

对“水仙花数”的研究

张少华, 秦 进

遵义师范学院数学学院, 贵州 遵义
Email: 1136302910@qq.com

收稿日期: 2020年11月16日; 录用日期: 2020年12月1日; 发布日期: 2020年12月8日

摘 要

寻找“水仙花数”, 使用实验方法, 用MATLAB软件编程进行实验, 得到了计算“水仙花数”的3种方法。对“水仙花数”的个数是有限的的问题, 用特殊值法、图解法、方程法、数学归纳法等4种方法进行了论证。对存在水仙花数的自然数位数, 用MATLAB编程实验, 将上界由 $n \leq 60$ 降至 $n \leq 42$ 。

关键词

水仙花数, 研究, MATLAB代码, 计算方法

Study on the “Narcissistic Number”

Shaohua Zhang, Jin Qin

School Mathematics, Zunyi Normal University, Zunyi Guizhou
Email: 1136302910@qq.com

Received: Nov. 16th, 2020; accepted: Dec. 1st, 2020; published: Dec. 8th, 2020

Abstract

In order to find the “Narcissistic Number” in the natural numbers, three methods of calculating the “Narcissistic Number” are obtained by using the experimental method and MATLAB programming. The number of the “Narcissistic Number” is limited. It is demonstrated by four methods: special value method, graphic method, equation method and mathematical induction method. The digits of natural numbers contain the “Narcissistic number” that is experimented with MATLAB programming, and the upper bound is reduced from 60-digits to 42-digits.

Keywords

The Narcissistic Number, Study, MATLAB Code, Method of Calculation



1. 绪论

一个 n 位自然数, 它的每个数码的 n 次幂之和恰好等于这个数, 称这样的数为水仙花数。

当 $n=1$ 时, 0 至 9 这十个数全是水仙花数。

当 $n=2$ 时, 两位自然数中没有水仙花数。事实上, 假设两位自然数中有水仙花数, 且设十位数为 x , 个位数为 y , 则 $x^2 + y^2 = 10x + y$, 故 $x^2 - 10x = -y^2 + y$ 。由于 x 、 y 的取值范围是相同的, 因此, 不仿设 $y_1 = x^2 - 10x$, $y_2 = -x^2 + x$ 。下面, 用 matlab 编程来求解。

```
clear all;
clc;
clf;
x=0:1:9;
y1=x.^2-10.*x;
y2=-x.^2+x;
plot(x,y1)
hold on;
plot(x,y2)
xlabel('x');
ylabel('y');
```

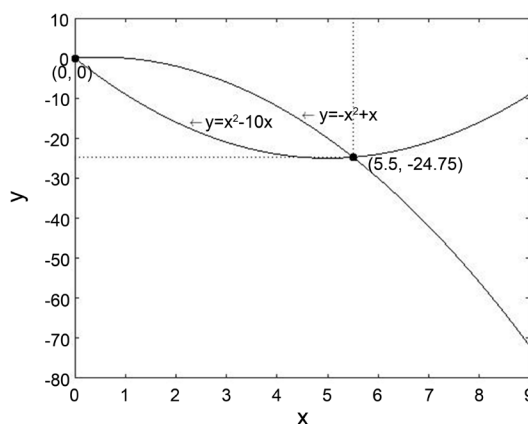


Figure 1. The diagram of graphic method

图1. 图解法示意图

由图1可知, 两曲线有两个交点 $(0, 0)$, $(5.5, -24.75)$, 因此, 满足方程 $x^2 + y^2 = 10x + y$ 的十位数 x 、个位数 y 不存在。故两位自然数中没有水仙花数。

当 $n=3$ 时, 有四个[1]: $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$; $370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$; $371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$; $407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$ 。

当 $n=4$ 时, 有三个: $1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$; $8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$; $9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$ 。

依此类推, 一般地, 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 则存在 $M \in \mathbb{N}$, $M = \overline{m_1 m_2 m_3 \cdots m_n}$, 使得

$$m_1^n + m_2^n + m_3^n + \cdots + m_{n-1}^n + m_n^n = 10^{n-1}m_1 + 10^{n-2}m_2 + 10^{n-3}m_3 + \cdots + 10m_{n-1} + m_n。$$

