Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(12), 2256-2262
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.912263

基于方向导数的非线性资产投资模型解的性质

孔凡亮，陈　星，徐加波

新疆工程学院 数理学院，新疆 乌鲁木齐
Email: 616564513@qq.com

收稿日期：2020年11月21日；录用日期：2020年12月22日；发布日期：2020年12月29日

摘　要

研究了基于方向导数的非线性资产投资模型，该模型为含有非线性和非局部边界条件的系统。考虑了依赖资产总量的折旧率函数，运用泛函分析和积分方程的理论，证明了系统解的存在唯一性。

关键词

方向导数，资产总量，积分方程

A Nonlinear Asset Investment Model Based on Directional Derivatives and the Properties of Its Solutions

Fanliang Kong, Xing Chen, Jiabo Xu

School of Mathematics and Physics, Xinjiang Institute of Engineering, Urumqi Xinjiang
Email: 616564513@qq.com

Received: Nov. 21st, 2020; accepted: Dec. 22nd, 2020; published: Dec. 29th, 2020

Abstract

This paper discusses a nonlinear asset investment model based on directional derivative, the model is a system with nonlinear and non-local boundary conditions. We consider the depreciation rate function that depends on the total assets, applying the theory of functional analysis and integral equation, we obtain the existence and uniqueness of the system solutions.

Keywords

Directional Derivative, The Total Assets, Integral Equation

文章引用: 孔凡亮, 陈星, 徐加波. 基于方向导数的非线性资产投资模型解的性质[J]. 应用数学进展, 2020, 9(12): 2256-2262. DOI: 10.12677/aam.2020.912263

1. 引言

经济系统的定量研究，无论在理论上还是应用中都有着重要意义。长期以来，这一领域的经济学家和自然科学家密切合作，大大推动了数量经济研究的进展，先后产生了数理经济学、经济计量学、经济控制论等理论。经济系统是一个不断演化着的复杂系统。许多学者运用系统科学的理论和思想对此进行了研究，并已取得了一些成果[1]-[8]，由于经济系统从功能上最终归结为生产和消费，因此从这个意义上讲，可以将经济系统看作为生灭过程，生灭过程在客观世界中广泛存在，如生物种群的繁衍等，对这类过程的研究也已取得了大量的成果[9]-[12]，从而也为经济系统的研究提供了思路，本文在已有模型的基础上，考虑依赖资产总量的资本折旧率函数的投资控制模型，其模型如下：

$$\begin{cases} Du(r,t)+\mu(r,t,U(t))u(r,t)=g(r,t), & (r,t)\in Q_T, \\ u(r,0)=u_0(r), & r\in(0,a_m), \\ u(0,t)=\varphi(t)=r(t)A(t)L^{\beta}(t)\left[\int_0^{a_m}u(r,t)\mathrm{d}r\right]^{\alpha}, & t\in(0,T), \\ U(t)=\int_0^{a_m}u(r,t)\mathrm{d}r, & t\in(0,T) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $Q_T=(0,a_m)\times(0,T)$， $a_m,T\in(0,+\infty)$， $Du(r,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\dfrac{u(r+\varepsilon,t+\varepsilon)-u(r,t)}{\varepsilon}$

$u(r,t)$——t 时刻资产存量按役龄的分布密度函数；

$U(t)$——t 时刻资产总量；

$\mu(r,t,U(t))$——t 时刻依赖资产总量按役龄的相对折旧率；

$g(r,t)$——t 时刻由进出口差额形成的资产按役龄分布密度函数；

$u_0(r)$——初始时刻资产按役龄的分布密度函数；

$\varphi(t)$——t 时刻新增资产；

$r(t)$——t 时刻生产性积累率；

$A(t)$——t 时刻综合要素生产率；

$L(t)$——t 时刻劳动力函数；

α——资产弹性系数；

β——劳动力弹性系数。

2. 模型的求解

为方便讨论，令 $\Gamma(t)=r(t)A(t)L^{\beta}(t)$ 这里本文作如下假设：

(H1)对任意 $(r,t,U)\in Q_T\times(0,+\infty)$， $\mu(r,t,U)\ge0$；对固定 U， $\mu\in L^1_{loc}([0,a_m)\times[0,T])$， $\int_0^{a_m}\mu(r,t-a_m+r,U)\mathrm{d}r=+\infty$， μ 关于 U 局部 Lipschitz 连续，即对任意 $M>0$，存在 $L(M)$，满足：$|\mu(r,t,U_1)-\mu(r,t,U_2)|\le L(M)\cdot|U_1-U_2|$，对任意的 $U_1,U_2\in[0,M]$。

