Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(12), 2217-2221
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.912258

Hans汉斯

关于圆锥曲面的光滑拼接问题研究

贾为兴，李　雪，崔利宏

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连
Email: 2584828172@qq.com

收稿日期：2020年11月21日；录用日期：2020年12月20日；发布日期：2020年12月28日

摘　要

本文以代数曲面和空间代数曲线上的多元Lagrange插值问题的研究成果为依据，主要对沿圆锥曲面的拼接问题进行研究，得出了用Lagrange插值法在圆锥曲面上的二次光滑的一组的分解方法，得到了一组满足沿圆锥曲面光滑拼接的二次拼接多项式，使得曲面拼接过程得以简单化。在文章中我们用圆锥曲面(如图1)的实验算例对本文给出的方法进行实现，验证了方法的有效性。

关键词

圆锥曲面，多元Lagrange插值，光滑拼接，拼接点组

Research on Smooth Conic Surface Splicing Problem

Weixing Jia, Xue Li, Lihong Cui

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 2584828172@qq.com

Received: Nov. 21st, 2020; accepted: Dec. 20th, 2020; published: Dec. 28th, 2020

Abstract

Based on the research results on multivariate though laser interpolation problem of algebraic surface and space curve, this paper mainly studies the stitching problems of the along conical surface, gets a set of decomposition methods of quadratic smoothness on conic surfaces by using Lagrange interpolation method, and obtains a set of quadratic splicing polynomials satisfying the smooth splicing along conic surfaces, to simplify the surface of stitching process. In this paper, we use the experimental example of conic surface (as shown in Figure 1) to implement the method presented in this paper, and verify the effectiveness of the method.

文章引用: 贾为兴, 李雪, 崔利宏. 关于圆锥曲面的光滑拼接问题研究[J]. 应用数学进展, 2020, 9(12): 2217-2221.
DOI: 10.12677/aam.2020.912258

Keywords

Conic Surface, Multivariate Lagrange Interpolation, Smooth Splicing, Splicing Point Group

1. 引言

多元插值问题[1]及曲面光滑拼接问题[2]一直是计算数学中重要的研究领域，而多元多项式插值问题中的一个主要研究问题就是多元 Lagrange 插值的适定节点组问题，文献[3] [4] [5]中学者们给出了插值节点组的构造方法及其应用。很多学者将插值理论应用到曲面光滑拼接问题中，如吴文俊的吴方法[6]，王双，李鹏[7]借助二元函数的 hermite 插值理论做出了《C^1 光滑拼接二次函数的若干问题》等丰富了光滑拼接的理论方法，本文将结合了 Lagrange 插值的相关理论，在该基础上有一个二次多项式与我们给定的圆锥曲面沿着某一相交曲线光滑拼接，并研究其有效性。

圆锥曲面是一类较为重要的二次代数曲面，因为圆锥曲面与实际问题有着广泛的联系，许多机械部件——原苏联第二颗人造卫星火箭的防护罩以及飞机机头外观采用了圆锥曲面的代数流形，与时事热点问题有着密不可分的联系，因此我们对圆锥曲面进行研究有着实际的意义与价值。

2. 基本定义和主要定理

定义 1：在空间中，满足 2 次代数方程 $f(x,y,z)=0$ 的点 $P(x,y,z)$ 的全体，称为 2 次代数曲面。

定义 2 [8]：若不可约代数曲线 $c(x,y,z)=0$ 是代数曲面 $q(x,y,z)=0$ 与 $g(x,y,z)=0$ 的交线，则称代数曲面 $q(x,y,z)=0$ 和 $g(x,y,z)=0$ 沿着公共边界 $c(x,y,z)=0$ 拼接。(本论文主要研究 C^0 阶光滑拼接)

定义 3 [9]：设 n 是一个非负整数，且 $\dim P_n^{(3)}=\binom{n+3}{3}$，令 $P_n^{(3)}$ 是表示所有的全次数不超过 n 的三元实系数多项式构成的集合，即

$$P_n^{(3)}=\left\{\sum_{0\le i+j+k\le n} a_{ijk}x^i y^j z^k \,\middle|\, a_{ijk}\in R\right\}$$

定义 4 [9]：设 n,k 均为自然数，$c(x,y,z)=0$ 为 k 无重复分量代数曲线，定义 $d_n(2)$ 如下所示：

$$d_n(2)=\binom{n+3}{3}-\binom{n+1}{3}=\begin{cases}\frac{1}{6}(n+3)(n+2)(n+1) & n<2\\ \frac{1}{6}k\left[3n(n-2)+12n+2^2-1\right] & n\ge 2\end{cases} \tag{1}$$

