Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(11), 2090-2099**
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.911242

二阶记忆依赖型微分方程解的存在唯一性及其解法

刘 霞，王金良

青岛理工大学理学院, 山东 青岛
Email: 1729484551@qq.com, wangjinliang0811@126.com

收稿日期：2020年11月2日；录用日期：2020年11月20日；发布日期：2020年11月27日

摘 要

记忆依赖型导数与分数阶导数相比，其核函数可以根据实际情况进行选择，具有更强的灵活性。为了进一步应用到实际定义了记忆依赖型微分方程，本文主要讨论二阶记忆依赖型微分方程解的存在性与唯一性。先对积分号进行处理，然后将变量的区间进行分割，利用构造皮卡迭代序列论证向量级数一致收敛，则当其时滞足够小，且核函数二阶可导时方程组的解存在且唯一。接下来证明了当核函数取特殊情况时，初值问题存在显示解。最后，根据图象观察当时滞取不同的值时，初值问题解的变化情况。

关键词

记忆依赖型导数，分数阶导数，存在性，唯一性，皮卡迭代

Existence and Uniqueness of Solutions for Second Order Memory Dependent Differential Equations and Their Solutions

Xia Liu, Jinliang Wang

College of Science, Qingdao University of Technology, Qingdao Shangdong

文章引用: 刘霞, 王金良. 二阶记忆依赖型微分方程解的存在唯一性及其解法[J]. 应用数学进展, 2020, 9(11): 2090-2099. DOI: 10.12677/aam.2020.911242

Email: 1729484551@qq.com, wangjinliang0811@126.com

Received: Nov. 2^{nd}, 2020; accepted: Nov. 20^{th}, 2020; published: Nov. 27^{th}, 2020

Abstract

Compared with the fractional derivative, the kernel function of memory dependent derivative can be selected according to the actual situation, and it has more flexibility. The existence and uniqueness of solutions for second order memory dependent differential equations are discussed in this paper. The integral number is processed first, then the interval of the variable is segmented, and the vector series is uniformly converged by constructing pickup iterative sequence, which proves that when the delay is small enough, the solution of the equations of the second order differentiable kernel function exists and is unique. Then it is proved that the initial value problem has a display solution when the kernel function takes a special case. Finally, the change of the solution of the initial value problem is observed according to the image.

Keywords

Memory Dependent Derivative, The Fractional Derivative, Existence, Uniqueness, The Picard Ieration

1. 引言

分数阶导数是数学领域的一个重要分支，分数阶微分算子主要有三种形式：Grunwald-Letnikov定义，Rieman-Liouvile定义和Caupto定义。但分数阶导数在应用方面存在不足之处，Wang & Li [1] 参照Cupto型分数阶导数提出了新的导数——记忆依赖型导数。

定义 1： 设m是一个正数，对m-次可微函数$f(t)$。

$$D_\tau^m f(t) = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} K(t-s) f^m(s) ds. \tag{1}$$

被称为m阶记忆依赖型导数，$\tau(\tau > 0)$是时滞，它代表记忆依赖时段的长短，权重$K(t-s)$是一

个m阶连续函数。

与Caputo 型分数阶导数相比，其核函数可以根据实际情况选择。例如：$[(s-t)/\tau+1], [(s-t)/\tau+1]^2, [(s-t)/\tau+1]^{\frac{1}{4}}, \sin[(\tau+s-t)\pi/2\pi], (t-s+\tau)(s-t+\tau)/\tau^2$。核函数被理解为对过去的依赖程度。所以$[(s-t)/\tau+1], [(s-t)/\tau+1]^2, [(s-t)/\tau+1]^{\frac{1}{4}}$的形式更加实用，它们都是单调函数且在$s=t-\tau$ 处$K\equiv 0$ 而在$s=t$处$K\equiv 1$。除此之外，记忆依赖的区间不再依赖于一个定点而是一个滑动的区间，不会随着时间的增大而增大。