(H2) $\Gamma(t)\in L^{\infty}(0,T)$，且存在常数 $\Gamma>0$，满足 $0\le\Gamma(t)\le\Gamma$，几乎处处成立；

(H3) $u_0(r)\in L^1(0,a_m)$，且存在$\eta,\delta,T_\delta>0$，当$0\le t\le T_\delta$时，有$\int_0^{a_m-t-\delta}u_0(r)\mathrm{d}r\ge\eta_1$，$u_0(r)\ge 0$，几乎处处成立；

(H4) $g(r,t)\in L^1(Q_T)$，$\|g\|_{L^1(Q_{T_\delta})}\ge\eta_2$，$Q_{T_\delta}=(0,a_m-\delta)\times(0,T_\delta)$，$g(r,t)\ge 0$，几乎处处成立。

定义 2.1 所谓系统(1)的解是指函数$u(r,t)\in L^\infty\left(0,T;L^1(0,a_m)\right)$，沿着每条特征线($r-t=k,(r,t)\in\overline{Q_T},k\in R$)绝对连续，满足：

$$\begin{cases}Du(r,t)+\mu(r,t,U(t))u(r,t)=g(r,t), & a.e.\ (r,t)\in Q_T,\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}u(r+\varepsilon,\varepsilon)=u_0(r), & a.e.\ r\in(0,a_m),\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}u(\varepsilon,t+\varepsilon)=\varphi(t)=\Gamma(t)\left[\int_0^{a_m}u(r,t)\mathrm{d}r\right]^\alpha, & a.e.\ t\in(0,T),\\ U(t)=\int_0^{a_m}u(r,t)\mathrm{d}r, & a.e.\ t\in(0,T).\end{cases}\tag{2}$$

其中，$Du(r,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{u(r+\varepsilon,t+\varepsilon)-u(r,t)}{\varepsilon}$

第一步：固定函数$U\in L^\infty(0,T),U(t)\ge 0\ a.e.\,t\in(0,T)$，应用特征线法可将系统(1)的解表示为：

$$u(r,t;U)=\begin{cases}u_0(r-t)E(r,t,t;U)+\int_0^t g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{ds}, & r\ge t,\\ \varphi(t-r;U)E(r,t,r;U)+\int_0^r g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{ds}, & r<t\end{cases}\tag{3}$$

其中：

$$E(r,t,s;U)=\exp\left\{-\int_0^s\mu(r-\tau,t-\tau,U(t-\tau))\mathrm{d}\tau\right\}$$

$$\begin{aligned}\varphi(t;U)=\Gamma(t)\Big[&\int_0^t\varphi(t-r;U)E(r,t,r;U)\mathrm{d}r+\int_0^t\int_0^r g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{dsdr}\\&+\int_t^{a_m}u_0(r-t)E(r,t,t;U)\mathrm{d}r+\int_t^{a_m}\int_0^t g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{dsdr}\Big]^\alpha\end{aligned}$$

对上式做变量替换得：

$$\begin{aligned}\varphi(t;U)=\Gamma(t)\Big[&\int_0^t\varphi(r;U)E(t-r,t,t-r;U)\mathrm{d}r+\int_0^t\int_0^r g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{dsdr}\\&+\int_0^{a_m-t}u_0(r)E(t+r,t,t;U)\mathrm{d}r+\int_t^{a_m}\int_0^t g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{dsdr}\Big]^\alpha\end{aligned}$$