令 $A=\{Q_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$ 是不可约代数曲线 $c(x,y,z)=0$ 上的 $d_n(2)$ 个互不相同的点，给定任意一组实数组 $\{f_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$，并且能够找到关于该实数组的一个多项式 $g(x,y,z)\in P_n^{(3)}$，使得所求 $g(x)$ 满足下述条件：

$$g(Q_i)=f_i, i=1,\cdots,n; i=1,\cdots,d_n(k). \tag{2}$$

若对于每一组任意给定的 $\{f_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$，方程组(2)总有一组解，那么称该结点组 $A=\{Q_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$ 是沿着二次

代数曲线 $c(x,y,z)=0$ 的 n 次光滑拼接点组，多项式 $g(x,y,z)\in P_n^{(3)}$ 是沿着 $c(x,y,z)=0$ 的拼接多项式，并简记为 $A\in I_n^{(3)}(c)$ (代表所有位于 $c(x,y,z)=0$ 上的 n 次拼接点组的集合)。

定理 1 [9]：设 $d_n(2)$ 为上述等式所述内容，那么位于 k 次代数曲线 $c(x,y,z)=0$ 上的点组 $A=\{Q_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$ 能够做成沿 $c(x,y,z)=0$ 的 n 次拼接结点组的充要条件是对任意零插值条件

$$g(Q_i)=0,i=1,\cdots,d_n(2).$$

的多项式 $g(X)\in P_n^{(3)}$，均有下述等式成立：

$$g(X)=c(X)r(X)$$

其中当 $n\ge k$ 时，$r(X)\in P_{n-k}^{3}$。

证明：必要性：若当 $g(Q_i)=0,(i=1,\cdots,d_n(2))$ 时，多项式 $g(X)$ 不能分解为

$$g(X)=c(X)r(X)$$

则此时多项式 $g(X)$ 可分解为：

$$g(X)=c(X)r(X)+d(X)$$

则 $g(Q_i)=c(Q_i)r(Q_i)+d(Q_i)=d(Q_i)\ne 0$ 与 $g(Q_i)=0,(i=1,\cdots,d_n(2))$ 矛盾。

所以 $g(X)$ 必可分解为

$$g(X)=c(X)r(X)。$$

充分性：若 $g(X)=c(X)r(X)$。

因为 $A=\{Q_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$ 为 $q(X)=0$ 与 n 次代数曲面 $g(X)=0$ 相交的 k 次代数曲线 $c(X)=0$ 上的 $d_n(2)$ 个互不相同的点

所以当 $c(Q_i)=0$ 时，必有 $g(Q_i)=c(Q_i)r(Q_i)=0$ 成立。证毕。

3. 实验算例

设被插值函数为 $f(x,y,z)=\sqrt{\frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{25}-\frac{z^2}{16}-10^2}$，在平面 $z=0$ 投射得到的被插值函数为 $f_{z=0}(x,y,z)=\sqrt{\frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{25}-10^2}$。

圆锥曲面的方程为 $q(x,y,z):x^2+y^2-z^2+50z-25^2=0$，在该圆锥曲面上取 9 个互不相同的点如下所示：

$$Q_1(-24,-7,0),\quad Q_2(-20,-15,0),\quad Q_3(-7,-24,0),$$
$$Q_4(7,24,0),\quad Q_5(7,-24,0),\quad Q_6(-7,24,0),$$
$$Q_7(15,20,0),\quad Q_8(-15,20,0),\quad Q_9(15,-20,0)$$

当 $z=0$ 时，这九个点恰好在在曲线 $c(X):x^2+y^2-25^2=0$ 上，由定义知，$\{Q_1,\cdots,Q_9\}$ 构成了定义在相交 2 次代数曲线 $c(X):x^2+y^2-25^2=0$ 的一组光滑拼接点组。

设在这组实数点组上的二次插值多项式为：

$$g(x,y,z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4xy+a_5xz+a_6yz+a_7x+a_8y+a_9z+a_{10}$$

