

Fokker-Planck方程的一个精确解

卓玛代吉, 索南旺毛, 扎西拉姆, 义西卓玛

中央民族大学理学院, 北京

Email: 3429656278@qq.com

收稿日期: 2020年12月25日; 录用日期: 2021年1月19日; 发布日期: 2021年1月27日

摘要

本文首先利用一个变换将描述肿瘤增长模型的Fokker-Planck方程转化为常微分方程, 然后利用F-展开法和Mathematica软件构造出方程的一个精确解, 最后描绘在不同参数情形下解的图像来展示解的性态。

关键词

Fokker-Planck方程, F-展开法, Mathematica软件, 雅各比椭圆函数

An Exact Solution of the Fokker-Planck Equation

Zhuomadaiji, Suonanwangmao, Zhaxilamu, Yixizhuoma

College of Science, Minzu University of China, Beijing

Email: 3429656278@qq.com

Received: Dec. 25th, 2020; accepted: Jan. 19th, 2021; published: Jan. 27th, 2021

Abstract

We first use a transform to convert the Fokker-Planck equation describing the tumor growth model into an ordinary differential equation, then construct an exact solution of the equation by means of the F-expansion method and Mathematica software, and finally draw the figures of the solutions under the different choosing parameters to demonstrate the behaviors of the solutions.

Keywords

Fokker-Planck Equation, F-Expansion Method, Mathematica Software, Jacobi Elliptic Function



1. 引言

近年来, 用非线性发展方程刻画模型已引起了人们的广泛关注, 并且成功地解决了一些模型的性态演化问题。如在文献[1], 利用 CRE 方法研究了两类非线性方程得到了新的相互作用解, 并且描述了非线性发展方程在数学物理中的重要性, 而在合适的假设下利用微分方程刻画肿瘤细胞的生长过程以及影响因素, 也为肿瘤治疗提供了新的思路和方法[2]。

在许多专家学者的研究中, 通过采用指数函数法、齐次平衡法、双曲正切法和 F-展开法来求解非线性偏微分方程, 得到了丰富的精确解。在文献[3] [4]中 Rotenberg 利用 Fokker-Planck 逼近给出了一个描述细胞增长的线性扩散型方程。本文在上述文献的启示下研究一个非线性的偏微分方程[5]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial \mu} = f^n \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \quad (1)$$

并运用 F-展开法构造方程(1)的一个精确解, 其中 $t \in (0, \infty)$ 是时间, $v \in (0, \infty)$ 是成熟速度, $\mu \in (0, 1)$ 是成熟度。

本文的结构如下: 在第 2 节, 我们概述 F-展开法的主要思路, 然后利用 Mathematica 软件绘制图形, 得到方程的精确解并且描述了方程模型。第 3 节对本文内容进行了简单的总结。

2. 求解非线性偏微分方程

2.1. 方法概述

求解非线性偏微分方程的 F-展开法可以看作是齐次平衡原则的新应用, 为了简单起见, 本文以两个自变量的情形为例来说明 F-展开法的主要思路[6] [7]。

给定非线性偏微分方程:

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (2)$$

P 为其变元的多项式, 其中含有非线性项和高阶偏导数项。

第一步: 为了将偏微分转化为微分方程, 我们令

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = mx + nt \quad (3)$$

其中 m, n 为待定常数。将(3)式代入方程(2), 则(2)式变为常微分方程

$$P(u, mu', nu', \omega^2 u'', k\omega u''', k^2 u''', \dots) = 0 \quad (4)$$

第二步: 用齐次平衡法原则确定 N 。

第三步: 设 $u(\xi)$ 为 $F(\xi)$ 的洛朗级数形式

$$u(x, t) = \sum_{i=-n}^n a_i F^i(\xi) \quad (5)$$

其中 a_i 是待定常数, $F(\xi)$ 满足 Jacobi 椭圆方程

$$F'^2 = PF^4 + QF^2 + R, \quad (6)$$

其中 P, Q, R 是常数。具体的解的分类可见[8]