令$\phi(t;U)=\left(\dfrac{\varphi(t;U)}{\Gamma(t)}\right)^{1/\alpha}$，则$\varphi(t;U)=\phi^\alpha(t;U)\Gamma(t)$，从而上式变为：

$$\begin{aligned}\phi(t;U)=&\int_0^t\Gamma(r)\phi^\alpha(r;U)E(t-r,t,t-r;U)\mathrm{d}r+\int_0^t\int_0^r g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{dsdr}\\&+\int_0^{a_m-t}u_0(r)E(t+r,t,t;U)\mathrm{d}r+\int_t^{a_m}\int_0^t g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{dsdr}\end{aligned}$$

则：

$$\phi(t;U)=F(t;U)+\int_0^t K(t,t-r;U)\phi^\alpha(r;U)\mathrm{d}r\tag{4}$$

$$\begin{cases}F(t;U)=\int_0^t\int_0^r g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{dsdr}+\int_0^{a_m-t}u_0(r)E(t+r,t,t;U)\mathrm{d}r\\ \qquad\qquad+\int_t^{a_m}\int_0^t g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{dsdr}\\ K(t,r;U)=\Gamma(t-r)E(r,t,r;U)\end{cases}$$

由标准证明，易得以下引理。

引理 2.1： 在假设(H1)-(H4)成立情况下，非线性 Volterra 积分方程(4)的解在 $L^{\infty}(0,T)$ 上存在且唯一。

引理 2.2： 对任意给定的 T，假设 $u(r,t)$ 是模型(1)的解，由假设(H1)知，
$0\le \underline{\mu}=\inf\limits_{\substack{(r,t)\in Q_T\\ U\ge 0}}\mu(r,t;U)$ 那么，对 $0\le t\le T$，有：

$$\varphi(t;U)\le \Gamma M_1\mathrm{e}^{(\Gamma-\underline{\mu})t}\le \Gamma M_1\mathrm{e}^{\Gamma T}\triangleq \Gamma M_{1T},$$
$$U(t)\le M_1\mathrm{e}^{(\Gamma-\underline{\mu})t}\le M_1\mathrm{e}^{\Gamma T}=M_{1T}.$$

证明：

$$\begin{aligned}\varphi(t;U)=&\Gamma(t)\Big[\int_0^t\varphi(r;U)E(t-r,t,t-r;U)\mathrm{d}r+\int_0^t\int_0^r g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\&+\int_0^{a_m-t}u_0(r)E(t+r,t,t;U)\mathrm{d}r+\int_t^{a_m}\int_0^t g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{d}s\mathrm{d}r\Big]^{\alpha}\\ \le&\Gamma(t)\left[\int_0^t\varphi(r;U)\mathrm{e}^{-\underline{\mu}(t-r)}\mathrm{d}r+\|g\|_{L^1(Q_T)}\mathrm{e}^{-\underline{\mu}t}+\mathrm{e}^{-\underline{\mu}t}\int_0^{a_m}\left(u_0(r)+\frac{1}{a_m}\right)\mathrm{d}r\right]^{\alpha}\\ \le&\Gamma(t)\left[\int_0^t\varphi(r;U)\mathrm{e}^{-\underline{\mu}(t-r)}\mathrm{d}r+\|g\|_{L^1(Q_T)}\mathrm{e}^{-\underline{\mu}t}+\mathrm{e}^{-\underline{\mu}t}\left(\int_0^{a_m}u_0(r)\mathrm{d}r+1\right)\right]^{\alpha}\\ \le&\mathrm{e}^{-\underline{\mu}t}\Gamma(t)\left[\int_0^t\varphi(r;U)\mathrm{e}^{\underline{\mu}r}\mathrm{d}r+\|g\|_{L^1(Q_T)}+\|u_0\|_{L^1(0,a_m)}+1\right]\end{aligned}$$

$$\varphi(t;U)\mathrm{e}^{\underline{\lambda}t}\le\Gamma\left[\int_0^t\varphi(r;U)\mathrm{e}^{\underline{\lambda}r}\mathrm{d}r+\|g\|_{L^1(Q_T)}+\|u_0\|_{L^1(0,a_m)}+1\right]$$

