Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(12), 2317-2328**
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.912271

官方媒体影响下的随机谣言传播模型

胡　悦，胡良剑

东华大学理学院，上海
Email: 2423583281@qq.com

收稿日期：2020年11月27日；录用日期：2020年12月21日；发布日期：2020年12月31日

摘　要

在添加官方媒体对谣言传播易感染者影响下的确定性方程中，考虑影响因子γ受环境噪声的扰动，建立官方媒体影响下的随机微分方程，并研究了在无谣言平衡点和正平衡点附近的渐近性质。证明了该随机微分方程的正解存在唯一性。然后，定义了新的基本再生数$\mathfrak{R}_0'$，并证明了满足一定条件时，系统的解在无谣言平衡点附近是渐近稳定的；而当满足另外四点要求时，系统的解在正谣言平衡点附近是渐近稳定的。

关键词

官方媒体，谣言传播，平衡点，稳定性，李雅普诺夫函数

Stochastic Rumor Propagation Model under the Influence of Official Media

Yue Hu, Liangjian Hu

College of Science, Donghua University, Shanghai
Email: 2423583281@qq.com

Received: Nov. 27th, 2020; accepted: Dec. 21st, 2020; published: Dec. 31st, 2020

Abstract

In addition to the deterministic equation under the influence of the official media on the rumor propagation of susceptible infected people, the stochastic differential equation under the influence of the official media is established by considering the disturbance of the influence factor by environmental noise, and the asymptotic properties near the rumor free equilibrium point and positive equilibrium point are studied. First, the existence and uniqueness of positive solutions of

文章引用: 胡悦, 胡良剑. 官方媒体影响下的随机谣言传播模型[J]. 应用数学进展, 2020, 9(12): 2317-2328.
DOI: 10.12677/aam.2020.912271

the stochastic differential equation are proved. Then, a new basic reproduction number $\Re_0'$ is defined. And it is proved that when certain conditions are satisfied, the solution of the system is asymptotically stable near the rumor free equilibrium point. When the other four requirements are met, the solution of the system is asymptotically stable near the positive rumor equilibrium point.

Keywords

Official Media, Rumor Propagation, Equilibrium Point, Stability, Lyapunov Function

1. 引言

2019 年 10 月开始报道武汉不明原因的肺炎，再到后面陆续大量的病人被确诊，网络上各种关于新冠的谣言顿时成为微博、微信和抖音等热门话题。2020 年 1 月 31 日，世界卫生组织在新闻发布会上正式宣布：新冠疫情被列入“国际关注的突发公共卫生事件”，瞬间网络上就有营销博主称这意味着中国将被列入“疫区国”，这引起民众极大的恐慌；更有盐水漱口能预防感染、电风扇对手和脸部吹 30 秒能消毒、吃维生素 C 能预防新冠病毒等谣言，这些迅速在网络平台，特别在是长辈群里传播，造成维生素 C 等无明显作用药物的哄抢。由于网络的便捷、对用户的评论和发表言论的管理较为松懈，就会大大降低网络消息的真实性，极大地影响了社会的稳定。

1965 年 Daley 和 Kendall [1]在其论文中利用新的方法——“任意常数扩散原理”，首次研究得到：从表面上看，谣言与流行病两者之间有着相似之处，提出了谣言传播模型，这个模型就是“D-K”模型。1973 年 Maki 和 Thomson [2]在 D-K 模型的基础上，认为第一个人知道并传播谣言，才会有可能知道谣言并不传播谣言，得到了 M-T 模型，该模型认为这类人不会受到谣言的干扰。2001 年，Zanette [3]在《在小世界网络上传播的关键行为》文章中首次用实验数据证明了一个类似流行病的模型，这个模型可以被解释为谣言传播模型，而且得到了该模型传播的临界指数，研究了临界点的随机性与网络的连通性之间的关系。

Zhao [4]在《社交网络中的谣言传播模式》指出：当考虑到遗忘与记忆机制的相互作用时，谣言传播模型与流行病传播模型就会存在显著差异，于是提出新的谣言传播模型 SIHR 模型。该模型考虑到人群中的无知者到顽抗者的过程与一种新型冬眠者的相关联系，然后对方程的稳态进行分析，并研究了在传播率、窒息率、遗忘率和网络平均程度不同状态下的最终传播规模，得到了谣言传播的阈值。最后通过龙格–库塔方法进行数值模拟。Zhu 等[5]在最基础的 SIR 模型上，改进了新的谣言传播模型，用于研究复杂社会网络中的谣言传播问题。该论文中考虑连通性随环境的扰动，建立了均匀网络和非均匀网络中谣言传播的随机微分方程，分析新建模型解的性质以及该系统的稳定性。最后通过数据模拟给出了均匀网络下谣言扩散的阈值，并发现在异质网络中无谣言传播的阈值。

Liu 等[6]提出了一种新的异质网络谣言传播模型，分析了系统的全局动力学行为，给出了该系统的谣言传播的阈值。陈安等[7]人以新冠肺炎为例，建立了以 SEIR 为基础的伪科学网络谣言传播模型，通过具体的数值分析，分析了伪科学网络谣言传播在本次新冠疫情期间的传播特点，给出了理论性的

建议。

从谣言传播的研究结果来看，这些模型主要分为三种：第一种是基于传染病模型的改进，第二种是在复杂网络或者小世界网络上的谣言传播模型，第三种是以伪科学这类谣言传播的相关模型。实际上，谣言的传播还与媒体的报道效果以及媒体的官方性有关，其中媒体的相关报道对谣言传播起到了至关重要的作用。宋雪等[8] [9]对受媒体正面报道和负面报道的谣言传播模型进行了研究，定义了系统的阈值，讨论了系统平衡点附近的动力学行为。在赵敏[10]的确定性模型中，考虑到官方媒体宣传的影响因素，因此原本的易感人群可分为两类，一是未受到官方媒体宣传影响的易感人群，二是受到官方媒体宣传的易感人群，建立了如下的微分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_u(t)}{\mathrm{d}t}=q\Lambda-\beta S_u(t)I(t)-\gamma S_u(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}S_e(t)}{\mathrm{d}t}=(1-q)\Lambda-\beta\sigma S_e(t)I(t)-\gamma S_u(t)-\mu S_e(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\beta S_u(t)I(t)+\beta\sigma S_e(t)I(t)-\gamma I(t)-\mu I(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=\mu S_e(t)+\mu I(t)-\gamma R(t)\end{cases}\tag{1}$$