第四步：将式(5)代入方程(4)，利用方程(6)可将方程(4)的左端变成 $F(\xi)$ 的多项式，合并 $F(\xi)$ 多项式。

第五步：令 $F(\xi)$ 的各次幂项的系数为零，得 a_i 的含有 P, Q, R 的代数方程组，利用符号计算软件 Mathematica 解出 a_i ，用 P, Q, R 表示的 a_i 。

第六步：将 a_i 的结果代入式子(5)，得方程的行波解的一般形式，再由 $F(\xi)$ 与 P, Q, R 关系代入 P, Q, R 的值得出由雅各比椭圆函数表示的解。

2.2. 具体步骤

本节借助以上思路来构造非线性方程(1)的精确解。考虑如下形式的变换

$$f = t^3 u(s), \quad s = tv - \mu + \frac{l}{2} \ln t; \quad (7)$$

其中 $l = 0$ 或者 $l = \pm 1$ 。将变换(7)代入非线性方程(1)，得到关于 $u(s)$ 的常微分方程

$$-\frac{3}{n}u(s) + \frac{l}{2}u'(s) - u(s)^n u''(s) = 0, \quad (8)$$

这里考虑一个特殊情形令 $n = -1, l = 0$ ，得到方程

$$3u(s)^2 - u''(s) = 0, \quad (9)$$

利用 F-展开法的思路，利用方程(9)中的非线性项与最高阶导数项 u'' 与 u^2 ，齐次平衡后就可确定 $N = 2$ ，则方程(8)的解具有形式

$$u(s) = a_0 + a_1 F + b_1 F^{-1} + a_2 F^2 + b_2 F^{-2}, \quad (10)$$

将(10)式代入方程(9)中，同时利用(6)式，合并 F 的同次幂项的系数，则方程(9)的左端归结为 $F(s)$ 的 8 次多项式：

$$\begin{aligned} & (3b_2^2 - 6b_2R) + (6b_1b_2 - 2b_1R)F(s) + (3b_1^2 + 6a_0b_2 - 4b_2Q)F(s)^2 + (6a_0b_1 + 6a_1b_2 - b_1Q)F(s)^3 \\ & + (3a_0^2 + 6a_1b_1 + 6a_2b_2 - 2b_2P - 2a_2R)F(s)^4 + (6a_0a_1 + 6a_2b_1 - a_1Q)F(s)^5 \\ & + (3a_1^2 + 6a_0a_2 - 4a_2Q)F(s)^6 + (6a_1a_2 - 2a_1P)F(s)^7 + (3a_2^2 - 6a_2P)F(s)^8 \end{aligned}$$

令 $F(s)$ 的各次幂项的系数为零，得到关于 a_i 代数方程组，解此代数方程组可得一组解：

$$a_0 = \frac{2Q}{3}; a_1 = 0; b_1 = 0; a_2 = 2P; b_2 = 2R; P = -\frac{Q^2}{12R};$$

特别的，利用方程(6)的特解，我们可得 $P = 1; Q = 2m^2 - 1; R = -m^2(1 - m^2); F = ds\xi$

将 P, Q, R, F 与上面的解代入(10)式中可得

$$u(s) = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{8 \operatorname{JacobiDS}[s, m]^2} + 2 \operatorname{JacobiDS}[s, m]^2 \quad (11)$$

最后将(11)式代入(7)式中可得到方程(1)的精确解为

$$f = t^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{8 \operatorname{JacobiDS} \left[tv - \mu, \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \right]^2} + 2 \operatorname{JacobiDS} \left[tv - \mu, \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \right]^2 \right) \quad (12)$$

和

$$f = t^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{8 \text{JacobiDS} \left[tv - \mu, \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right]^2} + 2 \text{JacobiDS} \left[tv - \mu, \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right]^2 \right) \quad (13)$$

2.3. 图形分析

对于精确解(12)当分别取 $t=1, t=5, t=10$, $v \in (0,1), \mu \in (0,1)$ 时, 利用 Mathematica 软件[9]绘制解随时间的演化性态。

