Advances in Applied Mathematics **应用数学进展, 2021, 10(1), 189-202**
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.101022

Hans汉斯

一类非线性反应扩散耦合系统的整体解和爆破

樊佳幸

西南交通大学数学学院，四川 成都
Email: x769313200@163.com

收稿日期：2020年12月19日；录用日期：2021年1月15日；发布日期：2021年1月22日

摘　要

本文研究一类带有扩散项的非线性抛物方程组的初边值问题，借助Sobolev嵌入定理，Gagliardo-Nirenberg不等式，利用Galerkin方法，建立了弱解整体存在和爆破的充分条件，结合伯努利不等式得到了弱解整体存在时的有界性。

关键词

非线性抛物方程组，Galerkin方法，整体解，爆破

Global Solution and Blow-Up for a Class of Nonlinear Reaction Diffusion Coupled Systems

Jiaxing Fan

College of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan
Email: x769313200@163.com

Received: Dec. 19th, 2020; accepted: Jan. 15th, 2021; published: Jan. 22nd, 2021

Abstract

In this paper, the initial boundary value problem for a class of Nonlinear Parabolic Equations with diffusion term is studied. By means of Sobolev embedding theorem, Gagliardo Nirenberg inequality and Galerkin method, sufficient conditions for the global existence and blow up of weak solutions are established. The boundedness of global existence of weak solutions is obtained by combining Bernoulli inequality.

文章引用: 樊佳幸. 一类非线性反应扩散耦合系统的整体解和爆破[J]. 应用数学进展, 2021, 10(1): 189-202.
DOI: 10.12677/aam.2021.101022

Keywords

Nonlinear Parabolic Equations, Galerkin Method, Global Solution, Blow up

1. 引言

本文研究如下带有扩散项的非线性抛物方程组的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^\gamma \Delta u = |u|^{p-1} u + \alpha(u - v), & (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ v_t - \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^\gamma \Delta v = |v|^{p-1} v + \alpha(v - u), & (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = v(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^\gamma \Delta u, \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x\right)^\gamma \Delta v$ 为扩散项，可知，其为非线性的，$\Omega \in R^n$ 为边界充分光滑的有界区域。常数 $\alpha, \gamma \in R$，$p > 1$。

(1.1)可用来描述热传导现象、半导体中的电子与空穴流、液体在多孔介质中的运动规律等问题。当 $\gamma = 0$ 时，(1.1)是经典的抛物型方程组，与之相关的抛物方程组整体解的存在和爆破已被众多学者进行了广泛的研究。当 $\gamma \neq 0$ 时，(1.1)即为反应扩散耦合系统，与之相关的抛物方程组的研究也有一些成果。例如，在文献[1]中，Carlos 等考虑了如下反应扩散耦合系统

$$\begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u + f(u - v) = \alpha(u - v), & (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ v_t - a(l(v))\Delta v - f(u - v) = \alpha(v - u), & (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = v(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \end{cases}$$

其中，$\Omega \in R^n$ 为边界充分光滑的有界区域，常数 $\alpha > 0$，$f : R \to R$，$a : R \to R$ 是利普希茨连续函数，且 $a(s) \geq m > 0 (s \in R)$，$l : L^2(\Omega) \to R$ 是线性连续函数。采用 Galerkin 方法和 Aubin 紧性定理，研究了弱解的整体存在性、唯一性及指数衰减。

Rui 等在文献[2]中考虑了有界域上带有更一般的非局部扩散项的非线性反应扩散耦合系统，其扩散项作用于两个线性形式 l_1, l_2 上，即

$$\begin{cases} u_t - a_1(l_1(u), l_2(u))\Delta u + \lambda_1 |u|^{p-2} u = f_1, & (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ v_t - a_2(l_1(v), l_2(v))\Delta v + \lambda_2 |v|^{p-2} v = f_2, & (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = v(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \end{cases}$$

其中，$\Omega \in R^n$ 为边界充分光滑的有界区域，常数 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$， $p > 1$。$f_1, f_2 \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$，$l_i : L^2(\Omega) \to R, i=1,2$ 是线性连续函数，即存在一个函数 $g_i \in L^2(\Omega)$，使得对所有的 $u \in L^2(\Omega)$，都有 $l_i(u) = l_{g_i}(u) = \int_\Omega g_i(x)u(x)\mathrm{d}x, i=1,2$ 成立。$0 < m \le a_i(s) \le M\left(s,r \in R, i=1,2\right)$，且 $a_i : R^2 \to R, i=1,2$ 是整体利普希茨连续函数，同样采用 Galerkin 方法和 Aubin 紧性定理，研究了弱解的整体存在性、唯一性以及指数衰减。