用 matlab 探索水仙花数, 文献[2]提供了探索 3 位自然数中的水仙花数的 matlab 代码。文献[3]提供了一个 matlab 穷举法代码, 自动化程度不高。但可以用于验证其他方法算出的水仙花数。这个方法, 一般 PC 机都能验证至 16 位数左右。

2. 水仙花数计算方法

2.1. 计算水仙花数的方法一

对文[2]的方法进行改进, 对输入的 n 位自然数分别除以 10 的 $n-1$ 至 0 次幂, 余数[4] [5]取整得输入的自然数的各个数码, 然后判断各个数码的 n 次幂是否等于输入的自然数, 从而计算出水仙花数。因此, 编制出如下 matlab 代码:

```
%求水仙花数matlab代码1.
clear all;
clc;
n=input('n='); %输入自然数的位数.
for m=10^(n-1):10^n-1 %输入位数相同的自然数.
    m1=rem(fix(m/10^(n-1)),10); %确定自然数的首位数码.
    m2=rem(fix(m/10^(n-2)),10); %确定自然数的第二位数码, 以下类推.
    m3=rem(fix(m/10^(n-3)),10);
    m4=rem(fix(m/10^(n-4)),10);
    m5=rem(fix(m/10^(n-5)),10);
    m6=rem(fix(m/10^(n-6)),10);
    m7=rem(fix(m/10^(n-7)),10);
    m8=rem(fix(m/10^(n-8)),10);
    m9=rem(fix(m/10^(n-9)),10);
    if (m1)^n+(m2)^n+(m3)^n+(m4)^n+
    (m5)^n+(m6)^n+(m7)^n+(m8)^n+(m9)^n
    ==m %判断水仙花数
        disp(m) %列出水仙花数.
    end
end
```

这组代码, 能计算出 1 至 9 位自然数中的水仙花数。如果计算机内存大, 精度高[6], 将这组代码作适当扩展, 可以探索更多位数的自然数中的水仙花数。不足之处是, 判断水仙花数的式子太长。

2.2. 计算水仙花数的方法二

步骤如下: 第一步, 输入自然数 m 的位数 n 。第二步, 分离 n 位自然数 m 的各个数码。第三步, 判断输入的 n 位自然数 m 是否为水仙花数。若是, 则输出水仙花数。否则, 返回继续搜索, 直到计算出所有的水仙花数。

```
%求水仙花数 matlab 代码 2.
clear all;
clc;
```

```

n=input('n='); %输入自然数m的位数n.
for m=10^(n-1):10^n-1 % 输入自然数m.
    x=num2str(m)-'0'; %分离自然数m的各位数码.
    if sum(x.^n)==m %判断一个自然数是否为水仙花数.
        disp(m) %输出水仙花数.
    end
end
end

```

如果计算机内存足够大, 精度足够高, 这个代码可以探索任意位数的自然数中的水仙花数。但是, 随着位数的增加, 计算用时也随着增加[7]。

2.3. 计算水仙花数的方法三

步骤如下: 第一步, 输入自然数 m 的位数 n 。第二步, 确定搜索自然数 m 的0至9这10个数码的个数的终止值(通过实验估计, 取 $k = \text{fix}((n+2)/3)$), 以加快搜索速度。第三步, 依次计算数码0至9的个数。第四步, 若数码0至9的个数之和为 n 时, 则计算各数码个数分别与其对应数码的 n 次幂之积的和。第五步, 判断第四步所求出的和是否是 n 位自然数。(这样, 可筛掉许多无关的数, 提高了计算速度。)若是, 分离其各个数码。第六步, 判断这个 n 位自然数是否为水仙花数。若是, 则输出水仙花数。否则, 返回继续搜索, 直到找出所有的水仙花数。