- 1) $v \in (0,1), \mu \in (0,1)$ 在 $t=1$ 时解的演化过程见 图 1, 此时有一个波峰。
- 2) $v \in (0,1), \mu \in (0,1)$ 在 $t=5$ 时解的演化过程见 图 2, 此时有两个波峰。
- 3) $v \in (0,1), \mu \in (0,1)$ 在 $t=10$ 时解的演化过程见 图 3, 此时有三个波峰。

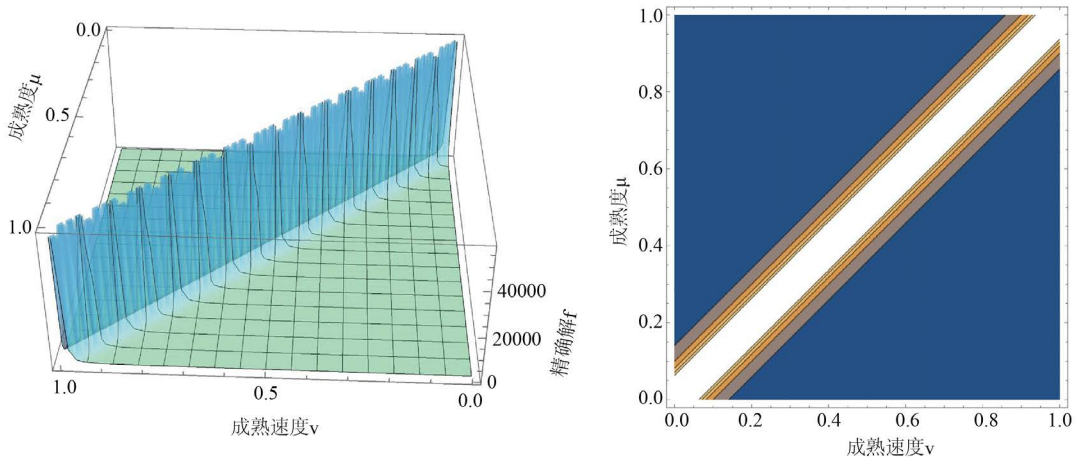


Figure 1. When $t=1$, the solution evolves with v and μ
图 1. 当 $t=1$ 时解随 v, μ 的演化过程

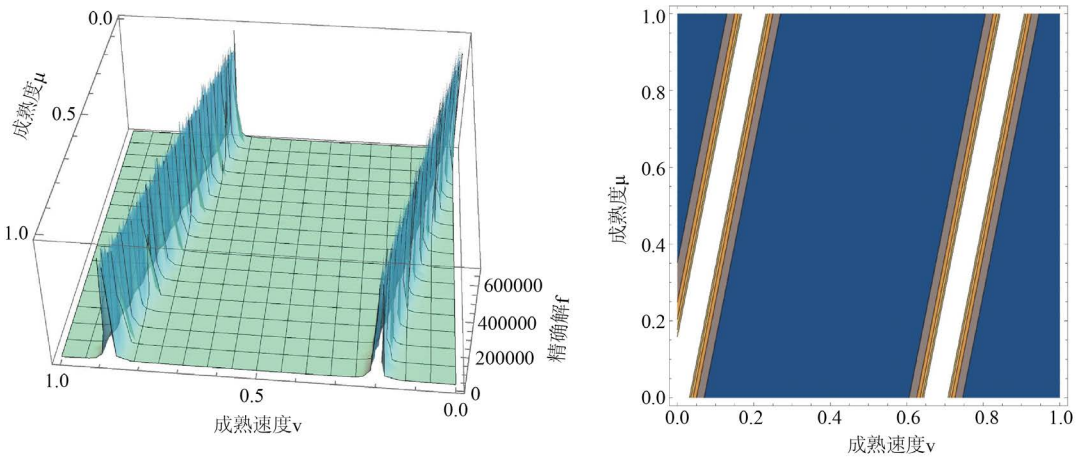


Figure 2. When $t=5$, the solution evolves with v and μ
图 2. 当 $t=5$ 时解随 v, μ 的演化过程