其中：$S_u(t)$ 表示易感人群中未受官方媒体影响下的人群数量；$S_e(t)$ 表示易感人群中受官方媒体影响下的人群数量；$I(t)$ 表示谣言传播者的数量；$R(t)$ 表示谣言免疫者的数量；Λ 表示该系统原有的总人数；σ 表示媒体宣传程度的有效性；γ 表示影响因子：当到达一定时间段的时候，系统里面的人对社会状况的认知会发生改变，从而影响系统中的四类人离开此系统。作者研究了模型(1)的无谣言平衡点和正平衡点附近的动力学行为。

结合上述分析，本文在官方媒体影响下的谣言传播模型的基础上，考虑影响因子 γ 随环境变化而发生改变，不再是个固定的数值。所以，本文考虑把影响因子 γ 添加一个随机扰动项，即 $\gamma\to\gamma+\sigma_1 B(t)$，那么就能得到如下随机微分方程为：

$$\begin{cases}\mathrm{d}S_u(t)=\left(q\Lambda-\beta S_u(t)I(t)-\gamma S_u(t)\right)\mathrm{d}t-\sigma_1 S_u(t)\mathrm{d}B(t)\\ \mathrm{d}S_e(t)=\left((1-q)\Lambda-\beta\sigma S_e(t)I(t)-\gamma S_e(t)-\mu S_e(t)\right)\mathrm{d}t-\sigma_1 S_e(t)\mathrm{d}B(t)\\ \mathrm{d}I(t)=\left(\beta S_u(t)I(t)+\beta\sigma S_e(t)I(t)-\gamma I(t)-\mu I(t)\right)\mathrm{d}t-\sigma_1 I(t)\mathrm{d}B(t)\\ \mathrm{d}R(t)=\left(\mu S_e(t)+\mu I(t)-\gamma R(t)\right)\mathrm{d}t-\sigma_1 R(t)\mathrm{d}B(t)\end{cases}\tag{2}$$

根据确定性模型的假设[10]，这里也有如下规定：

1) 在这个系统中的所有人都将被认为是易感人群；

2) 这里 Λ 表示的是整个系统的总人数，那么在这个系统中，$q\Lambda$ 表示最初该系统中受到官方媒体影响的易感人群的数量，而 $(1-q)\Lambda$ 就表示该系统中未受官方媒体影响的易感人群最初数量；

3) 受官方媒体影响的易感者以 $\sigma\beta$ 的概率变成为谣言传播者，未受官方媒体影响的易感人群以概率 β 转化为谣言传播者；

4) 一段时间后，考虑系统中有一定比例 γ 的人会由于社会认知等原因而离开系统；

5) 在谣言传播的整个过程中，会因为其他因素或环境等变化等影响，受到官方媒体影响的易感者和谣言传播者这两类人的数量，将会以概率 μ 转变成谣言免疫者。

上述过程就可以用如下文献[10]流程图表示(图 1)：

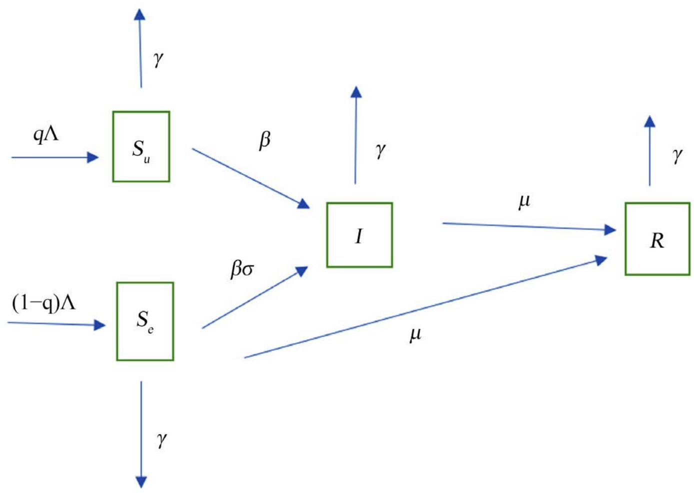

Figure 1. Schematic diagram of rumor propagation process
图 1. 谣言传播过程示意图

2. 正解的存在唯一性

在研究系统(2)的动力学行为之前，首先需要研究其正解的存在唯一性，这样才能保证方程的现实意义。显然系统(2)的系数是局部李普希兹连续的，但不满足线性增长条件，因此一般的存在唯一性将不再适用于此过程的证明，于是这里采用构造李雅普诺夫函数的方法进行正解存在唯一性的证明。

定理 1 对于任意给定的初值$\left(S_u(0),S_e(0),I(0),R(0)\right)$系统存在唯一正解$\left(S_u(t),S_e(t),I(t),R(t)\right)$对所有$t\ge 0$，并且解以概率 1 存在。

证明 显然随机微分方程组(2)的系统满足局部 李普希兹条件。对任意给定的初值，有最大的唯一解$\left(S_u(t),S_e(t),I(t),R(t)\right)\in[0,\tau_\varepsilon)$，其中$\tau_\varepsilon$是爆破时间，令$k_0$充分大，且$k_0>0$，对$\left(S_u(0),S_e(0),I(0),R(0)\right)$在$\left[\frac{1}{k_0},k_0\right)$中。对每个正数$k>k_0$，定义停时

$\tau_k=\inf\left\{t\in[0,\tau_e):S_u(t)\text{或}S_e(t)\text{或}I(t)\text{或}R(t)\notin\left(\frac{1}{k},k\right)\right\}$。当$k\to\infty$时，$\tau_k$单调增长，令$\tau_\infty\triangleq\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k$，显然$\tau_\infty\le\tau_\varepsilon$ $a.s.$。因此只需证$\tau_\infty=\infty$ $a.s.$。否则，存在常数$T>0$，$k_1>k_0$，$\varepsilon\in(0,1)$使得$P(\Omega_k)\ge\varepsilon$，对所有的$k>k_1$成立，其中$\Omega_k=\{\tau_k\le T\}$。

