Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(11), 1970-1973**
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.911227

Hans汉斯

第二积分中值定理的一个非常规证明

刘　波，刘孝磊，王丽英

海军航空大学，山东 烟台
Email: Lauber@126.com

收稿日期：2020年10月25日；录用日期：2020年11月13日；发布日期：2020年11月20日

摘　要

第二积分中值定理是与第一积分中值定理相互独立的一个定理，属于积分中值定理。它可以用来证明Dirichlet-Abel反常Riemann积分判别法。在数学竞赛及考研试题中经常会出现涉及第二积分中值定理的题目。本文我们通过Weierstrass逼近定理，利用Bernstein多项式来证明积分第二中值定理。

关键词

第二积分中值定理，Weierstrass逼近定理，Bernstein多项式

An Unconventional Proof of the Second Integral Mean Value Theorem

Bo Liu, Xiaolei Liu, Liying Wang

Naval Aviation University, Yantai Shandong
Email: Lauber@126.com

Received: Oct. 25th, 2020; accepted: Nov. 13th, 2020; published: Nov. 20th, 2020

Abstract

The second integral mean value theorem is an independent theorem from the first integral mean value theorem, which belongs to the integral mean value theorem. It can be used to prove the Riemann integral criterion for Dirichlet Abel anomaly. In mathematics competition and postgraduate entrance examination, there are often problems related to the second integral mean value theorem. In this paper, we prove the second mean value theorem of integrals by using the Weierstrass approximation theorem and Bernstein polynomials.

文章引用: 刘波, 刘孝磊, 王丽英. 第二积分中值定理的一个非常规证明[J]. 应用数学进展, 2020, 9(11): 1970-1973.
DOI: 10.12677/aam.2020.911227

Keywords

Second Integral mean Value Theorem, Weierstrass Approximation Theorem, Bernstein Polynomials

定理 1：Weierstrass 第一逼近定理[1]

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(x)$，使得 $|P(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对于一切 $x\in[a,b]$ 成立。

注意：

一般书上提到 Weierstrass 第一逼近定理时，都是构造 Bernstein 多项式 $B_n(f,x)$ 来证明，但是却未提到 Bernstein 多项式的性质。虽然随着 n 的增长，$B_n(f,x)$ 逼近 $f(x)$ 的速度是十分缓慢的，其在数值计算的应用上是没有前途的，但是逼近多项式的性质有时比逼近速度更重要，Bernstein 多项式的“一致收念性”和“保形性”是十分有用的。下面介绍这两种性质，并用来证明积分第二中值定理。

顺便提一下，如果把该定理中的闭区间 $[a,b]$ 换成开区间或者无穷区间，则定理就不再成立，大家可以尝试举出反例。

定义 1：Bernstein 多项式

设 $f:[0,1]\to R$，称 $B_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}$ 为 f 的 n 次 Bernstein 多项式。

注意：Bernstein 多项式是定义在 $[0,1]$ 上的。

命题 1：一致收敛性[2]

设 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数，则 f 的 Bernstein 多项式在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f。

命题 2：保形性

(1) $B_n(f;0)=f(0), B_n(f;1)=f(1)$；

(2) 如果 $f\ge0$ 那么 $B_n(f)\ge0$，如果 $f\le0$，那么 $B_n(f)\le0$；

(3) 如果 f 递增(减)，那么 $B_n(f)$ 也递增(减)；

(4) 如果 f 是上凸(下凸)函数，那么 $B_n(f)$ 也是上凸(下凸)函数。

注意：对于定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 f，可以通过变换 $x=a+t(b-a)$ 进行区间标准化,这时变换后的函数就可以利用 Bernstein 多项式逼近，变换回来后 Bernstein 多项式仍然保持原来优良的性质，所以用来逼近连续函数 f 的函数仍然具有一致连续性和保形性。

下面我们利用 Bernstein 多项式来证明积分第二中值定理。

定理 2：积分第二中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调,则存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x$。

证明：先对 f 和 g 是光滑函数的情形证明积分第二中值定理。设 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则由分部积分和积分第一中值定理

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x \\
&= g(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x \\
&= g(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - F(\xi)\int_a^b g'(x)\mathrm{d}x \\
&= g(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \left[g(b)-g(a)\right]\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t \\
&= g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

再对 f 和 g 是连续函数的情形证明积分第二中值定理。由 Bernstein 多项式的性质知存在多项式函数列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$，使 $f_n \Rightarrow f, g_n \Rightarrow g, x\in[a,b]$，且 g_n 单调性与 g 一致，$x_n(a)=g(a)$，$g_n(b)=g(b)$。依题意得，存在 $\xi_n\in[a,b]$，使 $\int_a^b f_n(x)g_n(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi_n} f_n(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi_n}^b f_n(x)\mathrm{d}x$。

由于

$$
\begin{aligned}
&\left|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)\right| \\
&\le \left|f_n(x)g_n(x)-f(x)g_n(x)\right| + \left|f(x)g_n(x)-f(x)g(x)\right| \\
&\le \max\{g(a),g(b)\}\left|f_n(x)-f(x)\right| + \left|f(x)\right|\left|g_n(x)-g(x)\right|
\end{aligned}
$$

又 $f_n \Rightarrow f, g_n \Rightarrow g, x\in[a,b]$，且 f 可积即 f 有界，易知 $f_n g_n \Rightarrow fg, x\in[a,b]$。所有的 ξ_n 构成有界数列 $\{\xi_n\}$，取其收敛子列，不妨仍记为 $\{\xi_n\}$，设其收敛于 $\xi\in[a,b]$，则

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^{\xi_n} f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_a^{\xi_n} f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^{\xi_n} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\xi_n}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\le \int_a^b \left|f_n(x)-f(x)\right|\mathrm{d}x + \left|\int_{\xi_n}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| \to 0, n\to\infty
\end{aligned}
$$

即

$$
\lim_{n\to\infty}\int_a^{\xi_n} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x,
$$

同理

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{\xi_n}^{b} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_\xi^{b} f(x)\mathrm{d}x。
$$

故在 $\int_a^b f_n(x)g_n(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi_n} f_n(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi_n}^b f_n(x)\mathrm{d}x$，两边令 $n\to\infty$，得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x$。

最后证明一般情形。易证引理：若 $f\in R[a,b]$，则对 $\forall\varepsilon>0, \exists h\in C[a,b]$，s.t. $f(a)=h(a), f(b)=h(b)$，且 $\int_a^b\left|f(x)-h(x)\right|\mathrm{d}x<\varepsilon$。由引理，取 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$，则 $\exists h_n\in C[a,b]$，s.t. $\int_a^b\left|f(x)-h_n(x)\right|\mathrm{d}x<\frac{1}{n}$。

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\left|f(x)-h_n(x)\right|\mathrm{d}x=0$。

故 $0\le\left|\int_a^b\left[f(x)-h_n(x)\right]\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b\left|f(x)-h_n(x)\right|\mathrm{d}x$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，利用上述两个极限式和第二种情形所证结论，类似第二种情形，容易证明一般情形的积分第二中值定理成立。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析(4 版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[2] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法(第 2 版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.