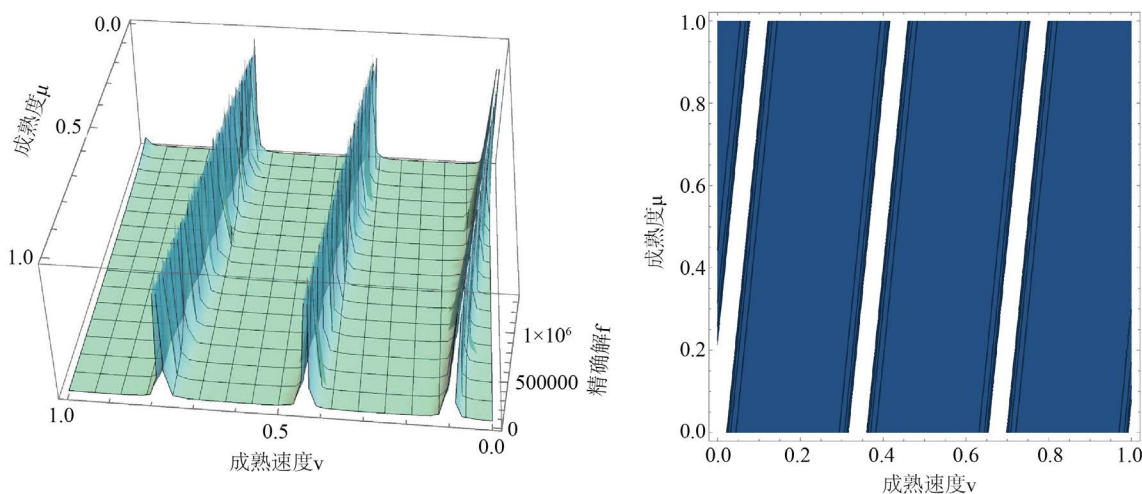


Figure 3. When $t = 10$, the solution evolves with v and μ

图 3. 当 $t = 10$ 时解随 v, μ 的演化过程

对精确解(13)当分别取 $t = 1, t = 5, t = 10$, $v \in (0, 1), \mu \in (0, 1)$ 时利用 Mathematica 软件绘制解随时间演化的图形。

- 1) $v \in (0, 1), \mu \in (0, 1)$ 在 $t = 1$ 时解的演化过程见图 4, 此时只有一个波峰。
- 2) $v \in (0, 1), \mu \in (0, 1)$ 在 $t = 5$ 时解的演化过程如图 5, 此时只有一个波峰。
- 3) $v \in (0, 1), \mu \in (0, 1)$ 在 $t = 10$ 时解的演化过程见图 6, 此时有两个波峰。