构造李雅普诺夫函数

$$V\left(S_u(t),S_e(t),I(t),R(t)\right)=S_u+a-a\ln\frac{S_u}{a}+S_e+a-a\ln\frac{S_e}{a}+I+1-\ln I+R+1-\ln R,$$

根据伊藤公式得到

$$\begin{aligned}LV&=\left(1-\frac{a}{S_u}\right)\left(q\Lambda-\beta S_uI-\gamma S_u\right)+\frac{a}{2}\sigma_1^2+\left(1-\frac{a}{S_e}\right)\left((1-q)\Lambda-\beta\sigma S_eI-\gamma S_e-\mu S_e\right)+\frac{a}{2}\sigma_1^2\\&\quad+\left(1-\frac{1}{I}\right)\left(\beta S_uI+\beta\sigma S_eI-\gamma I-\mu I\right)+\frac{1}{2}\sigma_1^2+\left(1-\frac{1}{R}\right)\left(\mu S_e+\mu I-\gamma R\right)+\frac{1}{2}\sigma_1^2\\&\le\Lambda-\gamma S_u-\gamma S_e-\gamma I-\gamma R+a\beta I+2a\gamma+a\sigma_1^2+a\beta\sigma I+\sigma_1^2+a\mu+\mu+2\gamma\\&\le\Lambda+2a\gamma+a\sigma_1^2+\sigma_1^2+a\mu+\mu+2\gamma+(2a\beta-\gamma)I\end{aligned}$$。

令

$$2a\beta-\gamma=0,$$

则

$$a=\frac{\gamma}{2\beta},$$

因此 $LV\le Q$，其中

$$Q=\Lambda+2a\gamma+a\sigma_1^2+\sigma_1^2+a\mu+\mu+2\gamma。$$

由

$$EV\left(S_u\left(T\wedge\tau_k\right),S_e\left(T\wedge\tau_k\right),I\left(T\wedge\tau_k\right),R\left(T\wedge\tau_k\right)\right)\le V_0+E\int_0^{T\wedge\tau_k}Q\mathrm{d}s,$$

得

$$EV\left(S_u\left(T\wedge\tau_k\right),S_e\left(T\wedge\tau_k\right),I\left(T\wedge\tau_k\right),R\left(T\wedge\tau_k\right)\right)\le V_0+QT,$$

在 Ω_k 内，$\tau_k\le T$ 且 $S_u(\tau_k)$，$S_e(\tau_k)$，$I(\tau_k)$，$R(\tau_k)$ 至少有一个等于 k 或 $\frac{1}{k}$，有

$$\begin{aligned}&V\left(S_u\left(\tau_k\right),S_e\left(\tau_k\right),I\left(\tau_k\right),R\left(\tau_k\right)\right)\\&\ge\left(k+1-\ln k\right)\wedge\left(\frac{1}{k}+1+\ln k\right)\wedge\left(k+a-a\ln\frac{k}{a}\right)\wedge\left(\frac{1}{k}+a+a\ln\frac{k}{a}\right),\end{aligned}$$

因此可以得到：

$$\begin{aligned}V_0+QT&\ge E\left[1_{\Omega_k}V\left(S_u\left(\tau_k\right),S_e\left(\tau_k\right),I\left(\tau_k\right),R\left(\tau_k\right)\right)\right]\\&\ge P\left(\Omega_k\right)\left(k+1-\ln k\right)\wedge\left(\frac{1}{k}+1+\ln k\right)\wedge\left(k+a-a\ln\frac{k}{a}\right)\wedge\left(\frac{1}{k}+a+a\ln\frac{k}{a}\right)。\end{aligned}$$

当 $k\to\infty$ 时，$V_0+QT=\infty$，这与 $V_0+QT<\infty$ 产生矛盾，因此 $\tau_\infty=\infty$ $a.s$。

系统(1)的边界平衡点为 $E_0=\left(\frac{q\Lambda}{\gamma},\frac{(1-q)\Lambda}{\gamma+\mu},0,\frac{\mu\Lambda(1-q)}{\gamma(\gamma+\mu)}\right)$，其含义是指网络中没有谣言进行传播，也叫做无谣言传播平衡点。在文献[10]中，研究了此无谣言传播平衡点的存在性，并定义了基本再生数 $\Re_0'$，当 $\Re_0'<1$ 时，系统(1)的谣言传播就会逐渐消失。那么，在随机微分方程中，考虑了噪声的影响，边界平衡点仍然存在，那么是否可以定义新的基本再生数，使得满足相应条件时，边界平衡点仍具有某种性质？下面本文研究系统(2)在边界平衡点附近解的性态。

3. 在边界平衡点附近解的渐近性态

定理 2 若 $\Re_0'=\frac{\beta q\Lambda}{\gamma(\gamma+\mu)}+\frac{\beta\sigma\Lambda(1-q)}{(\gamma+\mu)^2}<1$ 且满足条件：

1) $(1+c_1)\sigma_1^2<c_1(\gamma+\mu)+\gamma$；

2) $2\sigma_1^2+\frac{1}{2}<2\gamma$；

则对于任何给定的初值 $\left(S_u(0),S_e(0),I(0),R(0)\right)\in R_+^4$，随机微分方程满足如下性质：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\left[\left(S_u(s)-\frac{q\Lambda}{\gamma}\right)^2+\left(S_e(s)-\frac{(1-q)\Lambda}{\gamma+\mu}\right)^2+I(s)^2+\left(R(s)-\frac{(1-q)\Lambda\mu}{(\gamma+\mu)\gamma}\right)^2\right]\mathrm{d}s\le\frac{A}{B},$$

