**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, **2020, 9(11), 1901-1907**
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.911219

# 矩阵在高中数学中的作用

**柏志林**

南京师范大学教师教育学院，江苏 南京
Email: 1132032581@qq.com

收稿日期：2020年10月21日；录用日期：2020年11月9日；发布日期：2020年11月16日

## 摘 要

**基于高中数学对矩阵的要求，从知识层面与思想层面对矩阵进行挖掘，使矩阵更好地融入高中数学。**

## 关键词

**高中数学，矩阵，知识层面，思想层面**

# The Role of Matrix in the High School Mathematics

**Zhilin Bai**

Teacher Education College, Nanjing Normal University, Nanjing Jiangsu
Email: 1132032581@qq.com

Received: Oct. 21st, 2020; accepted: Nov. 9th, 2020; published: Nov. 16th, 2020

## Abstract

**Based on the demand of high school on math matrix, digging matrix from the knowledge level and ideological level makes matric better in high school mathematics.**

## Keywords

**High School Mathematics, Matrix, Knowledge Level, Ideological Level**



文章引用：柏志林．矩阵在高中数学中的作用[J]．应用数学进展, 2020, 9(11): 1901-1907.
DOI: 10.12677/aam.2020.911219

## 1. 引言

由于江苏高考试卷题型的相对固定，特别是附加题第一题，对于矩阵板块的考察相对集中在二阶矩阵的特征值、特征向量、逆矩阵、矩阵运算以及坐标变换几块内容。

例 1、(2015 年江苏高考)已知 $x, y \in R$，向量 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ 的属于特征值−2 的一个特征向量，求矩阵 $A$ 以及它的一个特征向量。

例 2、(2016 年江苏高考)已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$，矩阵 $B$ 的逆矩阵 $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，求矩阵 $AB$。

例 3、(2017 年江苏高考)已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$。

(1) 求 $AB$；

(2) 若曲线 $C_1 : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 在矩阵 $AB$ 对应的变换作用下得到另一曲线 $C_2$，求 $C_2$ 的方程。

例 4、(2018 年江苏高考)已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$。

(1) 求 $A$ 的逆矩阵 $A^{-1}$；

(2) 若点 $P$ 在矩阵 $A$ 对应的变换作用下得到点 $P'(3,1)$，求点 $P$ 的坐标。

例 5、(2019 年江苏高考)已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$。

(1) 求 $A^2$。

(2) 求矩阵 $A$ 的特征值。

从最近五年就可以看出高考对矩阵的考察都集中在二阶矩阵的层面上，而矩阵模块属于选修课程，要求相对简单。《普通高中数学课程标准》[1]根据学生自身志趣将其分为 A、B、C、D、E 五类，分别是有志于学习数理类、有志于学习经济或社会类、有志于学习人文类、有志于学习体育艺术类以及特色课程与大学先修课程，其中 A、B 类涉及矩阵，都要求掌握三阶行列式的概念、基本运算、性质以及行列式的定义域计算。而如今苏教版的选修课本集中在二阶矩阵且疏于利用矩阵这一工具，以下便来探究矩阵在高中数学中的用武之地。

## 2. 矩阵在知识层面的指导

### 2.1. 克拉默法则[2]

对于有唯一解的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

DOI: 10.12677/aam.2020.911219

方程组根据矩阵的定义可以写成

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

当$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$时，解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

由此，对于三元线性方程组有相仿的结论

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

当$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$时

解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \\ x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \\ x_3=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

这个方法就叫做克拉默法则，只不过这里是简单的特例，而课本只给出了二阶行列式的计算，下面我们来探究三阶行列式的计算方法。

(1) 三阶行列式的计算[2]

定义 1 由$1,2,3,\cdots,n$组成的一个有序数组称为一个$n$级排列，例如 213 是一个三级排列。

定义 2 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数，例如 213 中 21 为逆序，逆序数为 1。排列$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数记作$\tau\left(j_1j_2\cdots j_n\right)$。

定义 3 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列则称为奇排列。

定义 4 $n$级行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$等于所有取自不同行、不同列的$n$个元素的乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的代数和，可写成$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,这里的$j_1j_2\cdots j_n$是$1,2,3,\cdots,n$的一个排列，其中$\tau\left(j_1j_2\cdots j_n\right)$称为逆序数。

对于三阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，由定义 4 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}$$

经过整理得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

在掌握了三阶行列式的求法之后，对于有计算量的三元一次方程组的解决有了很好的指导。

### 2.2. 平面向量基本定理[3]

如果$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$是同一平面内两个不共线的向量，那么对于这一平面内的任一向量$\boldsymbol{a}$，有且仅有一对实数$\lambda_1$，$\lambda_2$，使$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$

反之，如果存在一对实数$\lambda_1$，$\lambda_2$，使$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$，若$\lambda_1\lambda_2\neq0$时，因为$\lambda_1\boldsymbol{e}_1\parallel\boldsymbol{e}_1$，$\lambda_2\boldsymbol{e}_2\parallel\boldsymbol{e}_2$，由平行四边形法则知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$共面。