为了让记忆依赖型导数与普通导数的数值保持基本一致Sun & Wang [2]定义了新的记忆依赖性导数。

定义 2：设m是一个正数，对m-次可微函数$f(t)$。

$$D_\tau^m f(t)=\frac{1}{R}\int_{t-\tau}^{t}K(t-s)f^m(s)ds. \tag{2}$$

被称为m阶记忆依赖型导数，$\tau(\tau>0)$是时滞，它代表记忆依赖时段的长短，权重函数$K(t-s)$是一个m 阶连续函数。这里的

$$R=\int_{t-\tau}^{t}K(t-s)ds.$$

令$t-s=r$, 则有

$$R=\int_{0}^{\tau}K(r)dr.$$

Sun & Wang [3]讨论了记忆依赖型偏微分方程数值解的问题，将记忆依赖型导数引入传统的热传导方程，以及弦振动方程。讨论了扩散系数时滞对其数值解的影响。Wang & Li在 [4] [5]中将记忆依赖型导数引入Logistic模型，热传导方程，对其重新建模并求解。Liu & Wang [6]讨论了一阶记忆依赖型微分方程组解的存在性唯一性，找到了当核函数取特定形式时，一阶线性记忆赖型微分方程组的准确解。并将其与常微分方程组的解进行比较。当记忆依赖型导数一提出就引发了国内外学者的广泛关注，Kant，Shaw 等人在 [7] [8] [9] [10]中将其运用在广义的热粘弹性方面。

Wang & Li [11]证明了一阶非线性和二阶线性记忆依赖型微分方程解的存在唯一性，那么二阶非线性记忆依赖型微分方程的解是否存在且唯一呢？若其解存在且唯一又能否找到其准确解？

2. 存在唯一性

本文的主要目的是证明如下的二阶记忆依赖型微分方程解的存在性与唯一性：

$$\begin{cases} D_\tau^2 u(t)+aD_\tau u(t)=F(t,u(t)), 0<t\le\tau, \\ u(t)=u^*(t), -\tau\le t\le 0, \end{cases} \tag{3}$$

这里的$u^*(t)$在区间$[-\tau,0]$上是已知的连续函数。当$t-s\in[0,\tau]$时，核函数$K(t-s)$二阶可导。$F(t,u(t))$ 满足Lipschitz 条件，即存在常数$L>0$，使得

$$|F(t,u_2(t))-F(t,u_1(t))|\le L|u_2(t)-u_1(t)|.$$

由于记忆依赖型导数中包含了普通导数的积分形式，很难处理，因此我们根据定义(1)将它进行转化：

$$
\begin{aligned}
D_\tau^2 u(t)+aD_\tau u(t) &= \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} K(t-s)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}ds+\frac{a}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} K(t-s)\frac{\partial u}{\partial s}ds \\
&= \frac{u'(t)}{\tau}+\frac{au(t)}{\tau}-\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\partial_s K\frac{\partial u}{\partial s}ds-\frac{a}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\partial_s K\cdot u(s)ds \\
&= \frac{1}{\tau}u'(t)+\frac{a-\partial_s K(0)}{\tau}u(t)+\frac{\partial_s K(\tau)}{\tau}\cdot u^*(t-\tau) \\
&+\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}(\partial_s^2 K-a\partial_s K)\cdot u(s)ds,
\end{aligned}
$$

这里的

$$
\partial_s^2 K=\frac{\partial^2 K}{\partial s^2},\partial_s K=\frac{\partial K}{\partial s}.
$$

将其带入初值问题可以得到：

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= (\partial_s K(0)-a)u(t)-\partial_s K(\tau)u^*(t-\tau) \\
&+\int_{t-\tau}^{t}\eta\cdot u(s)ds+\tau F(t,u(t)).
\end{aligned} \tag{4}
$$

这里的$\eta=a\partial_s K-\partial_s^2 K$。

将等式(4)两边同时积分：

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^t[(\partial_s K(0)-a)u(\xi)+\tau F(\xi,u(\xi))-\partial_s K(\tau)u^*(\xi-\tau)]d\xi \\
&+\int_0^t\int_{\xi-\tau}^{\xi}\eta\cdot u(s)dsd\xi.
\end{aligned} \tag{5}
$$