其中

$c_1=\dfrac{2\gamma^2}{\beta q\Lambda\sigma}>0$，$c_2=\dfrac{4\gamma}{\beta\sigma}>0$，$A=2(1+c_1)\sigma_1^2\dfrac{q^2\Lambda^2}{\gamma^2}+c_2\mu^2+2(1+c_1)\sigma_1^2\dfrac{(1-q)^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2}+2\dfrac{\sigma_1^2(1-q)^2\mu^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2\gamma^2}$，

$$B=\min\left\{2\gamma-2(1+c_1)\sigma_1^2+2c_1\gamma,2\gamma-2(1+c_1)\sigma_1^2+2c_1(\gamma+\mu)-2c_2,2\gamma-2\sigma_1^2-2c_2,2\gamma-2\sigma_1^2\right\}$$

证明：令

$$G(t)=S_u(t)-\frac{q\Lambda}{\gamma},\quad H(t)=S_e(t)-\frac{(1-q)\Lambda}{\gamma+\mu},\quad Z(t)=I(t),\quad M(t)=R(t)-\frac{(1-q)\mu\Lambda}{(\mu+\gamma)\gamma}$$

则原系统(2)转化为：

$$\begin{cases}\mathrm{d}G(t)=\left(-\beta GZ(t)-\dfrac{\beta q\Lambda Z}{\gamma}-\gamma G\right)\mathrm{d}t-\sigma_1\left(G+\dfrac{q\Lambda}{\gamma}\right)\mathrm{d}B_1(t)\\ \mathrm{d}H(t)=\left(-\beta\sigma HZ-\dfrac{\beta\sigma(1-q)\Lambda Z}{\gamma+\mu}-\gamma H-\mu H\right)\mathrm{d}t-\sigma_1\left(H+\dfrac{(1-q)\Lambda}{\gamma+\mu}\right)\mathrm{d}B_1(t)\\ \mathrm{d}Z(t)=\left(\beta GZ+\dfrac{\beta q\Lambda Z}{\gamma}+\beta\sigma HZ+\dfrac{\beta\sigma(1-q)\Lambda Z}{\gamma+\mu}-\gamma Z-\mu Z\right)\mathrm{d}t-\sigma_1 Z\mathrm{d}B_1(t)\\ \mathrm{d}M(t)=(\mu H+\mu Z-\gamma M)\mathrm{d}t-\sigma_1\left(M+\dfrac{(1-q)\mu\Lambda}{(\mu+\gamma)\gamma}\right)\mathrm{d}B_1(t)\end{cases},$$

其中$G,H,M\in R,\ Z>0$。对此我们考虑如下李雅普诺夫函数：

$$V(G,H,Z,M)=(G+H+Z+M)^2+c_1(G+H)^2+c_2(Z+M),$$

其中c_1,c_2是大于 0 的常数。由伊藤公式可得

$$\begin{aligned}LV=&\left[2(G+H+Z+M)+2c_1G\right]\left[-\beta GZ-\frac{\beta q\Lambda Z}{\gamma}-\gamma G\right]+(1+c_1)\sigma_1^2\left(G+\frac{q\Lambda}{\gamma}\right)^2\\&+\left[2(G+H+Z+M)+2c_1H\right]\left[-\beta\sigma HZ-\frac{\beta\sigma(1-q)\Lambda Z}{\gamma+\mu}-\gamma H-\mu H\right]\\&+(1+c_1)\sigma_1^2\left(H+\frac{(1-q)\Lambda}{\gamma+\mu}\right)^2+\sigma_1^2Z^2+\left[2(G+H+Z+M)+c_2\right][\mu H+\mu Z-\gamma M]\\&+\left[2(G+H+Z+M)+c_2\right]\left[\beta GZ+\frac{\beta q\Lambda Z}{\gamma}+\beta\sigma HZ+\frac{\beta\sigma(1-q)\Lambda Z}{\gamma+\mu}-\gamma Z-\mu Z\right]\\&+\sigma_1^2\left(M+\frac{(1-q)\Lambda\mu}{(\gamma+\mu)\gamma}\right)^2\\=&\left(-2\gamma+(1+c_1)\sigma_1^2-2c_1\gamma\right)G^2+\left(-2\gamma+(1+c_1)\sigma_1^2-2c_1\gamma-2c_1\mu\right)H^2+\left(-2\gamma+\sigma_1^2\right)Z^2\\&+\left(-2\gamma+\sigma_1^2\right)M^2-4GH+\left(-4\gamma-\frac{2c_1\beta q\Lambda}{\gamma}+c_2\beta\right)GZ-4\gamma GM\\&+\left(-4\gamma-\frac{2c_1\beta\sigma(1-q)\Lambda}{\gamma+\mu}+c_2\beta\sigma\right)HZ-4\gamma HM-4\gamma ZM+2(1+c_1)\sigma_1^2\frac{q\Lambda}{\gamma}G\\&+\left(c_2\mu+2(1+c_1)\sigma_1^2\frac{(1-q)\Lambda}{\gamma+\mu}\right)H+\left(c_2\frac{q\Lambda\beta}{\gamma}+c_2\frac{(1-q)\Lambda\beta\sigma}{\gamma+\mu}-c_2\gamma+c_2\mu-c_2\mu\right)Z\end{aligned},$$

$$+\frac{2\sigma_1^2(1-q)\mu\Lambda}{(\gamma+\mu)\gamma}M-2c_1\beta G^2Z-2c_1\beta\sigma H^2Z+(1+c_1)\sigma_1^2\frac{q^2\Lambda^2}{\gamma^2}+(1+c_1)\sigma_1^2\frac{(1-q)^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2}$$
$$+\frac{\sigma_1^2(1-q)^2\mu^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2\gamma^2}$$

根据定理给出的条件可知

$$\mathfrak{R}_0'=\frac{\beta q\Lambda}{\gamma(\gamma+\mu)}+\frac{\beta\sigma\Lambda(1-q)}{(\gamma+\mu)^2}<1,$$

那么

$$\frac{\beta q\Lambda}{\gamma}+\frac{\beta\sigma\Lambda(1-q)}{\gamma+\mu}<\gamma+\mu,$$

因此

$$\frac{\beta q\Lambda}{\gamma}+\frac{\beta\sigma\Lambda(1-q)}{\gamma+\mu}-(\gamma+\mu)<0。$$

