \int_{m-1}^{t} p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}}h_1x^2d\langle B_1\rangle_u + \int_{m-1}^{t} p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}}h_2y^2d\langle B_2\rangle_u \\
& + \int_{m-1}^{t} \frac{1}{2}p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}}\sigma_2^2y^2d\langle B_2\rangle_u \\
& + \int_{m-1}^{t} \frac{1}{2}p(p-2)\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-4}{2}}x^2y^2\sigma_1\sigma_2d\langle B_2\rangle_u \\
& + \int_{m-1}^{t} \frac{1}{2}p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}}\sigma_1^2x^2d\langle B_1\rangle_u \\
& + \int_{m-1}^{t} \frac{1}{2}p(p-2)\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-4}{2}}x^2y^2\sigma_1\sigma_2d\langle B_1\rangle_u
\end{aligned}$$

由条件(c)，我们有

$$
\begin{aligned}
\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}} = (x_{m-1}^2+y_{m-1}^2+\delta)^{\frac{p}{2}} + \int_{m-1}^{t} pK\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}} du \\
&+ \int_{m-1}^{t} p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}} \sigma_1 x^2 dB_1(u) + \int_{m-1}^{t} p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}} \sigma_2 y^2 dB_2(u) \\
&+ c(\Sigma)\int_{m-1}^{t} pK\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}} + \frac{pK}{2}\left[c(d)+c(n,d)(p-2)\right]\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}} du \\
&\le (x_{m-1}^2+y_{m-1}^2+\delta)^{\frac{p}{2}} + c_1\int_{m-1}^{t} \left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}} du \\
&+ \int_{m-1}^{t} p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}} \sigma_1 x^2 dB_1(u) + \int_{m-1}^{t} p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}} \sigma_2 y^2 dB_2(u)
\end{aligned} \tag{10}
$$

其中$c_1 > 0$是取值依赖于n,d,p,K 和Σ的常数，n代表n维向量，d代表d维G-布朗运动。于是，由B-D-G不等式，可以得到

$$
\begin{aligned}
&\bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}\left|\int_{m-1}^{t} p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}} \sigma_1 x^2 dB_1(u)\right|\right] \\
&\le \beta_1\bar{\mathbb{E}}\left[\left(\int_{m-1}^{m} p^2\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{p-2} |x\cdot\sigma_1\cdot x|^2 du\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}\left|\int_{m-1}^{t} p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}} \sigma_2 y^2 dB_2(u)\right|\right] \\
&\le \beta_2\bar{\mathbb{E}}\left[\left(\int_{m-1}^{m} p^2\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{p-2} |y\cdot\sigma_2\cdot y|^2 du\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}
$$

其中$\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$. 因此，存在常数$C_\beta > 0$使得

$$
\begin{aligned}
&\bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}\left|\int_{m-1}^{t} p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}} \sigma_2 y^2 dB_2(u)\right|\right] \\
&+ \bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}\left|\int_{m-1}^{t} p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}} \sigma_1 x^2 dB_1(u)\right|\right] \\
&\le C_\beta\bar{\mathbb{E}}\left[\left(\int_{m-1}^{m} p^2\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{p-2} (\sigma_1^2 x^2+\sigma_2 y^2)^2 du\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\le C_\beta\bar{\mathbb{E}}\left[\left(\sup_{m-1\le t\le m}\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}} \int_{m-1}^{m} P^2K\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}} du\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}
$$

另一方面，通过$Young$不等式，我们总能找到取值依赖于c_1的常数c_1满足

$$\begin{aligned}&\bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}\left|\int_{m-1}^{t}p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}}\sigma_1x^2dB_1(u)\right|\right]\\&+\bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}\left|\int_{m-1}^{t}p\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}}\sigma_2y^2dB_2(u)\right|\right]\\&\le\frac{1}{2}\bar{\mathbb{E}}\sup_{m-1\le t\le m}\left(|(x,y)_t|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}}+c_2p^2K\bar{\mathbb{E}}\left[\int_{m-1}^{m}\left(|(x,y)_t|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}}dt\right]\end{aligned}\tag{11}$$

因为$(|(x,y)_t|^2+\delta)^{\frac{p}{2}}$取值为正，我们可以在概率测度$\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$下对$\bar{\mathbb{E}}^{\mathbb{P}}\left[\int_{m-1}^{m}(|(x,y)_t|^2+\delta)^{\frac{p}{2}}dt\right]$运用$Fubini$定理：

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{E}}\left[\int_{m-1}^{m}\left(|(x,y)_t|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}}dt\right]&\le\int_{m-1}^{m}\bar{\mathbb{E}}\left[\left(|(x,y)_t|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}}dt\right]\\&\le\max\{1,2^{\frac{p}{2}-1}\}\int_{m-1}^{m}\left(\bar{\mathbb{E}}|(x,y)_t|^p+\delta^{\frac{p}{2}}\right)dt\end{aligned}\tag{12}$$

