Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(12), 2123-2128
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.912246

欧氏空间中完备自收缩子的刚性定理

曹顺娟

浙江农林大学数学系，浙江 杭州
Email: caoshunjuan@126.com

收稿日期：2020年11月23日；录用日期：2020年12月8日；发布日期：2020年12月15日

摘 要

对欧氏空间中的完备自收缩子M，我们证明：如果第二基本形式A满足$|A|^2 \leqslant \frac{1}{2}$，且平均曲率向量满足$\lim\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2}\int_{B(r)} |\boldsymbol{H}|^2 e^{-\frac{|X|^2}{4}} d\mu = 0$，那么$M$等距于下列广义柱面之一：$\boldsymbol{S}^k\left(\sqrt{2k}\right) \times \boldsymbol{R}^k$，$k = 0, 1, 2, \cdots, n$。

关键词

完备自收缩子，刚性定理，第二基本形式

A Rigidity Theorem for Complete Self-Shrinkers in the Euclidean Space

Shunjuan Cao

Department of Mathematics, Zhejiang Agriculture and Forestry University, Hangzhou Zhejiang
Email: caoshunjuan@126.com

Received: Nov. 23^{rd}, 2020; accepted: Dec. 8^{th}, 2020; published: Dec. 15^{th}, 2020

Abstract

For a complete self-shrinker M in the Eulidean space $\boldsymbol{R}^{n+p}$, we prove that if the

文章引用: 曹顺娟. 欧氏空间中完备自收缩子的刚性定理[J]. 应用数学进展, 2020, 9(12): 2123-2128.
DOI: 10.12677/aam.2020.912246

second fundamental form A satisfies $|A|^2 \leqslant \frac{1}{2}$ and the mean curvature $\boldsymbol{H}$ satifies $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2}\int_{B(r)} |\boldsymbol{H}|^2 e^{-\frac{|X|^2}{4}} d\mu = 0$, then M is one of the generalized cylinders $\boldsymbol{S}^k\left(\sqrt{2k}\right) \times \boldsymbol{R}^k$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Keywords

Complete Self-Shrinker, Rigidity Theorem, Second Fundamental Form

1. 引言

设M是$(n+p)$-维欧氏空间$\boldsymbol{R}^{n+p}$中的浸入子流形, 并设浸入映射为$X_0 : M \to \boldsymbol{R}^{n+p}$. 以$F_0$为初值的平均曲率流是一个单参数族的浸入映射$X : M \times [0, T) \to \boldsymbol{R}^{n+p}$, 满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} X(x,t) &= \boldsymbol{H}(x,t), \quad (x,t) \in M \times [0,T), \\ X(x,0) &= X_0(x), \qquad x \in M, \end{aligned}$$

这里$\boldsymbol{H}$表示M的平均曲率向量.

关于平均曲率流的一个重要问题是研究其特解. 自收缩解是平均曲率流的一类特解, 它的时间片是自收缩子. 一个浸入$X : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+p}$称为自收缩子, 如果它满足

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{2} X^\perp,$$

这里$(\ \ )^\perp$表示$\boldsymbol{R}^{n+p}$上的向量场的法向分量. 自收缩子的分类对平均曲率流的奇点分析十分重要, 它是一类非常重要的奇点模型.

对平面$\boldsymbol{R}^2$中曲线流, Abresch-Langer给出了所有自收缩子的分类 [1]. 由于$\boldsymbol{R}^N$中的自收缩曲线包含在一个2维线性子空间中, $\boldsymbol{R}^N$中的自收缩曲线也有很好的刻画. Huisken [2]证明了$\boldsymbol{R}^{n+1}$中平均曲率为正的闭自收缩子是$\boldsymbol{S}^n\left(\sqrt{2n}\right)$. 后来Huisken [3]又将结果推广到$\boldsymbol{R}^{n+1}$中一类完备自收缩子的情形. 最近, Colding-Minicozzi [4]证明了$\boldsymbol{R}^{n+1}$中具有多项式体积增长的熵稳定嵌入自收缩子只能是平面, 球面或柱面. Le-Sesum [5]证明了$\boldsymbol{R}^{n+1}$中具有多项式体积增长且满足$|A|^2 < \frac{1}{2}$ 的n-维完备自收缩子必等距于欧氏空间. Cao-Li [6]将Le-Sesum的结果推广到高余维情形, 证明了下面的间隙定理.