注意到当$\xi\in(0,\tau]$时有$\xi-\tau\in(-\tau,0]$。故而(5)可以写为

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^t[(\partial_s K(0)-a)u(\xi)+\tau F(\xi,u(\xi))-\partial_s K(\tau)u^*(\xi-\tau)]d\xi \\
&+\int_0^t\int_0^{\xi}\eta\cdot u(s)dsd\xi+\int_0^t\int_{\xi-\tau}^{0}\eta\cdot u^*(s)dsd\xi.
\end{aligned} \tag{6}
$$

则满足积分方程(6)的函数就是初值问题(3)的解。

这里的核函数$K(t-s)=[(s-t)/\tau+1]^n(n=1$或$n\geq 2)$，则有

$$
a\partial_s K-\partial_s^2 K=\left(\frac{an}{\tau}x^{n-1}-\frac{n(n-1)}{\tau^2}x^{n-2}\right).
$$

这里的$x=(s-t)/\tau+1$，则有$x\in[0,1]$。若$\tau<(n-2)/a$，则当$x\in[0,1]$,

$$
\frac{an}{\tau}x^{n-1}-\frac{n(n-1)}{\tau^2}x^{n-2}<0.
$$

其存在最大值

$$M = \frac{n(n-1)}{\tau^2} - \frac{an}{\tau},,$$

定理 1：如果$F(t,u(t))$ 关于$u(t)$满足Lipschiz条件，核函数$K(t-s)$在区间$[0,\tau]$上是二阶可导，且$K(\tau)=0$, $K(0)=1$。当$A>a(n-2)$时，$\big(-a(n-2)+A\big)/4L<\tau<(n-2)/a$；当$A\le a(n-2)$时，$0<\tau<(n-2)/a$。则初值问题(3) 存在唯一的解，定义于区间$0<t\le\tau$ 上。这里的

$$A=\sqrt{a^2(n-2)^2+8Ln(n-3)}.$$

证明：首先论证方程解的存在性。

利用(6)构造皮卡迭代如下：

$$\begin{aligned}
&u_0(t)=u^*(0), t\in(0,\tau]\\
&u_n(t)=\int_0^t\big[(\partial_sK(0)-a)u_{n-1}(\xi)+\tau F(\xi,u_{n-1}(\xi))-\partial_sK(\tau)u^*(\xi-\tau))\big]d\xi\\
&\qquad+\int_0^t\int_0^\xi \eta\cdot u_{n-1}(s)dsd\xi+\int_0^t\int_{\xi-\tau}^0\eta\cdot u^*(s)dsd\xi
\end{aligned}$$

要证明解的存在性，主要步骤是证明函数序列$u_n(t)_0^\infty$在区间$[0,\tau]$上一致收敛。这等价于证明下列无穷级数一致收敛：

$$u_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}[u_k(t)-u_{k-1}(t)], 0\le t\le\tau \tag{7}$$

由于$u_1(t)$是由$u_0(t)$定义的，故而存在常数$N>0$，使得$|u_1(t)-u_0(t)|\le N.$

根据Lipschiz条件：

$$\begin{aligned}
&|u_2(t)-u_1(t)|\\
&\le\int_0^t\big[(|\partial_sK(0)-a|\cdot|u_1(\xi)-u_0(\xi)|)+\tau|F(t,u_2(t))-F(t,u_2(t))|\big]d\xi\\
&+M\int_0^t\int_0^\xi|u_1(s)-u_0(s)|dsd\xi\\
&\le\int_0^t M_1\cdot|u_1(\xi)-u_0(\xi)|d\xi+M\int_0^t\int_0^\xi|u_1(s)-u_0(s)|dsd\xi\\
&\le M_1Nt+MN\frac{t^2}{2!}.
\end{aligned}$$

这里的$M_1=|a-\partial_sK(0)|+\tau L.$

注意到$t\in[0,\tau]$，当τ满足定理中的条件时：$|u_2(t)-u_1(t)|\le 2M_1Nt.$ 假设当$n=k$时，

$$|u_k(t)-u_{k-1}(t)|\le kM_1^{k-1}N\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{8}$$