%求水仙花数matlab代码3.

```
clear all;
```

```
clc;
```

```
n=input('n='); %输入自然数m的位数n.
```

```
k=fix((n+2)/3); %确定搜索自然数m的0至9这10个数码的个数的终止值, 加快搜索速度.
```

```
for o=0:k %搜索n位自然数m中数码0的个数.
```

```
for p=0:k %搜索n位自然数m中数码1的个数.
```

```
for q=0:k %搜索n位自然数m中数码2的个数.以下依此类推.
```

```
for r=0:k
```

```
for s=0:k
```

```
for t=0:k
```

```
for u=0:k
```

```
for v=0:k
```

```
for w=0:k
```

```
for x=0:k %搜索n位自然数m中数码9的个数.
```

```
if o+p+q+r+s+t+u+v+w+x==n %0至9这10个数码的个数的和.
```

```
m=o*0^n+p*1^n+q*2^n+r*3^n+s*4^n+t*5^n+u*6^n+v*7^n+w*8^n+x*9^n; %0至9这10个数码的n次幂的和.
```

```
if m<=10^n-1 & m>=10^(n-1) %n位自然数的范围.
```

```
y=int2str(m)-'0'; %分离自然数m的各位数码.
```

```
if sum(y.^n)==m %自然数m为水仙花数.
```

```
disp(m) %输出水仙花数.
```

```
end
```

end
end
end
end
end
end
end
end
end
end
end
end

如果计算机内存足够大, 精度足够高, 这个代码可以探索任意位数的自然数中的水仙花数, 而且计算速度快。

3. 对水仙花数的个数有限问题的探究

现在有一个问题, 自然数中的水仙花数的个数是有限的呢, 还是无限的? 就来看下面的问题: 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 当 n 为何值时, 有 $n \cdot 9^n < 10^{n-1}$ 成立[8] [9]。

3.1. 特殊值法

事实上, 对 $n \cdot 9^n < 10^{n-1}$ 两边取自然对数, 得 $\ln(10n) < n \ln(10/9)$ 。当 $n = 60$ 时, $\ln(10 \cdot 60) = 6.3969$, $60 \ln(10/9) = 6.3216$, 即有 $60 \cdot 9^{60} > 10^{60-1}$; 当 $n = 61$ 时, $\ln(10 \cdot 61) = 6.4135$, $61 \ln(10/9) = 6.4270$, 即有 $61 \cdot 9^{61} < 10^{61-1}$ 。

3.2. 图解法

现在将离散问题变为连续函数来处理。由 $n \cdot 9^n < 10^{n-1}$, 可得 $10 \cdot n < (10/9)^n$, 将离散问题连续化, 得 $10 \cdot x < (10/9)^x$, $x \geq 1$ 。

解方程组 $\begin{cases} y = 10x \\ y = (10/9)^x \end{cases}$ 得 $(60.8479, 608.479)$ 。如图 2 所示。

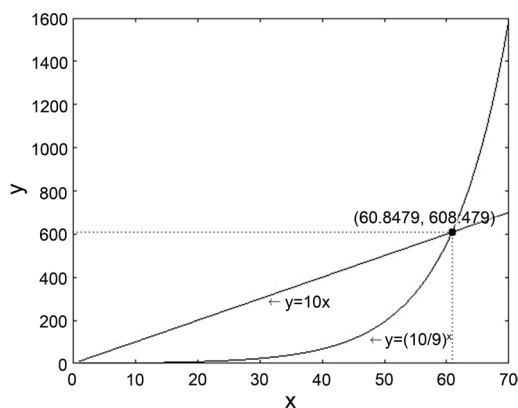


Figure 2. The graph of the equations
图2. 方程组曲线图

%水仙花数图解法matlab代码.

clear all;

clf;

x=-20:0.1:70;

y1=10*x;

plot(x,y1)

hold on;

y2=exp(x*log(10/9));

plot(x,y2)

xlabel('x');

ylabel('y');

3.3. 用 matlab 解方程

Matlab 代码为: $z=fzero('10*x-exp(x*log(10/9))',[50,70])$ $x = 60.8479$ 。

因此, 当自然数的位数 $n > 60$ 时, 就不存在水仙花数了。

3.4. 数学归纳法

将不等式 $n \cdot 9^n < 10^{n-1}$ 等价变形为 $10 \cdot n < (10/9)^n$ 。

1) 当 $n = 61$ 时, 有 $10 \cdot 61 < (10/9)^{61}$ ($(10/9)^{61} \approx 618.3109$) 成立。2) 假设当 $n = k$ ($k \geq 61$) 时, 有 $10 \cdot k < (10/9)^k$ 成立, 那么, 当 $n = k + 1$ 时,

