Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(12), 2263-2266
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.912264

Hans汉斯

联想类比在近世代数中的应用

李一鸣

辽宁师范大学，辽宁 大连
Email: 1968319810@qq.com

收稿日期：2020年11月21日；录用日期：2020年12月22日；发布日期：2020年12月29日

摘 要

联想类比是数学中一个很重要的思想，在近世代数中有着深刻的应用，在群与环的定义里，在用模的同余关系将集合、群、环进行分类进而得到性质比较好的新分类的集合、剩余类加群、剩余类环里，在集合、群、环关于映射的规律里，联想类比思想都有着深刻的意义。不仅在近世代数内部，联想类比还可以应用于多个数学分支里，用同态去解释求导，将运动构成一个群。在不同的自然科学领域，联想类比依然有着充分的体现，晶体的对称性，亚原子粒子的对称性，场论都与群论有着密不可分的联系。

关键词

联想类比，数学思想，近世代数，群论

The Application of Associative Analogy in Modern Algebra

Yiming Li

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 1968319810@qq.com

Received: Nov. 21st, 2020; accepted: Dec. 22nd, 2020; published: Dec. 29th, 2020

Abstract

Associative analogy is a very important idea in mathematics, which has a profound application in modern algebra. In the definition of group and ring, the congruence relation of modules is used to classify sets, groups and rings, and then new classified sets, residual classes plus groups and residual class rings with better properties are obtained. In the mapping rules of sets, groups and rings, associative analogy thoughts are profound significance. Not only in modern algebra, associative analogy can also be applied to many branches of mathematics. Homomorphism is used to explain

文章引用: 李一鸣. 联想类比在近世代数中的应用[J]. 应用数学进展, 2020, 9(12): 2263-2266.
DOI: 10.12677/aam.2020.912264

and derive, and the motion is formed into a group. In different fields of natural science, associative analogy is still fully reflected. The symmetry of crystal, subatomic particle and field theory is closely related to group theory.

Keywords

Associative Analogy, Mathematical Thought, Modern Algebra, Group Theory

1. 绪论

《老子》第七十七章："天之道，其犹张弓与！高者抑之，下者举之，有余者损之，不足者与之，天之道损有余而补不足。"老子认为"天道"的特点在于减少有余而补给不足，无独有偶，化学中的勒夏特列原理向我们揭示了在一个平衡体系中，若改变影响平衡的一个条件，平衡总是要向能够减弱这种改变的方向移动，物理中的楞次定律向我们揭示了感应电流具有这样的方向，即感应电流的磁场总要阻碍引起感应电流的磁通量的变化。它们看似无关，其实所蕴含的深刻哲理却是相同的，老子的天之道损有余而补不足的哲学亦能应用于科学之中，帮助我们了解这天地万物之间的规律。究其实质，这里面蕴藏了一个普遍而深刻的数学思想——联想类比。"天道"的特点在于减少有余而补给不足，进而类比于化学平衡中是否也遵循这个规律呢，在电磁感应现象中感应电流中是否也遵循这个规律呢，在联想类比中探索蕴藏在事物内的科学规律。

谈到近世代数则不得不谈到近世代数中很重要的群论，了解群论的发展历史对于我们理解近世代数有很重要的意义，首先让我们先来了解一下群论的发展过程，伽罗瓦理论是现代数学的主要发端之一，当这位数学天才用自己创造的理论解决了代数方程的悬案时，人们才逐渐意识到数学结构本身所隐含的对称性和抽象关系竟然具有如此强大的威力。通过后继者对高阶抽象和逻辑结构关系的不断探索，如今数学大厦不仅纵向高耸入云而且横向相互支撑顺畅贯通。数学家首先发现了方程根与系数的关系即我们熟知的韦达定理，接着通过系数计算根的时候发现了根的对称性，伽罗瓦根据根的对称性发现了伽罗瓦群，进而群论磅礴发展。

联想类比在近世代数的群论中有其深刻的应用，简单来说，群的作用是描述对称。什么叫对称呢？正方形对称吗？物理定律对称吗？多项式的根对称吗？答案是对称，通俗地讲，对称就是某种操作下的不变性。此时数学家们就会想：根的对称性是否意味着域扩张的复杂性呢？果不其然，这种对称性揭示了域扩张与群的子群之间优美的对偶，使得我们可以通过研究群的可解性来回答方程解的性质。通过大量的研究发现：子群的结构和域扩张的结构完全相同。

2. 近世代数中

在近世代数中，联想类比这一数学思想有其深刻的体现。群与环都是近世代数中两个基本的概念，考察它们的定义会发现这两个近世代数中的基本概念的相似性即体现了联想类比的思想。

对于一个集合[1]，取一个固定的整数 $n>0$，利用这个 n，规定集合的元间的一个关系 M，aMb 当且仅当 $n|a-b$ 的时候，这个等价关系普通叫做模 n 的同余关系，并且用 $a\equiv b(n)$ 来表示，这个等价关系决

定了这个集合的一个分类。

对于一个群 G，G 包含模 n 的 n 个剩余类，规定一个 G 的代数运算，即

$[a]+[b]=[a+b]$，所以对于这个加法来说，G 作成一个群，这个群叫做模 n 的剩余类加群，a 和 b 等价当且仅当 $a-b\in\{kn\}$。

对于一个环 R 和 R 的一个理想 I，把 I 的陪集作成 R 的一个分类，把这些类叫做模 I 的剩余类，其中两个元的同余关系为 $a\equiv b(I)$ 当且仅当 $a-b\in I$ 的时候。