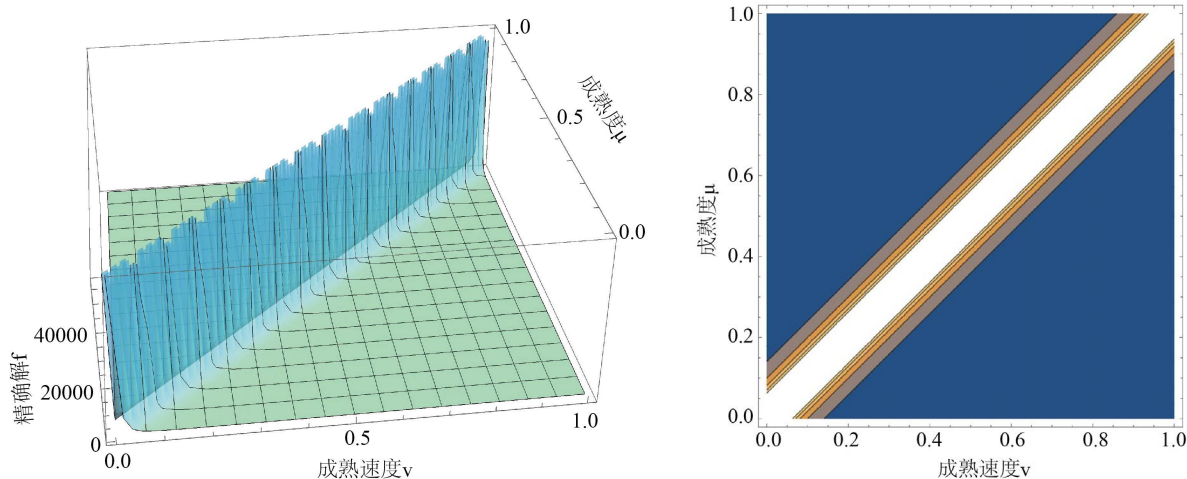


Figure 4. When $t = 1$, the solution evolves with v and μ

图 4. 当 $t = 1$ 时解随 v, μ 的演化过程

综上: 当 $m = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ 时, 由解(12)随时间的演化图形知, 随着时间的增大, 波峰个数变为一个、两个、三个。

当 $m = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ 时, 由解(13)随时间的演化图形知, 随着时间的增大, 波峰个数逐渐变为一个、一个、两个, 而造成这两种不同的原因可能与参数 m 的取值有关。