由(10)-(12)的推导，我们可以进一步推出

$$\begin{aligned}&\bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}|(x,y)_t|^p\right]\le\bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}\left(|(x,y)_t|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}}\right]\\&\le\bar{\mathbb{E}}\left[\left(|(x,y)_{m-1}|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}}\right]+\bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}\left|c_1\int_{m-1}^{t}\left(|(x,y)_u|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}}du\right|\right]\\&+\frac{1}{2}\bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}\left(|(x,y)_t|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}}\right]+c_2p^2K\max\{1,2^{\frac{p}{2}-1}\}\int_{m-1}^{m}\left(\bar{\mathbb{E}}|(x,y)_t|^p+\delta^{\frac{p}{2}}\right)dt\\&\le\bar{\mathbb{E}}\left[\left(|(x,y)_{m-1}|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}}\right]+\max\{1,2^{\frac{p}{2}-1}\}\int_{m-1}^{m}\left(\bar{\mathbb{E}}|(x,y)_t|^p+\delta^{\frac{p}{2}}\right)dt\\&+\frac{1}{2}\bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}\left(|(x,y)_t|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}}\right]+c_2p^2K\max\{1,2^{\frac{p}{2}-1}\}\int_{m-1}^{m}\left(\bar{\mathbb{E}}|(x,y)_t|^p+\delta^{\frac{p}{2}}\right)dt\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}\left(|(x,y)_t|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}}\right]\\&\le\bar{\mathbb{E}}\left[\left(|(x,y)_{m-1}|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}}\right]+\max\{1,2^{\frac{p}{2}-1}\}\int_{m-1}^{m}\left(\bar{\mathbb{E}}|(x,y)_t|^p+\delta^{\frac{p}{2}}\right)dt\\&+c_2p^2K\max\{1,2^{\frac{p}{2}-1}\}\int_{m-1}^{m}\left(\bar{\mathbb{E}}|(x,y)_t|^p+\delta^{\frac{p}{2}}\right)dt\\&\le\max\{1,2^{\frac{p}{2}-1}\}\left(\bar{\mathbb{E}}|(x,y)_{m-1}|^p+\delta^{\frac{p}{2}}\right)+\max\{1,2^{\frac{p}{2}-1}\}\int_{m-1}^{m}\left(\bar{\mathbb{E}}|(x,y)_t|^p+\delta^{\frac{p}{2}}\right)dt\\&+c_2p^2K\max\{1,2^{\frac{p}{2}-1}\}\int_{m-1}^{m}\left(\bar{\mathbb{E}}|(x,y)_t|^p+\delta^{\frac{p}{2}}\right)dt\end{aligned}$$

从而有

$$\bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}\left(|(x,y)_t|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}}\right]\le 2\max\{1,2^{\frac{p}{2}-1}\}\bar{\mathbb{E}}|(x,y)_{m-1}|^p+c_3\int_{m-1}^{m}\bar{\mathbb{E}}|(x,y)_t|^p dt+c_3'\delta^{\frac{p}{2}}$$

其中$c_3>0$和$c_3'>0$是取值依赖于c_1,c_2和p的常数。令$\delta\to 0$, 由指数p阶稳定的假设，可以得到

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}|(x,y)_t|^p\right]&\le \bar{\mathbb{E}}\left[\sup_{m-1\le t\le m}\left(|(x,y)_t|^2+\delta\right)^{\frac{p}{2}}\right]\\&\le 2\max\{1,2^{\frac{p}{2}-1}\}C|(x,y)_t|^p e^{-\lambda(m-1)}+c_3\int_{m-1}^{m}C|(x,y)_t|^p e^{-\lambda t}dt\\&\le c_4 e^{-\lambda(m-1)}\end{aligned}$$

其中c_4大小取决于c_3,c_3',C和初值(x_0,y_0). 接下来便可运用*Markov*不等式，对任意$\epsilon\in(0,\lambda)$，有

$$\bar{C}\left\{\sup_{m+1\le t\le m}\left|(x,y)_t^{(x_0,y_0)}\right|^p>e^{-(\lambda-\varepsilon)(m-1)}\right\}\leqslant\frac{c_4e^{-\lambda(m-1)}}{e^{-(\lambda-\varepsilon)(m-1)}}=c_4e^{-\varepsilon(m-1)}$$

因此，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\bar{C}\left\{\sup_{m-1\le t\le m}|(x,y)_t|^p>e^{-(\lambda-\epsilon)(m-1)}\right\}<\infty$$

由*Borel-Cantelli*引理，我们知道对ω,*q.s.*, 存在$N_0:=N_0(\omega)$ 使得对$m\ge N_0(\omega)$和$t\in[m-1,m]$, 当$\varepsilon\to 0, m\to\infty$,

$$\frac{1}{t}\log\left(|(x,y)_t|\right)=\frac{1}{pt}\log\left(|(x,y)_t|^p\right)<-\frac{(\lambda-\epsilon)(m-1)}{pm}$$