由 Gronwall 不等式得：

$$\varphi(t;U)\le\Gamma\left(\|g\|_{L^1(Q_T)}+\|u_0\|_{L^1(0,a_m)}+1\right)\mathrm{e}^{(\Gamma-\underline{\mu})t}=\Gamma M_1\mathrm{e}^{(\Gamma-\underline{\mu})t}\le\Gamma M_1\mathrm{e}^{\Gamma t}$$

$$\begin{aligned}U(t)=&\int_0^t\varphi(t-r)E(r,t,r;U)\mathrm{d}r+\int_0^t\int_0^r g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\&+\int_t^{a_m}u_0(r-t)E(r,t,t;U)\mathrm{d}r+\int_t^{a_m}\int_0^t g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\ =&\int_0^t\varphi(t-r)E(r,t,r;U)\mathrm{d}r+\int_0^t\int_0^r g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\&+\int_0^{a_m-t}u_0(r)E(r+t,t,t;U)\mathrm{d}r+\int_t^{a_m}\int_0^t g(r-s,t-s)E(r,t,s;U)\mathrm{d}s\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U(t)\le&\int_0^t\varphi(t-r)\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}r}\mathrm{d}r+\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}t}\left(\|g\|_{L^1(Q_T)}+\|u_0\|_{L^1(0,a_+)}+1\right)\\ \le&\int_0^t\Gamma M_1\mathrm{e}^{(\Gamma-\underline{\lambda})(t-r)}\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}r}\mathrm{d}r+\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}t}M_1\\ \le&\Gamma M_1\mathrm{e}^{(\Gamma-\underline{\lambda})t}\int_0^t\mathrm{e}^{-\Gamma r}\mathrm{d}r+\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}t}M_1\\ =&M_1\mathrm{e}^{(\Gamma-\underline{\lambda})t}\end{aligned}$$

令 $W=\left\{v\in L^{\infty}\left(0,T;L^1(0,a_m)\right);v(r,t)\ge 0,\|v(\cdot,t)\|_{L^1(0,a_m)}\le M_{1T}\right\}$，

$$W_1=\left\{h\in L^{\infty}(0,T);0\le h(t)\le M_{1T},t\in(0,T)\right\}$$

显然 W 是 $L^{\infty}\left(0,T;L^1(0,a_m)\right)$ 的闭子集。

引理 2.3： 存在常数 $M_{2T}>0$ (依赖于 T)，对任意的 $U_1,U_2\in W_1$，有：

$$\left|\varphi(t;U_1)-\varphi(t;U_2)\right| \le M_{2T}\left|U_1(t)-U_2(t)\right|$$

证明：

$$\begin{aligned}
&\varphi(t;U_1)-\varphi(t;U_2)\\
&=\Gamma(t)\Big[\int_0^t\varphi(r;U_1)\Pi(t-r,t,t-r;U_1)\mathrm{d}r+\int_0^t\int_0^r g(r-s,t-s)\Pi(r,t,s;U_1)\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_0^{a_+-t}u_0(r)\Pi(t+r,t,t;U_1)\mathrm{d}r+\int_t^{a_+}\int_0^t g(r-s,t-s)\Pi(r,t,s;U_1)\mathrm{d}s\mathrm{d}r\Big]^{\alpha}\\
&\quad-\Gamma(t)\Big[\int_0^t\varphi(r;U_2)\Pi(t-r,t,t-r;U_2)\mathrm{d}r+\int_0^t\int_0^r g(r-s,t-s)\Pi(r,t,s;U_1)\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_0^{a_+-t}u_0(r)\Pi(t+r,t,t;U_2)\mathrm{d}r+\int_t^{a_+}\int_0^t g(r-s,t-s)\Pi(r,t,s;U_2)\mathrm{d}s\mathrm{d}r\Big]^{\alpha}\\
&\le\Gamma(t)\alpha(\gamma\rho)^{\alpha-1}\Big[\int_0^t\varphi(r;U_1)\Pi(t-r,t,t-r;U_1)\mathrm{d}r+\int_0^t\int_0^r g(r-s,t-s)\Pi(r,t,s;U_1)\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_0^{a_m-t}u_0(r)\Pi(t+r,t,t;U_1)\mathrm{d}r+\int_t^{a_m}\int_0^t g(r-s,t-s)\Pi(r,t,s;U_1)\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\
&\quad-\int_0^t\varphi(r;U_2)\Pi(t-r,t,t-r;U_2)\mathrm{d}r+\int_0^t\int_0^r g(r-s,t-s)\Pi(r,t,s;U_1)\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_0^{a_+-t}u_0(r)\Pi(t+r,t,t;U_2)\mathrm{d}r+\int_t^{a_+}\int_0^t g(r-s,t-s)\Pi(r,t,s;U_2)\mathrm{d}s\mathrm{d}r\Big]\\
&=\Gamma(t)\alpha(\gamma\rho)^{\alpha-1}\int_0^{a_+}\big(u(r,t;U_1)-u(r,t;U_2)\big)\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