定理 1 *([6])设M^n是欧氏空间$\boldsymbol{R}^{n+p}$中具有多项式体积增长的n-维完备自收缩子. 如果M满足$|A|^2 \leqslant \frac{1}{2}$, 那么$M$等距于下列之一: $\boldsymbol{S}^k\left(\sqrt{2k}\right) \times \boldsymbol{R}^k$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$.*

如果不假设自收缩子具有多项式体积增长, Cheng-Peng [7]在稍强的条件下证明了自收缩子的间隙定理.

定理 2 *([7])设M^n是欧氏空间$\boldsymbol{R}^{n+p}$中的n-维完备自收缩子. 如果M满足$\sup_M |A|^2 < \frac{1}{2}$, 那么$M$等距于欧氏空间.*

关于自收缩子的更多结果参看 [8] [9] [10]等.

本文主要研究欧氏空间中的完备自收缩子在不假设具有多项式体积增长时的刚性定理，证明了下述结论.

定理 3 *设M^n是欧氏空间$\boldsymbol{R}^{n+p}$中的n-维完备自收缩子. 如果M满足*

$$|A|^2 \leqslant \frac{1}{2}, \quad \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int_{B(r)} |\boldsymbol{H}|^2 e^{-\frac{|X|^2}{4}} d\mu = 0,$$

那么M等距于下列之一: $\boldsymbol{S}^k\left(\sqrt{2k}\right) \times \boldsymbol{R}^k$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$.

在定理3中, $B(r)$表示M中以某点为球心, 以r为半径的测地球, $d\mu$表示M上的体积形式. 显然, 若M具有多项式体积增长, 则有$\int_M |\boldsymbol{H}|^2 e^{-\frac{|X|^2}{4}} d\mu < \infty$, 因此定理3中的第2个条件自然满足, 从而推广了定理1.

2. 准备工作

设M^n是$(n+p)$-维欧氏空间$\boldsymbol{R}^{n+p}$中的n-维完备浸入子流形. 我们约定指标范围如下:

$$1 \leqslant A, B, C, \cdots \leqslant n+p, \quad 1 \leqslant i, j, k, \cdots \leqslant n, \quad n+1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma, \cdots n+p.$$

令g表示M上的诱导度量. 在$\boldsymbol{R}^{n+p}$上选取局部单位正交标架场$\{e_A\}$, 使得限制在M上时, $\{e_i\}$与M相切. 令$\{\omega_A\}$表示$\{e_A\}$的对偶基, $\{\omega_{AB}\}$表示$\boldsymbol{R}^{n+p}$上的联络1-形式. 限制在M上时, 有

$$\omega_{\alpha i} = \sum_j h^\alpha_{ij}\omega_j, \quad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji},$$

$$A = \sum_{\alpha,i,j} h^\alpha_{ij}\omega_i \otimes \omega_j \otimes e_\alpha,$$

$$\boldsymbol{H} = \sum_{\alpha,i} h^\alpha_{ii} e_\alpha = \sum_\alpha H^\alpha e_\alpha,$$

其中$A, \boldsymbol{H}$分别表示M的第二基本形式和平均曲率向量. 在M上定义椭圆算子$\mathcal{L}$为

$$\mathcal{L} = \Delta - \frac{1}{2}\langle X, \nabla(\cdot)\rangle = e^{\frac{|X|^2}{4}} \operatorname{div}\left(e^{-\frac{|X|^2}{4}} \nabla(\cdot)\right),$$