$(10/9)^{k+1} = (10/9)^k \cdot 10/9 > (10k)10/9 = 10(k+1) + (k-9)10/9 > 10(k+1)$ (因为 $k \geq 61$ 时, 有 $(k-9)10/9 > 0$)。即有 $10(k+1) < (10/9)^{k+1}$ 成立。由(1)(2)可知, 当 $n \geq 61$, 且 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, 不等式 $10 \cdot n < (10/9)^n$ 成立, 亦即 $n \cdot 9^n < 10^{n-1}$ 成立。

综上所述, 当自然数的位数 $n > 60$ 时, 就不存在水仙花数了。因为这时, 每个数码的幂指数为位数的幂之和就小于这个数了。

4. 对水仙花数的自然数位数的探究

水仙花数的个数是有限的, 存在水仙花数的自然数的位数 $n \leq 60$ 。国防科技大学刘江宁教授用计算机算出水仙花数一共有 88 个, 其中最大的水仙花数为两个 39 位的自然数[8]。

经过对系列位数较大的水仙花数各个数码的个数的分析, 对存在水仙花数的自然数的位数的上界用 matlab 编程进行探究, 可进一步降低存在水仙花数的自然数的位数的上界。

4.1. 第一次降界

对于两个 39 位的水仙花数, 数码 9 都出现了 7 次, 数码 8 都出现了 1 次, 数码 7 都出现了 4 次, ……
表 1 列出了 29 至 39 位数的水仙花数的各个数码的个数。

水仙花数各个数码的个数之和等于位数 n 。假设 n 位水仙花数的数码 9、8、7 三个数码各有 $n/3$ 个, 那么, 当 n 为何值时, 有 $\frac{n}{3}(9^n + 8^n + 7^n) < 10^{n-1}$, 即 $9^n + 8^n + 7^n < \frac{3}{10n}10^n$ 成立?

事实上, 当 $n = 49$ 时, $9^{49} + 8^{49} + 7^{49} = 5.7443e + 46$, $3/10/49 \cdot 10^{49} = 6.1224e + 46$ 。即有

$$9^{49} + 8^{49} + 7^{49} < \frac{3}{10 \cdot 49} 10^{49} \text{ 成立。}$$

用 matlab 编程求解, $z=fzero('9^x+8^x+7^x-3/10/x*10^x',[40,50])$ $x = 48.2515$ 。
因此, 当自然数的位数 $n > 48$ 时, 就不存在水仙花数了。

Table 1. 29-39 digit narcissus number, number of digital appearance data

表 1. 29-39 位水仙花数各位数码出现次数数据

数码	39 ₁	39 ₂	38	37	35 ₁	35 ₂	34	33 ₁	33 ₂	32	31 ₁	31 ₂	31 ₃	29 ₁	29 ₂	29 ₃	29 ₄
0	4	3	4	3	2	4	3	6	7	3	3	4	5	2	3	4	4
1	6	7	3	7	2	4	3	6	5	2	2	3	3	1	5	4	4
2	5	5	4	4	6	4	9	1	1	5	3	5	3	3	3	2	3
3	3	3	2	3	3	5	4	3	3	5	3	2	4	5	2	2	2
4	1	1	1	2	1	2	2	1	1	1	2	4	0	1	4	3	4
5	6	6	6	3	3	1	4	1	1	2	2	5	3	4	2	0	2
6	2	2	4	6	4	2	1	4	4	1	6	2	4	4	1	4	1
7	4	4	5	2	5	5	2	3	3	6	3	3	1	2	4	4	4
8	1	1	2	1	4	3	2	2	2	2	2	0	2	2	1	3	1
9	7	7	7	6	5	5	4	6	6	5	5	3	6	5	4	3	4

4.2. 第二次降界

如果假设 n 位水仙花数的数码 9、8、7、6 四个数码各有 $n/4$ 个, 那么, 当 n 为何值时, 有 $\frac{n}{4}(9^n + 8^n + 7^n + 6^n) < 10^{n-1}$, 即 $9^n + 8^n + 7^n + 6^n < \frac{2}{5n}10^n$ 成立?