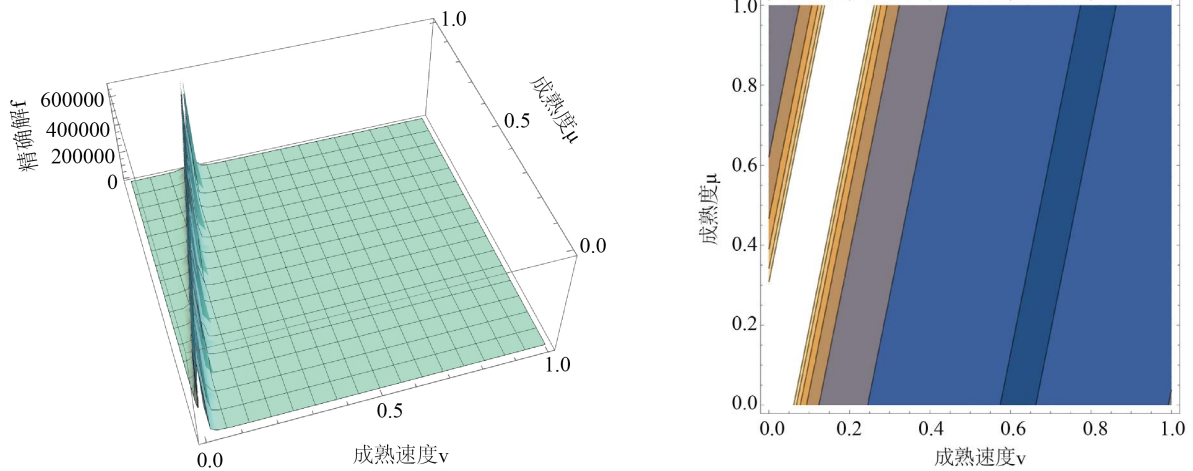


Figure 5. When $t = 5$, the solution evolves with v and μ

图 5. 当 $t = 5$ 时解随 v, μ 的演化过程

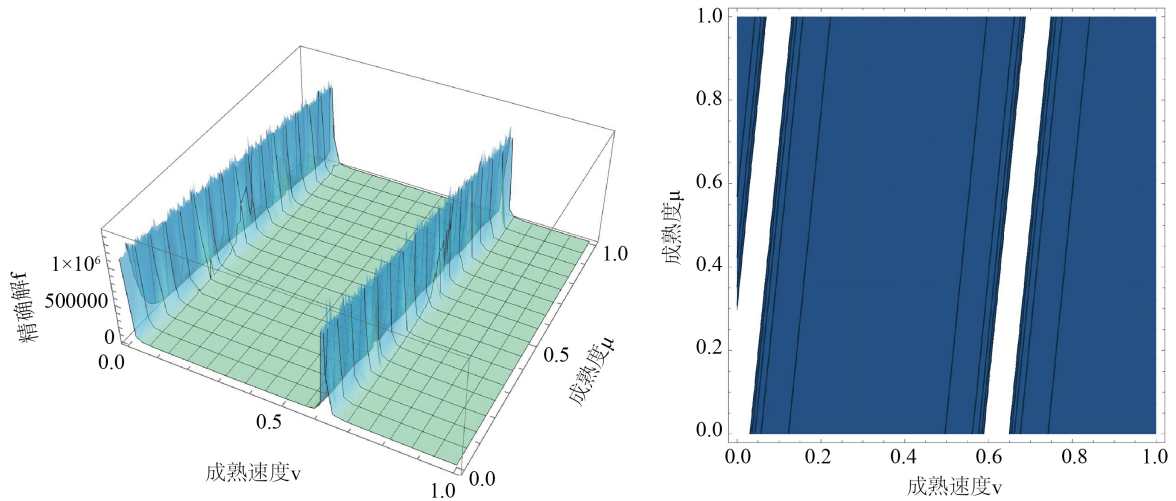


Figure 6. When $t = 10$, the solution evolves with v and μ

图 6. 当 $t = 10$ 时解随 v, μ 的演化过程

3. 结论

本文利用 F-展开法[10], 并借助 Mathematica 软件, 研究了描述肿瘤细胞增长模型的 Fokker-Planck 方程, 得到了该方程的两个精确解, 通过参数取值绘制解的图形, 直观简洁地展示了了解的演化性态。通过设定不同的待定函数, 采用相同的思路还可用该方法求得 Fokker-Planck 方程更多的精确解。

致 谢

感谢中央民族大学本科生研究训练计划(URTP)——BEIJ2020110002 的支持和张智勇导师的指导和帮助。

参考文献

[1] 史现花. CRE 方法在非线形偏微分方程中的应用[D]: [硕士学位论文]. 西安: 西北大学, 2017.

-
- [2] 张鹏鸽, 高淑萍, 朱佑彬. 肿瘤细胞增长模型的分析与研究[J]. 生物数学学报, 2016, 31(2): 239-242.
- [3] Rotenberg, M. (1982) Theory of Distributed Quiescent State in the Cell Cycle. *Journal of Theoretical Biology*, **96**, 495-509. [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(82\)90123-0](https://doi.org/10.1016/0022-5193(82)90123-0)
- [4] Rotenberg, M. (1983) Transport Theory for Growing Cell Populations. *Journal of Theoretical Biology*, **103**, 181-199. [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(83\)90024-3](https://doi.org/10.1016/0022-5193(83)90024-3)
- [5] Zhang, Z.Y. and Li, G.F. (2020) *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **93**, Article Number: 105506.
- [6] Zhang, W.G., Chang, Q.S. and Jiang, B.G. (2002) Explicit Exact Solitary-Wave Solutions for Compound KdV-Type and Compound KdV-Burgers-Type Equations with Nonlinear Terms of Any Order. *Chaos, Solitons and Fractals*, **13**, 311-319. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(00\)00272-1](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(00)00272-1)
- [7] 范恩贵, 张鸿庆. 非线性孤子方程的齐次平衡法[J]. 物理学报, 1998(3): 4-13.
- [8] 王小艳. Jacobi 椭圆函数展开解及在非线性的偏微分方程中的应用[D]: [硕士学位论文]. 沈阳: 东北大学, 2014.
- [9] 王书敏, 薛瑞梅, 姚若侠. 非线性偏微分方程的精确行波解[J]. 计算机技术与发展, 2019, 29(2): 101-105.
- [10] 詹艺珩. (G'/G)展开法及 F 展开法在非线性的发展方程求解中的应用[D]: [硕士学位论文]. 南充: 西华师范大学, 2019.