一个集合的等价关系的重要性在于由它可以产生出新的集合，在上述三个例子中，模 n 的同余关系将集合、群、环按这个等价关系进行分类进而得到了一些性质比较好的新分类的集合、剩余类加群、剩余类环，帮助我们对这些代数系统进行更好的研究，这些例子体现了模 n 的同余关系在集合、群、环的联想类比。

在群论里像循环群那样完全解决了的群只有很少的几种，所以可以利用一个群的子集来推测整个群的性质，这是研究任何群都可以用到的一般方法。如果可以在一般的子群上加一些限制条件作成一个不变子群可以进一步更好地研究群的一些性质，一个群 G 的一个不变子群 N 的陪集所作成的群叫做一个商群 G/N，此时就同时有两个子群可以供我们利用，进而规定一个法则 $a\to aN\ (a\in G)$，即群 G 与它的商群 G/N 有自然满同态，这样我们自然更容易推测群 G 的性质。群论里还有以下的这个结论：假定 ϕ 是一个群 G 到另一个群 $\bar{G}$ 的一个同态满射，$\bar{G}$ 的单位元 $\bar{e}$ 在 ϕ 之下所有逆象所作成的 G 的子集叫做同态满射 ϕ 的核，这个核就是 G 的一个不变子群。

同样在环论里面，可以利用一个环的子集来推测整个环的性质，再在一般的子环上也加一些限制条件作成一个理想子环，理想子环在环论里的地位同不变子群在群论里的地位类似，理想子环也可以进一步更好地研究环的性质，如果有一个环 R 的理想 I，可以得到一个模 I 的剩余类环 R/I，做一个映射 $a\to[a]\,(a\in R)$，即环 R 和剩余类环 R/I 有自然满同态，同样我们可以通过得到的这些更好地推测环 R 的性质。与群论那个结论类似，环论里同态满射的核是环的一个理想子环。

以上内容我们将群论里的子群、不变子群、商群、同态满射的核与环论里的子环、理想子环、剩余类环、同态满射的核进行了联想类比，通过把群论里对一些性质的研究类比到环论里对这些性质的研究，从而让我们可以更好地推测研究环论里面的一些性质，也让我们对这些性质有了更深入的理解。

环同态基本定理[2]和群同态基本定理也在一定程度上说明了理想与不变子群的平行地位。而且更重要的是从上面的三个定理中可以看到从广义的集合到在一个集合的基础上作成一个群再到在一个群的基础上作成一个环，它们关于映射有着一些深层次的规律是极其相似的，在这三个定理中联想类比思想得到了充分的体现，进而可以发现集合、群、环关于映射的规律的数学本质都是相通的。我们既可以通过群同态基本定理去尝试发现推导环同态基本定理，亦可以通过群和环的同态定理进一步抽象出关于集合[3]上的普遍规律，联想类比思想的运用可以帮助我们站在一定的高度上去看待许多数学定理，通过联想类比发现这些定理背后蕴藏的深刻数学规律。

3. 不同数学分支间

在不同数学分支之间，联想类比这一数学思想也有其深刻的体现。如果将区间 (a,b) 上的全体光滑函数 $C^\infty(a,b)$ 看作是一个环，那么求导运算对加法而言是群的自同态，对乘法而言又具有一个性质。这充分体现了代数学与分析学这两个数学分支之间是可以通过联想类比建立起联系。

以 E 表示三维 Euclid 空间[4]，作 E 中的一个变换 $X\to X^*$，定义为

$$X^*=AX+B \tag{1}$$

变换(1)保持两点间距离不变的充要条件是 A 为正交矩阵，即

$$A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = I \tag{2}$$

满足(2)的变换(1)称为 E 的运动。E 中所有运动构成一个群，称为 E 的运动群。这充分体现了代数学与几何学这两个数学分支之间是可以通过联想类比建立起联系。代数学研究不同代数系统中抽象的规律，而这些抽象的规律可以在其他数学分支中得以具体的实现，在实现的过程中联想类比便是极其有效的途径，数学的相通性才是核心而联想类比可以让我们深入理解数学的相通性。

4. 不同科学领域间

在不同自然科学领域间，联想类比这一数学思想也有其深刻的体现。著名数学家伽罗瓦发明一个强大的工具——群论，便有现在的化学家运用群论来描述晶体的对称性[5]，现在的物理学家运用群论描述亚原子粒子的对称性。1961 年，当物理学家默里•盖尔曼提出他后来获得诺贝尔物理学奖的夸克理论时，他使用的最重要的数学方法就是一个叫作 $SU(3)$ 的八维群，这个八维群决定了应该有多少个亚原子粒子的自旋是 $\frac{1}{2}$。每当理论物理学家想要创造一种新的场论时，他们就会从创造这种场论的对称群开始，这就充分说明了群论对于其他自然科学领域研究的重要意义，这也更加体现了联想类比这一数学思想在自然科学中的深度和广度。数学研究理论上的数学模型，其他自然科学领域将数学模型应用于其对应的领域，在应用实现的过程中联想类比有其极为深刻的意义。

参考文献

[1] 张禾瑞. 近世代数基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1978.

[2] 文毅玲. 联想类比在近世代数教学中的运用[J]. 教育观察, 2013(4): 61-63.

[3] 聂灵沼, 丁石孙. 代数学引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.

[4] 孟道骥, 梁科. 微分几何[M]. 第 3 版. 北京: 科学出版社, 2016.

[5] [美]达纳·麦肯齐. 无言的宇宙[M]. 北京: 北京联合出版公司, 2015.