事实上, 当 $n = 45$ 时, $9^{45} + 8^{45} + 7^{45} + 6^{45} = 8.7716e + 42$, $2/5/45 \cdot 10^{45} = 8.8889e + 42$ 。

即有 $9^{45} + 8^{45} + 7^{45} + 6^{45} < \frac{2}{5 \cdot 45}10^{45}$ 成立。

用 matlab 编程, $z=fzero('9^x+8^x+7^x+6^x-2/5/x*10^x',[40,50])$ $x = 44.8413$ 。

故当自然数的位数 $n > 44$ 时, 就不存在水仙花数了。

4.3. 第三次降界

如果假设 n 位水仙花数的数码 9、8、7、6、5 五个数码各有 $n/5$ 个, 那么, 当 n 为何值时, 有 $\frac{n}{5}(9^n + 8^n + 7^n + 6^n + 5^n) < 10^{n-1}$, 即 $9^n + 8^n + 7^n + 6^n + 5^n < \frac{1}{2n}10^n$ 成立?

事实上, 当 $n = 43$ 时, $9^{43} + 8^{43} + 7^{43} + 6^{43} + 5^{43} = 1.0844e + 41$, $1/2/43 \cdot 10^{43} = 1.1628e + 41$ 。

即有 $9^{43} + 8^{43} + 7^{43} + 6^{43} + 5^{43} < 1/2/43 \cdot 10^{43}$ 成立。

用 matlab 编程, $z=fzero('9^x+8^x+7^x+6^x+5^x-1/2/x*10^x',[40,50])$ $x = 42.1551$ 。

综上所述, 当自然数的位数 $n > 42$ 时, 就不存在水仙花数了。换句话说, 当自然数的位数 $n \leq 42$ 时, 才有可能存在水仙花数。

5. 结语

经过探讨, 一是获得了用 matlab 计算水仙花数的 3 种方法; 二是对存在水仙花数的自然数位数 $n \leq 60$ 的问题, 用 4 种方法进行了证明; 三是将存在水仙花数的自然数的位数的上界 $n \leq 60$ 经过 3 次降界, 降至 $n \leq 42$ 。进一步研究的问题, 一是如何将存在水仙花数的自然数的位数的上界降至 $n \leq 39$; 二是水仙花数在有关学科中的应用。

致 谢

感谢中国国家自然科学基金、贵州省自然科学基金的支持。对文中引用参考文献的作者表示衷心感谢!

基金项目

1) 国家自然科学基金项目(11661084); 2) 贵州省自然科学基金项目(黔科合 LH 字[2015]7042 号)。

参考文献

- [1] 谈祥柏. 数: 上帝的宠物[M]. 上海: 上海教育出版社, 1996.
- [2] 刘卫国. MATLAB 程序设计与应用[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 65-66.
- [3] 心向阳光. 判断阿姆斯特朗数_matlab 函数[EB/OL].
<https://blog.csdn.net/lv414333532/article/details/82946316>, 2019-05-09.
- [4] Chen, F.J. (2018) On the Diophantine Equation $(na)^x + (nb)^y = (nc)^z$. *Advances in Mathematics*, **47**, 388-392.
- [5] Shen, Z.Y. and Cai, T.X. (2018) Congruences Involving Permutation. *Advances in Mathematics*, **47**, 649-658.
- [6] 连自建. 协同过滤算法中一种改进相似度度的方法[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 404-413.
- [7] 赵会群, 孙雨. 分支语句重构算法的研究与应用[J]. 计算机工程与应用, 2018, 54(6): 30-36.
- [8] 林宣治. 水仙花数的计算机解法[J]. 临沂师范学院学报, 2002, 24(6): 18-20.
- [9] 卫洪春. 高位水仙花数快速求解算法[J]. 计算机与现代化, 2015(6): 78-81.