定义 5 [4]对于$n(n\geq1)$个向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,如果存在不全为 0 的$n$个数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=0,$$

那么$n$个向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$叫做线性相关，不是线性相关的向量叫做线性无关。

定理 1 三向量共面的充要条件是他们线性相关。

证明：必要性

已知三向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$共面，由平面向量基本定理得有且仅有一对实数$\lambda_1$，$\lambda_2$，使$\boldsymbol{a}_3=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2$，则$\boldsymbol{a}_3-\lambda_1\boldsymbol{a}_1-\lambda_2\boldsymbol{a}_2=0$，因为$1\neq0$，则$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$线性相关。

充分性

已知三向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$线性相关，则存在不全为0的实数$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=0$$

不妨设$\lambda_1\neq 0$，则

$$\boldsymbol{a}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_2-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_3$$

由平面向量基本定理得三向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$共面。

定理2 设三个非零向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$坐标分别为$(x_1,y_1,z_1)$，$(x_2,y_2,z_2)$，$(x_3,y_3,z_3)$，则三个向量共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

证明：因为三个向量$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{a}$共面，则必有一个向量可以表示成另外两个向量的线性组合，则三个非零向量线性相关，存在不全为0的实数$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=0$$

则

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3=0 \\ \lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2+\lambda_3 y_3=0 \\ \lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_3 z_3=0 \end{cases}$$

把它看作$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$的三元线性方程组，因为三个实数均0为方程组的一个解，由克拉默法则在三元线性方程组中的运用知

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

## 2.3. 命题的应用

例1 求

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1-x_2+x_3=4 \\ 2x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$$

的解。

解：令

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=4\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-4\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-14$$

$$D_2=\begin{vmatrix}4&5&1\\2&4&1\\2&0&1\end{vmatrix}=4\times\begin{vmatrix}4&1\\0&1\end{vmatrix}-5\times\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}2&4\\2&0\end{vmatrix}=8$$

$$D_3=\begin{vmatrix}4&2&5\\2&-1&4\\2&1&0\end{vmatrix}=4\times\begin{vmatrix}-1&4\\1&0\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}2&4\\2&0\end{vmatrix}+5\times\begin{vmatrix}2&-1\\2&1\end{vmatrix}=20$$

则

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{7}{2}\\x_2=\dfrac{D_2}{D}=-2\\x_3=\dfrac{D_3}{D}=-5\end{cases}$$

例 2 如果向量 $\boldsymbol{a}=(1,\lambda,2),\boldsymbol{b}=(2,-1,2),\boldsymbol{c}=(1,4,4)$ 共面，求 $\lambda$ 的值。

解：因为三个向量共面，则

$$\begin{vmatrix}1&\lambda&2\\2&-1&2\\1&4&4\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}1&\lambda&2\\2&-1&2\\1&4&4\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}-1&2\\4&4\end{vmatrix}-\lambda\times\begin{vmatrix}2&2\\1&4\end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix}2&-1\\1&4\end{vmatrix}=-12-6\lambda+18=0$$

则

$$\lambda=1$$

第一题运用了克拉默法则，第二题运用了向量共面时行列式的性质，从这两道题就可以看出矩阵作为数学工具的优越性，只有让学生意识到矩阵学习的必要性与优越性，才能达到要有的效果。

## 3. 矩阵在思想层面的指导

### 3.1. 矩阵体现了从一般到特殊，再从特殊到一般的数学思想

以克拉默法则和向量共面的性质为例，定理和结论的给出都是用一般字母表示，给出一个共性的答案，对应具体的题目只要将具体的数值代入即可。求解三阶行列式，利用定义将其化为二阶行列式来计算，体现了化简的过程。

### 3.2. 矩阵体现了归纳、抽象的数学思想

课本上我们学习的基本上都是二阶矩阵，而 2017 版课标要求掌握三阶矩阵的一般性质与用法，我们可以从二阶演绎推理出三阶的情形，进而可以推广到 $n$ 阶的情形。

### 3.3. 矩阵体现了数形结合的思想

向量共面这一几何性质通过数学抽象与代数建立直接的联系，运用三阶矩阵轻而易举地解决这一问题，所以几何代数化、代数几何化都是解决问题的重要手段。

## 4. 结语

矩阵的工具性与思想性在高中数学的应用中具有重要的作用，本文从这两方面进行探究。矩阵作为一种数学工具可以在高中数学更多的领域中得以发挥作用，同时对学生的数学思维的培养具有促进的效果，希望我们能够将矩阵更好地融入高中数学。

## 参考文献


[1] 中华人民共和国. 普通高中数学课程标准[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 50-63.

[2] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013: 84-85, 50-57.

[3] 苏教版高中数学教材编写组. 普通高中课程标准实验教科书数学必修 4 [M]. 江苏: 江苏教育出版社, 2012: 74-75.

[4] 吕林根, 许子道. 解析几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 14-21, 29.