利用公式 $ab\le\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ 得到

$$\begin{aligned}LV\le&\left[-2\gamma+(1+c_1)\sigma_1^2-2c_1\gamma\right]G^2+\left[-2\gamma+(1+c_1)\sigma_1^2-2c_1\gamma-2c_1\mu\right]H^2\\&+(-2\gamma+\sigma_1^2)Z^2+(-2\gamma+\sigma_1^2)M^2+\left(-\frac{2c_1\beta q\Lambda}{\gamma}+c_2\beta\right)GZ+(-4\gamma+c_2\beta\sigma)HZ\\&+(1+c_1)\sigma_1^2\left(\frac{q^2\Lambda^2}{\gamma}+G^2\right)+c_2\mu H+2(1+c_1)\sigma_1^2\frac{(1-q)\Lambda}{\gamma+\mu}G+\frac{1}{2}c_2(\mu^2+Z^2)\\&+\sigma_1^2\left[\frac{(1-q)^2\mu^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2\gamma^2}+M^2\right]+(1+c_1)\sigma_1^2\frac{q^2\Lambda^2}{\gamma^2}+(1+c_1)\sigma_1^2\frac{(1-q)^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2}+\frac{\sigma_1^2(1-q)^2\mu^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2\gamma^2}\end{aligned}$$

这里令

$$-\frac{2c_1\beta q\Lambda}{\gamma}+c_2\beta=0,\quad -4\gamma+c_2\beta\sigma=0,$$

那么有

$$c_1=\frac{2\gamma^2}{\beta q\Lambda\sigma}>0,\quad c_2=\frac{4\gamma}{\beta\sigma}>0。$$

所以得到

$$\begin{aligned}LV\le&\left[-2\gamma+(1+c_1)\sigma_1^2-2c_1\gamma\right]G^2+\left[-2\gamma+(1+c_1)\sigma_1^2-2c_1\gamma-2c_1\mu\right]H^2\\&+(-2\gamma+\sigma_1^2)Z^2+(-2\gamma+\sigma_1^2)M^2+(1+c_1)\sigma_1^2\frac{q^2\Lambda^2}{\gamma}+(1+c_1)\sigma_1^2G^2\\&+\frac{1}{2}c_2(\mu^2+H^2)+(1+c_1)\sigma_1^2\frac{(1-q)^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2}+(1+c_1)\sigma_1^2H^2+\frac{1}{2}c_2(\mu^2+Z^2)\\&+\sigma_1^2\left[\frac{(1-q)^2\mu^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2\gamma^2}+M^2\right]+(1+c_1)\sigma_1^2\frac{q^2\Lambda^2}{\gamma^2}+(1+c_1)\sigma_1^2\frac{(1-q)^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2}+\frac{\sigma_1^2(1-q)^2\mu^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2\gamma^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le 2(1+c_1)\sigma_1^2\frac{q^2\Lambda^2}{\gamma^2}+c_2\mu^2+2(1+c_1)\sigma_1^2\frac{(1-q)^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2}+2\frac{\sigma_1^2(1-q)^2\mu^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2\gamma^2}\\
&\quad+\left[-2\gamma+2(1+c_1)\sigma_1^2-2c_1\gamma\right]G^2+\left[-2\gamma+2(1+c_1)\sigma_1^2-2c_1(\gamma+\mu)+2c_2\right]H^2\\
&\quad+\left(-2\gamma+2\sigma_1^2+2c_2\right)Z^2+\left(-2\gamma+2\sigma_1^2\right)M^2
\end{aligned}
$$

令

$$
A=2(1+c_1)\sigma_1^2\frac{q^2\Lambda^2}{\gamma^2}+c_2\mu^2+2(1+c_1)\sigma_1^2\frac{(1-q)^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2}+2\frac{\sigma_1^2(1-q)^2\mu^2\Lambda^2}{(\gamma+\mu)^2\gamma^2},
$$

则

$$
\begin{aligned}
0\le\ & EV(G(0),H(0),Z(0),M(0))+E\int_0^t\left\{A+\left[-2\gamma+2(1-c_1)-2c_1\gamma\right]G^2\right.\\
&\left.+\left[-2\gamma+2(1-c_1)-2c_1(\gamma+\mu)+2c_2\right]H^2+\left[-2\gamma+2\sigma_1^2+2c_2\right]Z^2+\left[-2\gamma+2\sigma_1^2\right]M^2\right\}\mathrm{d}s
\end{aligned},
$$

这里取

$$
B=\min\left\{2\gamma-2(1+c_1)\sigma_1^2+2c_1\gamma,2\gamma-2(1+c_1)\sigma_1^2+2c_1(\gamma+\mu)-2c_2,2\gamma-2\sigma_1^2-2c_2,2\gamma-2\sigma_1^2\right\}
$$

因此

$$
0\le EV\le V(G(0),H(0),Z(0),M(0))-EB\int_0^t\left(G^2+H^2+Z^2+M^2\right)\mathrm{d}s+At,
$$

进而

$$
EB\int_0^t\left(G^2+H^2+Z^2+M^2\right)\mathrm{d}s\le V\left[G(0),H(0),Z(0),M(0)\right]+At,
$$

所以

$$
\frac{1}{t}E\int_0^t\left(G^2+H^2+Z^2+M^2\right)\mathrm{d}s\le\frac{V\left[G(0),H(0),Z(0),M(0)\right]}{Bt}+\frac{A}{B}。
$$

那么

$$
\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\left(G^2+H^2+Z^2+M^2\right)\mathrm{d}s\le\frac{A}{B}。
$$

定理得证。

4. 在正平衡点附近的渐近性态

文献[10]已证明了在确定性方程中的正平衡点 $E_1=\left(S_u^*,S_e^*,I^*,R^*\right)$ 的存在性，并且给出了阈值，证明了高于该阈值的时候，系统(1)的正平衡点是全局渐近稳定的，那么在随机微分方程中，此正平衡点将不满足随机微分方程，那在这点附近是否仍然满足条件使之是渐近稳定的呢？下面证明在一定条件下，系统(2)的解在点 $E_1=\left(S_u^*,S_e^*,I^*,R^*\right)$ 附近的渐近性。