现在证明当$n = k + 1$时仍然成立。此时，

$$\begin{aligned}
&|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \\
&\leq \int_0^t M_1 |u_k(\xi) - u_{k-1}(\xi)| d\xi + M \int_0^t \int_0^\xi |u_k(s) - u_{k-1}(s)| ds d\xi \\
&\leq M_1 k M_1^{k-1} N \frac{t^k}{(k)!} + kMN \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \\
&\leq (k+1) M_1^k N \frac{t^k}{(k)!}.
\end{aligned}$$

则由数学归纳法在$0 \leq t \leq \tau$上，对任意正整数n都有

$$|u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq n M_1^{n-1} N \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \leq n M_1^{n-1} N \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{9}$$

则有

$$u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [u_k(t) - u_{k-1}(t)] \leq u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} n M_1^{n-1} N \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{10}$$

注意到正项级数一致收敛，根据Weierstrass定理可以知道函数项级数也一致收敛。故而其极限存在，注意到在积分方程(6)中$F(t, u(t))$满足Lipschiz条件，在一致收敛的条件下，极限运算可以和积分运算交换。因此易证其极限就是它的解。

现设：

$$\lim_{n \to \infty} u_n(t) = u(t).$$

接下来证明唯一性。

设$w(t)$也是积分方程(6)定义于$(0, \tau]$上的连续解。

$$\begin{aligned}
w(t) = &\int_0^t \left[(\partial_s k(0) - a) w(\xi) + \tau f(\xi, w(\xi)) - \partial_s K(\tau) u^*(\xi - \tau) \right] d\xi \\
&+ \int_0^t \int_0^\xi \eta w(s) ds d\xi + \int_0^t \int_{\xi - \tau}^0 \eta u^*(s) ds d\xi.
\end{aligned}$$

这里肯定存在一个常数$\widetilde{N}$，使得$|u_0(t) - w(t)| \leq \widetilde{N}$”。

根据上述数学归纳法可知，对任意正整数k有

$$|u_k(t) - w(t)| \leq (k+1) M_1^k \widetilde{N} \frac{\tau^k}{k!} \tag{11}$$

注意到当$k \to \infty$时

$$(k+1) M_1^k \widetilde{N} \frac{\tau^k}{k!} \to 0.$$

根据极限的唯一性可知，对任意$t \in (0, \tau]$都有$u(t) = w(t)$ 证毕。

3. 二阶线性非齐次记忆依赖性微分方程的解法

前面论证了当时滞足够小时，二阶记忆依赖型微分方程的解存在且唯一，现在考虑能否找到其准确解？考虑如下方程组：

$$\begin{cases} D_\tau^2 u(t) + aD_\tau u(t) = f(t), t \in (0, \tau], \\ u(t) = u^*(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{12}$$

已知$D_\tau^2 u(t) = DD_\tau u(t)$，令函数$v(t) = D_\tau u(t)$，则上述初值问题变为

$$\begin{cases} v'(t) + av(t) = f(t), t \in (0, \tau], \\ v(0) = D_\tau u^*(0), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{13}$$

求解上述初值问题，得到

$$v(t) = e^{-at} \left(\int_0^t f(s)e^{as} ds + D_\tau u^*(0) \right).$$

则只需求解如下问题就可以得到初值问题的解：

$$\begin{cases} D_\tau u(t) = v(t), 0 < t \le \tau, \\ u(t) = D_\tau u^*(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{14}$$

根据定义(1)可知：

$$\begin{aligned} D_\tau u(t) &= \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t K(t-s)u'(s)ds \\ &= \frac{u(t)}{\tau} - \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \partial_s K \cdot u(s)ds. \end{aligned} \tag{15}$$

将(15)代入(14)

$$u(t) - \int_{t-\tau}^t \partial_s K \cdot u(s)ds = \tau v(t).$$

当核函数$K(t-s) = [(s-t)/\tau + 1]$时，

$$u(t) - \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t u(s)ds = \tau v(t). \tag{16}$$

将(16)两边同时对t求导：

$$u'(t) = \frac{1}{\tau} u(t) - \frac{1}{\tau} u^*(t-\tau) + \tau v'(t),$$

因此求解上述常微分方程就可以得到，当核函数取线性函数时，上述二阶记忆依赖微分方程在区

间$(0,\tau]$的准确解：

$$u(t)=e^{t/\tau}\left(\int_0^t(\tau v'(s)-\frac{1}{\tau}u^*(s-\tau))e^{-s/\tau}ds+u^*(0)\right).$$