从而有：

$$\left|\varphi(t;U_1)-\varphi(t;U_2)\right|\le\Gamma\alpha(\gamma\rho)^{\alpha-1}\left|\int_0^{a_+}\big(u(r,t;U_1)-u(r,t;U_2)\big)\mathrm{d}r\right|=M_{2T}\left|U_1(t)-U_2(t)\right|$$

令 $M_{2T}=\Gamma\alpha(\gamma\rho)^{\alpha-1}$，则有：$\left|\varphi(t;U_1)-\varphi(t;U_2)\right|\le M_{2T}\left|U_1(t)-U_2(t)\right|$

定义算子：$\begin{aligned}&K:W\to L^\infty\big(0,T;L^1(0,a_m)\big),\\&(Kv)(r,t)=u\big(r,t,V(t)\big),\ V(t)=\int_0^{a_m}v(r,t)\mathrm{d}r\end{aligned}$

引理 2.4： 算子 K 满足：$\forall v\in W,Kv\in W$，且存在常数 $M_T^*>0$，对任意的 $u_1,u_2\in H$，有：$\left\|(Ku_1)(t)-(Ku_2)(t)\right\|_{L^1(0,a_m)}\le M_T^*\int_0^t\left\|u_1(\cdot,s)-u_2(\cdot,s)\right\|_{L^1(0,a_m)}\mathrm{d}s$。

证明：对任意的 $v\in W$，令 $V(t)=\int_0^{a_m}v(r,t)\mathrm{d}r$，显然，$V\in L^\infty(0,T),V(t)\ge 0$

令 $\varphi(t;V)$ 为积分方程(4)的解，则由引理 2.2 知，

$$\varphi(t;V)\le\Gamma M_{1T},\int_0^{a_m}u\big(r,t;V(t)\big)\mathrm{d}r\le M_{1T}$$

从而 $u\big(r,t;V(t)\big)=(Kv)(r,t)\in W$。

对任意的 $u_1,u_2\in W,U_1(t)=\int_0^{a_m}u_1(r,t)\mathrm{d}r\in W_1,U_2(t)=\int_0^{a_m}u_2(r,t)\mathrm{d}r\in W_1$，

由方程(3)、(4)知：

$$\begin{aligned}
&\left\|(Ku_1)(t)-(Ku_2)(t)\right\|_{L^1(0,a_m)}\\
&=\left\|u(\cdot,t;U_1)-u(\cdot,t;U_2)\right\|_{L^1(0,a_m)}=\int_0^{a_m}\left|u(r,t;U_1)-u(r,t;U_2)\right|\mathrm{d}r\\
&=\int_0^t\left|u(r,t;U_1)-u(r,t;U_2)\right|\mathrm{d}r+\int_t^{a_m}\left|u(r,t;U_1)-u(r,t;U_2)\right|\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^t\left\|\left[\varphi(t-r;U_1)E(r,t,r;U_1)-\varphi(t-r;U_2)E(r,t,r;U_2)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\int_0^r g(r-s,t-s)\left(E(r,t,s;U_1)-E(r,t,s;U_2)\right)\mathrm{d}s\right]\right\|\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_t^{a_m}\left\|\left[u_0(r-t)\left(E(r,t,t;U_1)-E(r,t,t;U_2)\right)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\int_0^t g(r-s,t-s)\left(E(r,t,s;U_1)-E(r,t,s;U_2)\right)\mathrm{d}s\right]\right\|\mathrm{d}r\\
&\le\int_0^t\left|\varphi(t-r;U_1)-\varphi(t-r;U_2)\right|E(r,t,r;U_1)\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_0^t\varphi(t-r;U_2)\left|E(r,t,r;U_1)-E(r,t,r;U_2)\right|\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_0^t\int_0^r g(r-s,t-s)\left|E(r,t,s;U_1)-E(r,t,s;U_2)\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_t^{a_m}u_0(r-t)\left|E(r,t,t;U_1)-E(r,t,t;U_2)\right|\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_t^{a_m}\int_0^t g(r-s,t-s)\left|E(r,t,s;U_1)-E(r,t,s;U_2)\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