其中X表示M在$\boldsymbol{R}^{n+p}$中的位置向量, Δ表示M上的Laplace算子. $\mathcal{L}$关于M上的测度$e^{-\frac{|X|^2}{4}}d\mu$是自伴随的, 这里$d\mu$表示M上的体积形式. 直接计算可知$|H|^2$ 满足([8] [10])

$$\mathcal{L}|\boldsymbol{H}|^2=2|\nabla\boldsymbol{H}|^2+|\boldsymbol{H}|^2-2\sum_{i,j}\left(\sum_{\alpha}H^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}\right)^2. \tag{1}$$

3. 定理的证明

在本节中我们给出定理3的证明.

证明. 由等式(1), 有

$$\mathcal{L}|\boldsymbol{H}|^2\geqslant 2|\nabla\boldsymbol{H}|^2+|\boldsymbol{H}|^2(1-2|A|^2).$$

对任意$\epsilon>0$, 定义$f_\epsilon=\sqrt{|\boldsymbol{H}|^2+\epsilon}$. 对$x\in M$, 若$H(x)\neq 0$, 则有$|\nabla\boldsymbol{H}|^2(x)\geqslant|\nabla|\boldsymbol{H}||^2$. 因此在$x$点,

$$|\nabla f_\epsilon|^2=\frac{|\boldsymbol{H}|^2|\nabla|\boldsymbol{H}||^2}{|\boldsymbol{H}|^2+\epsilon}\leqslant|\nabla|\boldsymbol{H}||^2\leqslant|\nabla\boldsymbol{H}|^2.$$

如果$\boldsymbol{H}(x)=0$, 则有$|\nabla f_\epsilon|^2(x)=0$, 因此在该点仍有$|\nabla\boldsymbol{H}|^2\geqslant|\nabla f_\epsilon|^2$. 由此我们得到

$$\mathcal{L}f_\epsilon^2\geqslant 2\delta|\nabla\boldsymbol{H}|^2+2(1-\delta)|\nabla f_\epsilon|^2+|\boldsymbol{H}|^2(1-2|A|^2),$$

其中$\delta\in(0,1)$.

设ϕ是M上具有紧致支撑集的C^1函数. 在上式两边同时乘以$\phi^2\rho$, 这里$\rho=e^{-\frac{|X|^2}{4}}$, 同时在$M$上积分, 并利用分部积分, 可得到

$$\begin{aligned}
0\ \geqslant\ & -\int_M(\mathcal{L}f_\epsilon^2)\phi^2\rho d\mu+2\delta\int_M|\nabla\boldsymbol{H}|^2\phi^2\rho d\mu\\
&+2(1-\delta)\int_M|\nabla f_\epsilon|^2\phi^2\rho d\mu+\int_M|\boldsymbol{H}|^2(1-2|A|^2)\phi^2\rho d\mu\\
=\ & \int_M\langle\nabla f_\epsilon^2,\nabla\phi^2\rangle\rho d\mu+2\delta\int_M|\nabla\boldsymbol{H}|^2\phi^2\rho d\mu\\
&+2(1-\delta)\int_M|\nabla f_\epsilon|^2\phi^2\rho d\mu+\int_M|\boldsymbol{H}|^2(1-2|A|^2)\phi^2\rho d\mu\\
=\ & 4\int_M f_\epsilon\phi\langle\nabla f_\epsilon,\nabla\phi\rangle\rho d\mu+2\delta\int_M|\nabla\boldsymbol{H}|^2\phi^2\rho d\mu\\
&+2(1-\delta)\int_M|\nabla f_\epsilon|^2\phi^2\rho d\mu+\int_M|\boldsymbol{H}|^2(1-2|A|^2)\phi^2\rho d\mu.
\end{aligned}$$