由此可得出定理的结果。

6. 总结

随着G-布朗运动在生物模型上有着越来越重要的研究，我们将其作为经典食饵模型的随机扰动项。得益于G-布朗运动的方差不确定性和空间不确定性，我们发现其能更好地刻画环境噪声。于是接下来的首要问题就是判断该系统在$\mathbb{R}$ 上是否存在唯一解。获得解以后，我们进一步研究次线性空间下模型有界性和稳定性。本文介绍了GSDEs, 相关的Itô 公式以及Itô 积分。可以发现，这些与传统布朗运动具有相似之处。事实上，布朗运动的大多数性质也适用于G-布朗运动。但是，G-布朗运动二次变差项的处理是研究的一个难点，G-布朗运动的容度也不同于传统概率的计算。文章通过微分算子的运用和相应的假设，得以计算相应的微分方程，最终得到结论。

参考文献

[1] Freedman, H.I. (1980) Deterministic Mathematical Models in Population Ecology. Marcel Dekker, New York.

[2] Vance, R.R. and Coddington, E.A. (1989) A Nonautonomous Model of Population Growth. *Journal of Mathematical Biology*, **27**, 491-506. https://doi.org/10.1007/BF00288430

[3] Teng, Z.D. and Yu, Y.H. (1999) The Extinction in Nonautonomous Prey-Predator Lotka-Volterra Systems. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **15**, 401-408. https://doi.org/10.1007/BF02684041

[4] Xu, R. and Chen, L.S. (2000) Persistence and Stability for a Two-Species Ratio-Dependent Predator-Prey System with Time Delay in a Two-Patch Environment. *Computers and Mathematics with Applications*, **40**, 577-588. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(00)00181-4

[5] Wang, K. (2011) Permanence and Global Asymptotical Stability of a Predator-Prey Model with Mutual Interference. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12**, 1062-1071. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.08.028

[6] Gard, T.C. (1988) Introduction to Stochastic Differential Equations. In: *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 114, Marcel Dekker, Inc., New York, xiv+234 p.

[7] Rudnicki, R. (2003) Long-Time Behavior of a Stochastic Prey-Predator Model. *Stochastic Processes and Their Applications*, **108**, 93-107. https://doi.org/10.1016/S0304-4149(03)00090-5

[8] Cheng, S.-R. (2009) Stochastic Population Systems. *Stochastic Analysis and Applications*, **27**, 854-874. https://doi.org/10.1080/07362990902844348

[9] Liu, M. and Wang, K. (2012) Persistence, Extinction and Global Asymptotical Stability of a Non-Autonomous Predator-Prey Model with Random Perturbation. *Applied Mathematical Modelling*, **36**, 5344-5353. https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.12.057

[10] Peng, S.G. (2010) Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus under Uncertainty. arXiv:1002.4546v1

[11] Peng, S.G. (2007) G-Expectation, G-Brownian Motion and Related Stochastic Calculus of Itô Type. In: Benth, F.E., Di Nunno, G., Lindstrøm, T., Øksendal, B. and Zhang, T., Eds., *Stochastic Analysis and Applications*, Vol. 2, Springer, Berlin, Heidelberg, 541-567. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70847-6_25

[12] Ren, Y., Jia, X.J. and Hu, L.Y. (2015) Exponential Stability of Solutions to Impulsive Stochastic Differential Equations Driven by G-Brownian Motion. *Discrete Continuous Dynamical Systems B*, **20**, 2157-2169. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.2157

[13] Hu, L.Y., Ren, Y. and Xu, T.B. (2014) p-Moment Stability of Solutions to Stochastic Differential Equations Driven by G-Brownian Motion. *Applied Mathematics and Computation*, **230**, 231-237. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.12.111

[14] Ren, Y. and Yin, W.S. (2019) Asymptotical Boundedness for Stochastic Coupled Systems on Networks with Time-Varying Delay Driven by G-Brownian Motion. *International Journal of Control*, **92**, 2235-2242. https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1435907

[15] Denis, L., Hu, M. and Peng, S. (2011) Function Spaces and Capacity Related to a Sublinear Expectation: Application to G-Brownian Motion Paths. *Potential Analysis*, **34**, 139-161. https://doi.org/10.1007/s11118-010-9185-x

[16] Gao, F. (2009) Pathwise Properties and Homeomorphic Flows for Stochastic Differential Equations Driven by G-Brownian Motion. *Stochastic Processes and Their Applications*, **119**, 3356-3382. https://doi.org/10.1016/j.spa.2009.05.010

[17] Li, X. and Peng, S. (2011) Stopping Times and Related Itô's Calculus with G-Brownian Motion. *Stochastic Processes and Their Applications*, **121**, 1492-1508. https://doi.org/10.1016/j.spa.2011.03.009

[18] Li, X., Lin, X. and Lin, Y. (2016) Lyapunov-Type Conditions and Stochastic Differential Equations Driven by G-Brownian Motion. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **439**, 235-255. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.02.042