根据假设(H3)、(H4)、引理 2.2、引理 2.3 得：

$$
\begin{aligned}
&\left\|(Ku_1)(t)-(Ku_2)(t)\right\|_{L^1(0,a_m)}\le M_{2T}\int_0^t\left|U_1(t-r)-U_2(t-r)\right|\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_0^t\Gamma M_{1T}\left|\exp\left\{-\int_0^r\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_1(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right\}-\exp\left\{-\int_0^r\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_2(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right\}\right|\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_0^t\int_0^r g(r-s,t-s)\left|\exp\left\{-\int_0^s\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_1(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right\}-\exp\left\{-\int_0^s\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_2(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right\}\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_t^{a_m}u_0(r-t)\left|\exp\left\{-\int_0^s\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_1(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right\}-\exp\left\{-\int_0^s\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_2(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right\}\right|\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_t^{a_m}\int_0^t g(r-s,t-s)\left|\exp\left\{-\int_0^s\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_1(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right\}-\exp\left\{-\int_0^s\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_2(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right\}\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\
&\le M_{2T}\int_0^t\left|U_1(s)-U_2(s)\right|\mathrm{d}s+\int_0^t\Gamma M_{1T}\int_0^r\left|\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_1(t-\tau)\right)-\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_2(t-\tau)\right)\right|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_0^t\int_0^r g(r-s,t-s)\int_0^s\left|\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_1(t-\tau)\right)-\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_2(t-\tau)\right)\right|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_t^{a_m}u_0(r-t)\int_0^s\left|\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_1(t-\tau)\right)-\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_2(t-\tau)\right)\right|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_t^{a_m}\int_0^t g(r-s,t-s)\int_0^s\left|\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_1(t-\tau)\right)-\mu\left(r-\tau,t-\tau,U_2(t-\tau)\right)\right|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\
&\le M_{2T}\int_0^t\left|U_1(s)-U_2(s)\right|\mathrm{d}s+\Gamma M_{1T}TL(M_{1T})\int_0^r\left|U_1(t-\tau)-U_2(t-\tau)\right|\mathrm{d}\tau\\
&\quad+2\|g\|_{L^1(0,a_m)}L(M_{1T})\int_0^s\left|U_1(t-\tau)-U_2(t-\tau)\right|\mathrm{d}\tau+\|u_0\|_{L^1(0,a_m)}L(M_{1T})\int_0^s\left|U_1(t-\tau)-U_2(t-\tau)\right|\mathrm{d}\tau\\
&\le M_{2T}\int_0^t\left|U_1(s)-U_2(s)\right|\mathrm{d}s+\Gamma M_{1T}TL(M_{1T})\int_0^t\left|U_1(s)-U_2(s)\right|\mathrm{d}s\\
&\quad+2\|g\|_{L^1(0,a_m)}L(M_{1T})\int_0^s\left|U_1(s)-U_2(s)\right|\mathrm{d}s+\|u_0\|_{L^1(0,a_m)}L(M_{1T})\int_0^s\left|U_1(s)-U_2(s)\right|\mathrm{d}s\\
&=\left\{M_{2T}+\Gamma M_{1T}TL(M_{1T})+2\|g\|_{L^1(0,a_m)}L(M_{1T})+\|u_0\|_{L^1(0,a_m)}L(M_{1T})\right\}\int_0^t\left|U_1(s)-U_2(s)\right|\mathrm{d}s\\
&\le M_T^*\int_0^t\left|U_1(s)-U_2(s)\right|\mathrm{d}s\le M_T^*\int_0^t\left\|u_1(\cdot,s)-u_2(\cdot,s)\right\|_{L^1(0,a_m)}\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