将插值条件带入 $g^{(0)}(Q_i)=f^{(0)}(Q_i),(i=1,\cdots,9)$，可以得到如下方程 $A\times X=B$

$$A=\begin{bmatrix}(-24)^2 & (-7)^2 & 0 & 168 & 0 & 0 & -24 & -7 & 0 & 1\\(-20)^2 & (-15)^2 & 0 & 300 & 0 & 0 & -20 & -15 & 0 & 1\\(-7)^2 & (-24)^2 & 0 & 168 & 0 & 0 & -7 & -24 & 0 & 1\\7^2 & (-24)^2 & 0 & -168 & 0 & 0 & 7 & -24 & 0 & 1\\7^2 & 24^2 & 0 & 168 & 0 & 0 & 7 & 24 & 0 & 1\\(-7)^2 & 24^2 & 0 & -168 & 0 & 0 & -7 & 24 & 0 & 1\\15^2 & 20^2 & 0 & 300 & 0 & 0 & 15 & 20 & 0 & 1\\(-15)^2 & 20^2 & 0 & -300 & 0 & 0 & -15 & 20 & 0 & 1\\15^2 & (-20)^2 & 0 & -300 & 0 & 0 & 15 & -20 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\\a_7\\a_8\\a_9\\a_{10}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\text{此时解得}\begin{cases}a_1=1\\a_2=1\\a_3=0\\a_4=0\\a_5=0\\a_6=0\\a_7=0\\a_8=0\\a_9=0\\a_{10}=-25^2\end{cases}$$

得到所求多项式：

$$g(x,y,z)=x^2+y^2-25^2=0$$

此时有 $g(X)=x^2+y^2-25^2=c(X)r(X)$。

因为 $g(X)=c(X)r(X)$ 其中 $r(X)=1\in P_{n-k}^3=P_{2-2}^3=P_0^3$ 是常值函数。

所以由定理 1 可知，$g(X)$ 是 $c(X)$ 的拼接点组。

此时 $g(x,y,z):x^2+y^2-25^2=0$ 与 $q(x,y,z):x^2+y^2-z^2+50z-25^2=0$ 相交于一条不可约 2 次代数曲线 $c(x,y,z):x^2+y^2-25^2=0$。

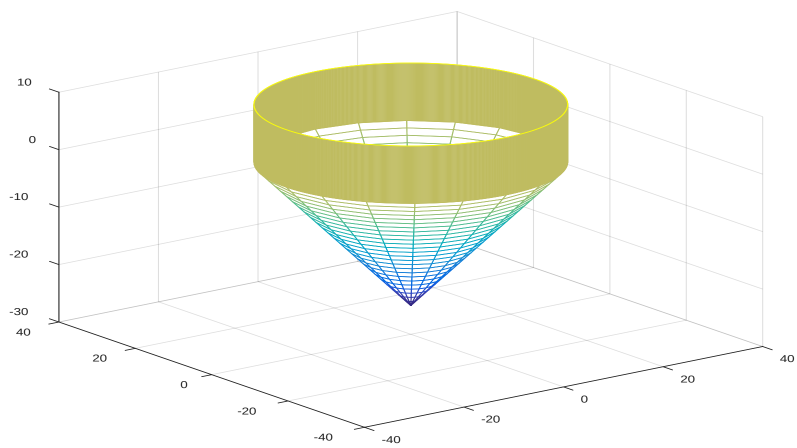

Figure 1. Effect diagram of smooth conic surface Mosaic
图 1. 圆锥曲面光滑拼接效果图

此时 $f(x,y,z)=\sqrt{\frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{25}-\frac{z^2}{16}-10^2}$ 在 $Q_{10}(7,24,0)$、$Q_{11}(15,20,0)$ 两点处的结果为 $f(Q_{10})=f(Q_{11})=0$，而 $g(x,y,z)$ 在上述两点的值 $g(Q_{10})=g(Q_{11})=0$ 这也验证了如果关系 $g(X)\in P_2^{(3)}$，$g(Q_i)=0, i=1,\cdots,d_n(2)$ 成立，蕴含了曲线 $c(X)=0$ 恒有 $g^{(j)}(X)\equiv 0$。

基金项目

辽宁省教育厅项目，辽教函[2018471]。

参考文献

[1] 梁学章，李强. 多元逼近[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005: 21-28.

[2] 周蕴时，苏志勋，奚涌江，等. CAGD 中的曲线与曲面[M]. 长春: 吉林大学出版社, 1993.

[3] 梁学章. 关于多元函数插值与逼近[J]. 高等学校计算数学学报, 1979(1): 123-124.

[4] 余震果，李丽，李婷，崔利宏. 关于多元插值适定性问题研究[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2011(2): 17-25.

[5] 崔利宏，孟敏，李笑笑，高小淞. 二次曲面上 Lagrange 插值节点组构造问题研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2015(6): 17-25.

[6] 李志斌，吴文俊. 消元法及其在非线性偏微分方程求解中的应用[J]. 甘肃科学学报, 1994(4): 23-28.

[7] 王双，李鹏. C^1 光滑拼接二次函数的若干问题[J]. 吉林大学学报(理学版), 2008(11): 1013-1020.

[8] 陈发来，陈长松，邓建松. 用分片代数曲面构造管道曲面的过渡曲面[J]. 计算机学报, 2000(9): 912-916.

[9] 崔利宏. 多元 Lagrange 插值与多元 Kergin 插值[M]. 大连: 辽宁师范大学出版社, 2018: 36-39.