定理 3 若 $\Re_0'=\dfrac{\beta q\Lambda}{\gamma(\gamma+\mu)}+\dfrac{\beta\sigma\Lambda(1-q)}{(\gamma+\mu)^2}>1$ 且满足条件：

1) $4\gamma-\dfrac{b\beta}{2}>0$；

2) $2\gamma-\sigma_1^2>0$；

3) $2\gamma + d\gamma - \sigma_1^2 - \frac{d\sigma_1^2}{2} > 0$

则对于任何给定的初值$\left(S_u(0), S_e(0), I(0), R(0)\right) \in R_+^4$，随机微分方程满足如下性质：

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\int_0^t \left[\left(S_u - \frac{k_1}{2} S_u^*\right)^2 + \left(S_e - k_2 S_e^*\right)^2 + \left(I - k_3 I^*\right)^2 + \left(R - k_4 R^*\right)^2\right] \mathrm{ds} \le \frac{N}{k_5}$$

其中：

$$k_1 = \frac{-8\gamma S_u^* + b\beta S_u^* - 4\gamma S_e^* - 4\gamma R^*}{\left(-4\gamma + \frac{b\beta}{2} + \sigma_1^2\right) S_u^*}, \quad k_2 = \frac{-2\gamma - 2\gamma \frac{S_u^*}{S_e^*}}{-2\gamma + \sigma_1^2}, \quad k_3 = \frac{-4\gamma + \frac{b\beta}{2}}{-4\gamma + \frac{b\beta}{2} + \sigma_1^2},$$

$$k_4 = \frac{-2\gamma - d\gamma - \frac{2\gamma S_u^*}{R^*}}{-2\gamma - d\gamma + \sigma_1^2 + \frac{d\sigma_1^2}{2}}, \quad k_5 = \min\left\{4\gamma - \frac{b\beta}{2}, 2\gamma - \sigma_1^2, 2\gamma + d\gamma - \sigma_1^2 - \frac{d\sigma_1^2}{2}\right\};$$

$$\begin{aligned} N = {} & \frac{k_1^2}{4}\left(4\gamma - \frac{b\beta}{2} - \sigma_1^2\right) S_u^{*2} + \left(2\gamma - \sigma_1^2\right) k_2^2 S_e^{*2} + \left(4\gamma - \frac{b\beta}{2} - \sigma_1^2\right) k_3^2 I^{*2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 b I^* \\ & + \left(2\gamma + d\gamma - \sigma_1^2 - \frac{d\sigma_1^2}{2}\right) k_4^2 R^{*2} \end{aligned}。$$

证明 设

$$\upsilon_1 = \left(S_u - S_u^* + S_e - S_e^* + I - I^* + R - R^*\right)^2, \upsilon_2 = I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}, \upsilon_3 = \frac{1}{2}\left(R - R^*\right)^2,$$

构造李雅普诺夫函数

$$V\left(S_u(t), S_e(t), I(t), R(t)\right) = \upsilon_1 + b\upsilon_2 + d\upsilon_3,$$

由伊藤公式可知：

$$\begin{aligned} L\upsilon_1 = {} & 2\left(S_u - S_u^* + S_e - S_e^* + I - I^* + R - R^*\right)\left(\Lambda - \gamma S_u - \gamma S_e - \gamma I - \gamma R\right) \\ & + \sigma_1^2 S_u^2 + \sigma_1^2 S_e^2 + \sigma_1^2 I^2 + \sigma_1^2 R^2 \\ = {} & -2\gamma\left(S_u - S_u^*\right)^2 - 2\gamma\left(S_e - S_e^*\right)^2 - 2\gamma\left(I - I^*\right)^2 - 2\gamma\left(R - R^*\right)^2 - 4\gamma\left(S_u - S_u^*\right)\left(S_e - S_e^*\right) \\ & - 4\gamma\left(S_u - S_u^*\right)\left(I - I^*\right) - 4\gamma\left(S_u - S_u^*\right)\left(R - R^*\right) - 4\gamma\left(S_e - S_e^*\right)\left(I - I^*\right) \\ & - 4\gamma\left(S_e - S_e^*\right)\left(R - R^*\right) - 4\gamma\left(I - I^*\right)\left(R - R^*\right) + \sigma_1^2 S_u^2 + \sigma_1^2 S_e^2 + \sigma_1^2 I^2 + \sigma_1^2 R^2 \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} L\upsilon_2 & = \left(1 - \frac{I^*}{I}\right)\left(\beta S_u I + \beta\sigma S_e I - \gamma I - \mu I\right) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 I^* \\ & = \left(I - I^*\right)\left(\beta S_u + \beta\sigma S_e - \gamma - \mu\right) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 I^* \\ & = \beta\left(S_u - S_u^*\right)\left(I - I^*\right) + \beta\sigma\left(S_e - S_e^*\right)\left(I - I^*\right) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 I^* \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} L\upsilon_3 & = \left(R - R^*\right)\left(\mu S_e + \mu I - \gamma R\right) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 R^2 \\ & = \mu\left(S_e - S_e^*\right)\left(R - R^*\right) + \mu\left(I - I^*\right)\left(R - R^*\right) - \gamma\left(R - R^*\right)^2 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 R^2 \end{aligned},$$

那么：

$$
\begin{aligned}
LV &= L\upsilon_1 + bL\upsilon_2 + dL\upsilon_3 \\
&= -2\gamma\left(S_u - S_u^*\right)^2 - 2\gamma\left(S_e - S_e^*\right)^2 - 2\gamma\left(I - I^*\right)^2 - 2\gamma\left(R - R^*\right)^2 - 4\gamma\left(S_u - S_u^*\right)\left(S_e - S_e^*\right) \\
&\quad - 4\gamma\left(S_u - S_u^*\right)\left(I - I^*\right) - 4\gamma\left(S_u - S_u^*\right)\left(R - R^*\right) - 4\gamma\left(S_e - S_e^*\right)\left(I - I^*\right) \\
&\quad - 4\gamma\left(S_e - S_e^*\right)\left(R - R^*\right) - 4\gamma\left(I - I^*\right)\left(R - R^*\right) + \sigma_1^2 S_u^2 + \sigma_1^2 S_e^2 + \sigma_1^2 I^2 + \sigma_1^2 R^2 \\
&\quad + b\beta\left(S_u - S_u^*\right)\left(I - I^*\right) + b\beta\sigma\left(S_e - S_e^*\right)\left(I - I^*\right) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 bI^* \\
&\quad + d\mu\left(S_e - S_e^*\right)\left(R - R^*\right) + d\mu\left(I - I^*\right)\left(R - R^*\right) - d\gamma\left(R - R^*\right)^2 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 dR^2
\end{aligned}
\text{。}
$$