其中 $M_T^*=M_{2T}+\Gamma M_{1T}TL(M_{1T})+2\|g\|_{L^1(0,a_m)}L(M_{1T})+\|u_0\|_{L^1(0,a_m)}L(M_{1T})$

定理 2.1：模型(1)有唯一非负解。

证明：任取 $\tau > M_T^*$，我们定义 $L^\infty\left(0,T;L^1\left(0,a_+\right)\right)$ 上的等价范数：

$$\|u\|_* = \operatorname{Ess\,sup}_{t\in(0,T)}\left\{\mathrm{e}^{-\tau t}\left\|u(\cdot,t)\right\|_{L^1(0,a_m)}\right\},$$

由引理 2.4 知：

$$\begin{aligned}\|Ku_1 - Ku_2\|_* &= \operatorname{Ess\,sup}_{t\in(0,T)}\left\{\mathrm{e}^{-\tau t}\left\|Ku_1(\cdot,t)-Ku_2(\cdot,t)\right\|_{L^1(0,a_m)}\right\}\\ &\le M_T^*\operatorname{Ess\,sup}_{t\in(0,T)}\left\{\mathrm{e}^{-\tau t}\int_0^t\left\|u_1(\cdot,s)-u_2(\cdot,s)\right\|_{L^1(0,a_m)}\mathrm{d}s\right\}\\ &\le M_T^*\operatorname{Ess\,sup}_{t\in(0,T)}\left\{\mathrm{e}^{-\tau t}\int_0^t\mathrm{e}^{\tau s}\mathrm{e}^{-\tau s}\left\|u_1(\cdot,s)-u_2(\cdot,s)\right\|_{L^1(0,a_m)}\mathrm{d}s\right\}\\ &\le \frac{M_T^*}{\tau}\|u_1-u_2\|_* < \|u_1-u_2\|_*\end{aligned}$$

所以算子 K 是 W 上的严格压缩映射，由 Banach 不动点定理可得 K 在 W 上有唯一不动点。从而模型(1)有唯一非负解。

基金项目

新疆工程学院科研育人课题(2019xgy672112)。

参考文献

[1] 于景元, 郭宝珠, 朱广田. 人口分布参数控制系统理论[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1999.

[2] 宋建, 于景元. 人口控制论[M]. 北京: 科学出版社, 1988.

[3] 于景元, 赵军. 经济系统的控制模型及其解的性质[J]. 控制与决策, 1996, 11(4): 452 -456.

[4] 焦红兵, 姚兰, 吴冀徽. 与环境相关的非线性投资发展系统解的性质[J]. 数学的实践与认识, 2006, 36(9): 250-258.

[5] 刘会茹, 张红梅, 赵凌华, 李伟才. 带有环境制约函数的非线性资产发展方程的最优控制问题[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2012, 35(2): 190-193.

[6] 刘亚婷, 张启敏. 受随机扰动的两种资产积累模型的最优逼近控制[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2013, 30(3): 69-76.

[7] 张启敏, 申芳芳, 杨洪福. 模糊随机固定资产模型解的存在唯一性[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2015, 43(2): 7-13.

[8] 吕淑婷, 张启敏. 随机固定资产系统补偿倒向 Euler 数值解的稳定性[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2016, 44(3): 14-18+84.

[9] 何泽荣, 朱广田. 基于年龄分布和加权总规模的种群系统的最优收获控制[J]. 数学进展, 2006, 35(3): 315-324.

[10] He, Z.R. and Wang, M.S. (2003) Optimal Harvest Control of a Nonlinear Periodic Population System. *Applied Mathematics*, **3**, 88-93.

[11] He, Z.R. and Wang, M.S. (2003) Optimal Birth Control Problems for Nonlinear Population Dynamics with Age-Structure and Immigration. *Applied Mathematics*, **4**, 136-142.

[12] He, Z.R., Ni, D.D. and Wang, S.-P. (2019) Optimal Harvesting of a Hierarchical Age-Structured Population System. *International Journal of Biomathematics*, **12**, Article ID: 1950091. https://doi.org/10.1142/S1793524519500918