由于

$$|\nabla(f_\epsilon\phi)|^2=\phi^2|\nabla f_\epsilon|^2+2\phi f_\epsilon\langle\nabla f_\epsilon,\nabla\phi\rangle+f_\epsilon^2|\nabla\phi|^2,$$

我们有

$$
\begin{aligned}
0 \geqslant\ & (4-\gamma)\int_M f_\epsilon\phi\langle\nabla f_\epsilon,\nabla\phi\rangle\rho d\mu+\gamma\int_M f_\epsilon\phi\langle\nabla f_\epsilon,\nabla\phi\rangle\rho d\mu+2\delta\int_M|\nabla \boldsymbol{H}|^2\phi^2\rho d\mu\\
&+2(1-\delta)\int_M|\nabla f_\epsilon|^2\phi^2\rho d\mu+\int_M|\boldsymbol{H}|^2(1-2|A|^2)\phi^2\rho d\mu\\
=\ & (4-\gamma)\int_M f_\epsilon\phi\langle\nabla f_\epsilon,\nabla\phi\rangle\rho d\mu+\frac{\gamma}{2}\int_M|\nabla(f_\epsilon\phi)|^2\rho d\mu-\frac{\gamma}{2}\int_M\phi^2|\nabla f_\epsilon|^2\rho d\mu\\
&-\frac{\gamma}{2}\int_M f_\epsilon^2|\nabla\phi|^2\rho d\mu+2\delta\int_M|\nabla \boldsymbol{H}|^2\phi^2\rho d\mu+2(1-\delta)\int_M|\nabla f_\epsilon|^2\phi^2\rho d\mu\\
&+\int_M|\boldsymbol{H}|^2(1-2|A|^2)\phi^2\rho d\mu\\
\geqslant\ & -\frac{4-\gamma}{2}\left(\tau\int_M\phi^2|\nabla f_\epsilon|^2\rho d\mu+\frac{1}{\tau}\int_M f_\epsilon^2|\nabla\phi|^2\rho d\mu\right)\\
&+\frac{\gamma}{2}\int_M|\nabla(f_\epsilon\phi)|^2\rho d\mu-\frac{\gamma}{2}\int_M\phi^2|\nabla f_\epsilon|^2\rho d\mu-\frac{\gamma}{2}\int_M f_\epsilon^2|\nabla\phi|^2\rho d\mu\\
&+2\delta\int_M|\nabla \boldsymbol{H}|^2\phi^2\rho d\mu+2(1-\delta)\int_M|\nabla f_\epsilon|^2\phi^2\rho d\mu+\int_M|\boldsymbol{H}|^2(1-2|A|^2)\phi^2\rho d\mu\\
=\ & \left(2(1-\delta)-\frac{(4-\gamma)\tau}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\int_M\phi^2|\nabla f_\epsilon|^2\rho d\mu-\left(\frac{4-\gamma}{2\tau}+\frac{\gamma}{2}\right)\int_M f_\epsilon^2|\nabla\phi|^2\rho d\mu\\
&+\frac{\gamma}{2}\int_M|\nabla(f_\epsilon\phi)|^2\rho d\mu+2\delta\int_M|\nabla \boldsymbol{H}|^2\phi^2\rho d\mu+\int_M|\boldsymbol{H}|^2(1-2|A|^2)\phi^2\rho d\mu,
\end{aligned}
$$

其中$\gamma\in(0,4)$, $\tau\in(0,\infty)$. 现在取$\delta=\frac{1}{2}$, $\gamma=1$, $\tau=\frac{1}{3}$, 上式可化为

$$0\geqslant-\frac{7}{2}\int_M f_\epsilon^2|\nabla\phi|^2\rho d\mu+\int_M|\nabla \boldsymbol{H}|^2\phi^2\rho d\mu+\int_M|\boldsymbol{H}|^2(1-2|A|^2)\phi^2\rho d\mu.$$