由于 σ 表示媒体宣传程度的有效性，我们有 $0 \le \sigma \le 1$，那么可以得到

$$
-4\gamma + b\beta\sigma \le -4\gamma + b\beta \text{ 。}
$$

令

$$
-4\gamma + b\beta\sigma = 0,\ -4\gamma + d\mu = 0\text{，}
$$

得到

$$
d = \frac{4\gamma}{\mu}, b = \frac{4\gamma}{\beta\sigma}\text{，}
$$

那么有

$$
-4\gamma + b\beta > 0,\quad \left(-4\gamma + b\beta\right)\left(S_u - S_u^*\right)\left(I - I^*\right) \le \frac{1}{2}\left(-4\gamma + b\beta\right)\left[\left(S_u - S_u^*\right)^2 + \left(I - I^*\right)^2\right]\text{，}
$$

则

$$
\begin{aligned}
LV &\le -2\gamma\left(S_u - S_u^*\right)^2 - 2\gamma\left(S_e - S_e^*\right)^2 - 2\gamma\left(I - I^*\right)^2 - \left(2\gamma + d\right)\gamma\left(R - R^*\right)^2 + 4\gamma S_u S_e^* + 4\gamma S_u^* S_e \\
&\quad + \frac{-4\gamma + b\beta}{2}\left(S_u - S_u^*\right)^2 + \frac{-4\gamma + b\beta}{2}\left(I - I^*\right)^2 + 4\gamma S_u R^* + 4\gamma S_u^* R + \sigma_1^2 S_u^2 + \sigma_1^2 S_e^2 + \sigma_1^2 I^2 \\
&\quad + \sigma_1^2 R^2 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 bI^* + \frac{1}{2}\sigma_1^2 dR^2
\end{aligned}
\text{。}
$$

整理后得到

$$
\begin{aligned}
LV &\le -\left(4\gamma - \frac{b\beta}{2} - \sigma_1^2\right)\left(S_u - \frac{k_1}{2}S_u^*\right)^2 + \left(-4\gamma + \frac{b\beta}{2}\right)S_u^{*2} + \frac{k_1^2}{4}\left(4\gamma - \frac{b\beta}{2} - \sigma_1^2\right)S_u^{*2} \\
&\quad - \left(2\gamma - \sigma_1^2\right)\left(S_e - k_2 S_e^*\right)^2 + \left(2\gamma - \sigma_1^2\right)k_2^2 S_e^{*2} - 2\gamma S_e^{*2} - \left(4\gamma - \frac{b\beta}{2} - \sigma_1^2\right)\left(I - k_3 I^*\right)^2 \\
&\quad + \left(4\gamma - \frac{b\beta}{2} - \sigma_1^2\right)k_3^2 I^{*2} + \left(-4\gamma + \frac{b\beta}{2}\right)I^{*2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 bI^* - \left(2\gamma + d\gamma - \sigma_1^2 - \frac{d\sigma_1^2}{2}\right)\left(R - k_4 R^*\right)^2 \\
&\quad + \left(2\gamma + d\gamma - \sigma_1^2 - \frac{d\sigma_1^2}{2}\right)k_4^2 R^{*2} - \left(2\gamma + d\gamma\right)R^{*2}
\end{aligned}
\text{，}
$$

这里取

$$
k_1 = \frac{-8\gamma S_u^* + b\beta S_u^* - 4\gamma S_e^* - 4\gamma R^*}{\left(-4\gamma + \frac{b\beta}{2} + \sigma_1^2\right)S_u^*}\text{，}\ k_2 = \frac{-2\gamma - 2\gamma\frac{S_u^*}{S_e^*}}{-2\gamma + \sigma_1^2}\text{，}\ k_3 = \frac{-4\gamma + \frac{b\beta}{2}}{-4\gamma + \frac{b\beta}{2} + \sigma_1^2}\text{，}\ k_4 = \frac{-2\gamma - d\gamma - \frac{2\gamma S_u^*}{R^*}}{-2\gamma - d\gamma + \sigma_1^2 + \frac{d\sigma_1^2}{2}}\text{。}
$$

由于

$$4\gamma-\frac{b\beta}{2}\geq 4\gamma-\frac{b\beta}{2}-\sigma_1^2>0,$$

所以

$$-\left(4\gamma-\frac{b\beta}{2}\right)<0,$$

那么就有

$$\begin{aligned}LV\leq&-\left(4\gamma-\frac{b\beta}{2}-\sigma_1^2\right)\left(S_u-\frac{k_1}{2}S_u^*\right)^2+\frac{k_1^2}{4}\left(4\gamma-\frac{b\beta}{2}-\sigma_1^2\right)S_u^2-\left(2\gamma-\sigma_1^2\right)\left(S_e-k_2S_e^*\right)^2\\&+\left(2\gamma-\sigma_1^2\right)k_2^2S_e^{*2}-\left(4\gamma-\frac{b\beta}{2}-\sigma_1^2\right)\left(I-k_3I^*\right)^2+\left(4\gamma-\frac{b\beta}{2}-\sigma_1^2\right)k_3^2I^{*2}+\frac{1}{2}\sigma_1^2bI^*\\&-\left(2\gamma+d\gamma-\sigma_1^2-\frac{d\sigma_1^2}{2}\right)\left(R-k_4R^*\right)^2+\left(2\gamma+d\gamma-\sigma_1^2-\frac{d\sigma_1^2}{2}\right)k_4^2R^{*2}\end{aligned}\text{。}$$