当核函数$K(t-s)=[(s-t)/\tau+1]^n(n\geq 2)$时，可以类似求解。

接下来考虑如下二阶非齐次线性方程组的初值问题：

$$\begin{cases}D_\tau^2u(t)+2D_\tau u(t)+u(t)=0,0<t\leq\tau,\\ u(t)=t,-\tau\leq t\leq 0\end{cases}\tag{17}$$

根据定义(1)对方程化解：

$$\begin{aligned}&D_\tau^2u(t)+2D_\tau u(t)+u(t)\\ =&\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^t K(t-s)\frac{\partial^2u}{\partial s^2}ds+\frac{2}{\tau}\int_{t-\tau}^t K(t-s)\frac{\partial u}{\partial s}ds+u(t)\\ =&\frac{u^{'}(t)}{\tau}+\frac{(2-\partial_sK(0)+\tau)u(t)}{\tau}+\frac{\partial_sK(\tau)\cdot u(t-\tau)}{\tau}\\ +&\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{\tau}(\partial_s^2K-2\partial_sK)\cdot u(s)ds.\end{aligned}$$

当核函数$K(t-s)=[(s-t)/\tau+1]$时，等式变为

$$\tau u^{'}(t)+(2\tau+\tau^2-1)u(t)+u(t-\tau)-2\int_{t-\tau}^t u(s)ds=0.\tag{18}$$

将等式(18)两边同时对t求导得：

$$\tau u^{''}(t)+(2\tau+\tau^2-1)u'(t)+[u(t-\tau)]'-2u(t)+2u(t-\tau)=0.\tag{19}$$

求解上述常微分方程，就可以得到当核函数$K(t-s)=[(t-s)/\tau+1]$时，初值问题(19)的解：$u(t)=c_1e^{d_1t}+c_2e^{d_2t}+t+\tau^2/2$.

这里的

$$\begin{aligned}d_1&=\left((1-2\tau-\tau^2)+\sqrt{(1-2\tau-\tau^2)^2+8\tau}\right)/2\tau.\\ d_2&=\left((1-2\tau-\tau^2)-\sqrt{(1-2\tau-\tau^2)^2+8\tau}\right)/2\tau.\\ c_1&=\left[(\tau^2/2)(1-e^{-d_1\tau})\right]/\left(e^{-d_1\tau}-e^{-d_2\tau}\right).\\ c_2&=\left[(\tau^2/2)(e^{-d_2\tau}-1)\right]/\left(e^{-d_1\tau}-e^{-d_2\tau}\right).\end{aligned}$$

当核函数$K(t-s)=[(s-t)/\tau+1]^n(n\geq 2)$时，可利用同样的方法将初值问题转化成$u(t)$的$n$ 阶常微分方程，求解该常微分方程就可以得到当核函数$K(t-s)=((s-t)/\tau+1)^n(n\geq 2)$时，初值问题(17)的解。

考虑如下的常微分方程：

$$\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) + u(t) = 0, 0 < t \le \tau \\ u(0) = 0, u'(0) = 1. \end{cases}$$

求解该常微分方程有：$u(t) = te^{-t}$。

将二阶记忆依赖型微分方程的解与常微分方程的解进行比较，并考虑时滞对其解的影响，如下图所示：

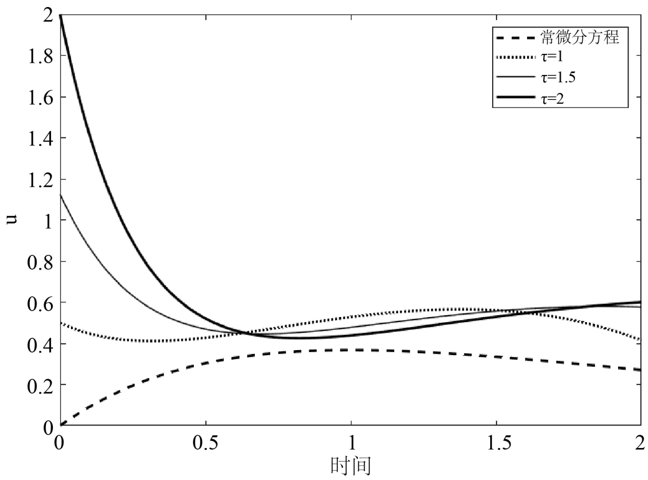

Figure 1. when $\tau = 1, 1.5, 2$, image of the solution of the second order memory dependent differential equation and the solution of the ordinary differential equation