选取$\phi\in C_0^\infty(M)$使得$0\leqslant\phi\leqslant 1$, 对$x\in B(r)$有$\phi(x)=1$, 对$x\in M\backslash B(2r)$有$\phi(x)=0$, 且$|\nabla\phi|\leqslant\frac{2}{r}$. 上式中令$\epsilon\to 0$, $r\to\infty$ 可得

$$0\geqslant-\lim_{r\to\infty}\frac{14}{r^2}\int_{B(2r)}|\boldsymbol{H}|^2\rho d\mu+\int_M|\nabla \boldsymbol{H}|^2\rho d\mu+\int_M|\boldsymbol{H}|^2(1-2|A|^2)\rho d\mu.$$

根据假设条件$|A|^2\leqslant\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r^2}\int_{B(r)}|\boldsymbol{H}|^2\rho d\mu=0$, 有

$$0\geqslant\int_M|\nabla \boldsymbol{H}|^2\rho d\mu+\int_M|\boldsymbol{H}|^2(1-2|A|^2)\rho d\mu\geqslant 0.$$

因此$\nabla\boldsymbol{H}=0$, 即M具有平行平均曲率向量. 因此或者$\boldsymbol{H}\equiv 0$, 或者$\boldsymbol{H}\neq 0$且$|A|^2=\frac{1}{2}$. 根据Cao-Li [6]中的讨论可知M等距于下列之一: $\boldsymbol{S}^k\left(\sqrt{2k}\right)\times\boldsymbol{R}^k$, $k=0,1,2,\cdots,n$.

基金项目

本研究得到浙江省自然科学基金资助, 项目编号: LQ16A010012。

参考文献

[1] Abresch, U. and Langer, J. (1986) The Normalized Curve Shortening Flow and Homothetic Solutions. *Journal of Differential Geometry*, **23**, 175-196. https://doi.org/10.4310/jdg/1214440025

[2] Huisken, G. (1990) Asymptotic Behavior for Singularities of the Mean Curvature Flow. *Journal of Differential Geometry*, **31**, 285-299. https://doi.org/10.4310/jdg/1214444099

[3] Huisken, G. (1993) Local and Global Behavior of Hypersurfaces Moving by Mean Curvature. In: *Differential Geometry: Partial Differential Equations on Manifolds* (*Los Angeles, Calif*, 1990), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 54, American Mathematical Society, RI, 175-191. https://doi.org/10.1090/pspum/054.1/1216584

[4] Colding, T.H. and Minicozzi II, W.P. (2012) Generic Mean Curvature Flow I; Generic Singularities. *Annals of Mathematics*, **175**, 755-833. https://doi.org/10.4007/annals.2012.175.2.7

[5] Le, N. and Sesum, N. (2011) Blow-Up Rate of the Mean Curvature during the Mean Curvature Flow and a Gap Theorem for Self-Shrinkers. *Communications in Analysis and Geometry*, **19**, 633-659. https://doi.org/10.4310/CAG.2011.v19.n4.a1

[6] Cao, H.D. and Li, H.Z. (2013) A Gap Theorem for Self-Shrinkers of the Mean Curvature Flow in Arbitrary Codimension. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **46**, 879-889. https://doi.org/10.1007/s00526-012-0508-1

[7] Cheng, Q.M. and Peng, Y.J. (2015) Complete Self-Shrinkers of the Mean Curvature Flow. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **52**, 497-506. https://doi.org/10.1007/s00526-014-0720-2

[8] Cao, S.J., Xu, H.W. and Zhao, E.T. (2014) Pinching Theorems for Self-Shrinkers of Higher Codimension. Preprint.

[9] Cheng, Q.M. and Wei, G.X. (2015) A Gap Theorem of Self-Shrinkers. *Transactions of the American Mathematical Society*, **367**, 4895-4915. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2015-06161-3

[10] Ding, Q. and Xin, Y.L. (2014) The Rigidity Theorems of Self-Shrinkers. *Transactions of the American Mathematical Society*, **366**, 5067-5085. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-05901-1