令

$$\begin{aligned}N=&\frac{k_1^2}{4}\left(4\gamma-\frac{b\beta}{2}-\sigma_1^2\right)S_u^{*2}+\left(2\gamma-\sigma_1^2\right)k_2^2S_e^{*2}+\left(4\gamma-\frac{b\beta}{2}-\sigma_1^2\right)k_3^2I^{*2}+\frac{1}{2}\sigma_1^2bI^*\\&+\left(2\gamma+d\gamma-\sigma_1^2-\frac{d\sigma_1^2}{2}\right)k_4^2R^{*2}\end{aligned},$$

取

$$k_5=\min\left\{4\gamma-\frac{b\beta}{2},2\gamma-\sigma_1^2,2\gamma+d\gamma-\sigma_1^2-\frac{d\sigma_1^2}{2}\right\},$$

得到

$$LV\leq-k_5\left[\left(S_u-\frac{k_1}{2}S_u^*\right)^2+\left(S_e-k_2S_e^*\right)^2+\left(I-k_3I^*\right)^2+\left(R-k_4R^*\right)^2\right]+N,$$

进而可以有

$$\begin{aligned}0&\leq EV\left(S_u,S_e,I,R\right)=V_0+E\int_0^tLV\left(S_u(s),S_e(s),I(s),R(s)\right)\mathrm{d}s\\&\leq V_0-k_5E\int_0^t\left[\left(S_u-\frac{k_1}{2}S_u^*\right)^2+\left(S_e-k_2S_e^*\right)^2+\left(I-k_3I^*\right)^2+\left(R-k_4R^*\right)^2\right]\mathrm{d}s+Nt\end{aligned},$$

整理后得

$$E\int_0^t\left[\left(S_u-\frac{k_1}{2}S_u^*\right)^2+\left(S_e-k_2S_e^*\right)^2+\left(I-k_3I^*\right)^2+\left(R-k_4R^*\right)^2\right]\mathrm{d}s\leq\frac{V_0+Nt}{k_5}\text{。}$$

因此

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\left[\left(S_u-\frac{k_1}{2}S_u^*\right)^2+\left(S_e-k_2S_e^*\right)^2+\left(I-k_3I^*\right)^2+\left(R-k_4R^*\right)^2\right]\mathrm{d}s\leq\frac{N}{k_5}\text{。}$$

定理得证。

5. 小结

本文介绍的是官方媒体影响下的随机谣言传播模型。在受官方媒体影响下的确定性谣言传播模型中，存在影响因子γ，受时间推移、社会认知等因素而使得模型中的四类人以γ比例的数量离开系统，其中文中仍然将影响因子γ作为固定的数值，但实际上影响因子很容易受到环境的改变而发生变化，因此用某个常数值来代替影响因子将不再适用于现实环境，于是本章建立新的随机微分方程，将影响因子考虑环境噪声的影响，即$\gamma \to \gamma + \sigma \dot{B}(t)$，然后分析其动力学行为。由于确定性模型的平衡点不在满足随机微分方程，但这类平衡点在系统(2)中的性质仍值得研究。最后发现，当满足三点要求时，即 1) $\Re_0' < 1$，2) $(1+c_1)\sigma_1^2 < c_1(\gamma+\mu)+\gamma$；3) $2\sigma_1^2 + \frac{1}{2} < 2\gamma$ 其中 $c_1 = \frac{2\gamma^2}{\beta q \Lambda \sigma} > 0$ 时，系统(2)的解在无谣言传播点附近是渐近稳定的。相比与确定性模型得到的条件时，即当$\sigma_1 \neq 0$，随机模型还需要满足(2)、(3)两点，这两点是对白噪声的限制，因此控制白噪声σ_1的大小能够限制谣言传播的水平，甚至消失。当$\sigma_1 = 0$时，此时没有白噪声的影响，与确定性模型结论保持一致。在讨论正平衡点附近的渐近性态时，本章发现，当满足以下四点条件，即 1) $\Re_0' > 1$；2) $4\gamma - \frac{b\beta}{2} > 0$；3) $2\gamma - \sigma_1^2 > 0$；4) $2\gamma + d\gamma - \sigma_1^2 - \frac{d\sigma_1^2}{2} > 0$时，系统(2)的解在正平衡点是渐近稳定的，这说明相比于确定性模型的结论，随机模型增加了白噪声的影响，就需要满足另外的三个条件使得谣言传播在一个稳定的值附近波动。若没有白噪声的影响，就没有对σ_1的限制，则与确定性模型的结论保持一致。

参考文献

[1] Daley, D.J. and Kendall, D.G. (1965) Stochastic Rumours. *IMA Journal of Applied Mathematics*, **1**, 42-55. https://doi.org/10.1093/imamat/1.1.42

[2] Makidp, T. (1973) Mathematical Models and Applications. Prentice-Hall, New Jersey.

[3] Zanette, D.H. (2001) Critical Behavior of Propagation on Small-World Networks. *Physical review E*, **64**, 050901. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.050901

[4] Zhao, L.J., Wang, J.J., Chen, Y.C., *et al.* (2012) SIHR Rumor Spresding Model in Social Networks. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **391**, 2444-2453. https://doi.org/10.1016/j.physa.2011.12.008

[5] Zhu, L. and Wang, Y.G. (2017) Rumor Spreading Model with Noise Interference in Complex Social Networks. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **469**, 750-760. https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.11.119

[6] Liu, Q.M., Li, T. and Sun, M.C. (2017) The Analysis of an SEIR Rumor Propagation Model on Heterogeneous Network. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **469**, 372-380. https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.11.067

[7] 陈安，王子君，陈樱花. 基于 SEIR 模型视角的重大公共卫生事件中伪科学网络谣言的传播治理：以新冠肺炎疫情为例[J]. 科学导报, 2020, 38(4): 55-65.

[8] 宋雪，武力兵. 一类带有媒体效应的谣言传播模型稳定性分析[J]. 辽宁科技大学学报, 2020, 43(4): 315-320.

[9] 陈华. 一类具有媒体播报效应的谣言传播模型的定性分析[J]. 先科技大学学报, 2016, 36(2): 255-264.

[10] 赵敏，陈文霞. 基于微分方程的谣言传播模型建立与分析[J]. 四川师范大学学报, 2019, 42(5): 626-632.