图 1. 当时滞$\tau = 1, 1.5, 2$时，二阶记忆依赖微分方程解和常微分方程解的图像

根据图 1，可以看出时滞在前期对记忆依赖型微分方程解的影响较大，但随着时间的增加这种影响在减弱。而对常微分方程的解没有影响。当$t \in [0, 0.6)$ ，时滞越小记忆依赖型微分方程的解与常微分方程的解之间差距较小，当$t \in [0.6, 1.6)$，刚好相反。

4. 结论

本文先对积分号进行处理，然后将变量的区间进行分割，利用构造皮卡迭代序列论证向量级数一致收敛，从而证明了当其时滞足够小，核函数二阶可导时二阶记忆依赖型微分方程的解存在且唯一。除此之外找到了核函数取固定形式时二阶记忆依赖型微分方程在区间上的准确解。最后，观察时滞取不同值时记忆依赖型微分方程的解和常微分方程的解的图象，发现时滞对记忆依赖型微分方程解的影响会随时间的变化而变化，对常微分方程的解无影响。

参考文献

[1] Wang, J.L. and Li, H.F. (2011) Surpassing the Fractional Derivative: Concept of the Memory-Dependent Derivative. *Computers and Mathematics with Applications*, **62**, 1562-1567.

https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.04.028

[2] Sun, W.W. and Wang, J.L. (2017) On Numerical Solution of the Memory Dependent Partial Differential Equations. *Advances in Applied Mathematics*, **6**, 637-643. https://doi.org/10.12677/AAM.2017.64074

[3] Sun, W.W. and Wang, J.L. (2018) Reconstruct the Heat Conduction Model with Memory Dependent Derivative. *Applied Mathematics*, **9**, 1072-1080. https://doi.org/10.4236/am.2018.99072

[4] Wang, J.L. and Li, H.F. (2021) Memory-Dependent Derivative versus Fractional Derivative (I): Difference in Temporal Modelling. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **384**, Article ID: 112923. https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.112923

[5] Wang, J.L. and Li, H.F. (2021) Memory-Dependent Derivative versus Fractional Derivative (II): Remodelling Diffusion Process. *Applied Mathematics and Computation*, **391**, Article ID: 125627. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125627

[6] Liu, X. and Wang, J.L. (2020) The Existence and Uniqueness of Solution for Memory-Dependent Differential Equations. *Advances in Applied Mathematics*, **9**, 187-194. https://doi.org/10.12677/AAM.2020.92022

[7] Nantu, S. and Sudip, M. (2019) Transient Responses in a Two-Temperature Thermoelastic Infinite Medium Having Cylindrical Cavity Due to Moving Heat Source with Memory-Dependent Derivative. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **99**, e201800343. https://doi.org/10.1002/zamm.201800343

[8] Kant, S. and Mukhopadhyay, S. (2019) An Investigation on Responses of Thermoelastic Interactions in a Generalized Thermoelasticity with Memory-Dependent Derivatives inside a Thick Plate. *Mathematics and Mechanics of Solids*, **24**, 2392-2409. https://doi.org/10.1177/1081286518755562

[9] Tiwari, R. and Mukhopadhyay, S. (2018) Analysis of Wave Propagation in the Presence of a Continuous Line Heat Source under Heat Transfer with Memory Dependent Derivatives. *Mathematics and Mechanics of Solids*, **23**, 820-834. https://doi.org/10.1177/1081286517692020

[10] Shaw, S. (2019) Theory of Generalized Thermoelasticity with Memory-Dependent Derivatives. *Journal of Engineering Mechanics*, **145**. https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001569

[11] Li, H.F. and Wang, J.L. (2012) Molding the Dynamic System with Memory-Dependent Derivative. *Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, Taiyuan, 23-25 May 2012, 23-25.