事实上，在以往大多是文献中，均假设扩散项系数的有界的，即存在正常数 m, M，使得 $0 < m \le a(s) \le M < \infty(s,r \in R)$，此时问题总是非退化的。但在刻画扰动传播的有限性等问题的反应扩散方程组时总会出现退化情形，因此有必要研究具有退化性的反应扩散方程组。本文旨在研究一种扩散项为 $\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^\gamma \Delta u, \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x\right)^\gamma \Delta v (\gamma \in R)$ 的情形，此时扩散项系数 $\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^\gamma, \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x\right)^\gamma (\gamma \in R)$ 可能是零或无穷大。受文献[3]的启发，结合 Sobolev 嵌入定理、Gagliardo-Nirenberg 不等式和伯努利不等式，利用 Galerkin 方法，建立了弱解的全局存在性、有界性及爆破的充分条件。

首先给出弱解的定义如下：

定义 1 $u, v \in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$，$\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial v}{\partial t} \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$，对任意的 $\omega \in H_0^1(\Omega), t \in [0,T]$，都有等式

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\omega + \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\nabla u \cdot \nabla \omega - |u|^{p-1} u\omega - \alpha(u-v)\omega \mathrm{d}x = 0$$

和

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\omega + \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x\right)\nabla v \cdot \nabla \omega - |u|^{p-1} v\omega - \alpha(v-u)\omega \mathrm{d}x = 0$$

成立，且

$$u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\ x \in \Omega,$$

则称 (u,v) 是问题(1.1)的一个弱解。

现给出本文主要结论如下：

定理 1 假设 $u_0(x), v_0(x) \in H_0^1(\Omega)$，$\alpha > 0$，$\gamma > \dfrac{p-1}{2}$，当 $n > 2$ 时，$1 < p \le \dfrac{n+2}{n-2}$；当 $n \le 2$ 时，$1 < p < \infty$。则问题(1.1)存在一个整体弱解 (u,v)，满足

$$u, v \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$
$$\nabla u, \nabla v \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

若 $n < 2$，则由初值函数 $\left(u_0(x), v_0(x)\right)$ 决定的整体弱解 (u,v) 是唯一的。

定理 2 假设定理 1 的条件成立，进一步假设 $\gamma \ge \dfrac{2\alpha}{C_5} - 1$，且

$$\|u_0\|_{L^2}^2 + \|v_0\|_{L^2}^2 \ge \frac{C_4 + 2C_5\gamma}{C_5(\gamma+1) - 2\alpha},$$

则有

$$\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \le \|u_0\|_{L^2}^2 + \|v_0\|_{L^2}^2,$$

其中，$C_4=\frac{2\gamma-P+1}{2\gamma+2}\left(\frac{\gamma+1}{p+1}\right)^{-\frac{p+1}{2\gamma-p+1}}\left(C_2^{\frac{(p+1)(2\gamma+2)}{2\gamma-p+1}}+C_3^{\frac{(p+1)(2\gamma+2)}{2\gamma-p+1}}\right)$，$C_2,C_3,C_5$ 为嵌入定理中不等式的系数。

定理 3 假设 $u_0(x),v_0(x)\in H_0^1(\Omega)$，$\alpha<0$，$0<\gamma<\frac{p-1}{2}$，$1<p<\frac{n+4}{n}$，则存在一个正常数

$$T_0=\frac{n-np+4\gamma+4}{c(p-1)(4\gamma-2n\gamma+4)}\left(\|u_0\|_{L^2}^2+\|v_0\|_{L^2}^2\right)^{\frac{(1-p)(2\gamma-n\gamma+2)}{n-np+4\gamma+4}},\ c\in R^+,$$

使得当 $0\le t\le T_0$ 时，问题(1.1)存在一个局部弱解 (u,v)，满足

$$u,v\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$
$$\nabla u,\nabla v\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right);$$
$$\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

注 1 由 $1<p<\frac{n+4}{n}$ 可推出当 $n>2$ 时，$1<p\le\frac{n+2}{n-2}$；当 $n\le 2$ 时，$1<p<\infty$。

注 2 因为 $p<\frac{n+4}{n}$，故有 $\frac{np-n-4}{4}<0<\gamma$，所以集合 $\left(\frac{np-n-4}{4},\frac{p-1}{2}\right)$ 不是空集。

定理 4 假设定理 3 的条件成立，且

$$\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u_0\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v_0\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\frac{1}{p+1}\|u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{1}{p+1}\|v_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{\alpha}{2}\|u_0-v_0\|_{L^2}^2<0,$$

则问题(1.1)满足初值函数的弱解不是全局的，即在有限时间

$$\frac{2}{c(p-1)}\left(\|u_0\|_{L^2}^2+\|v_0\|_{L^2}^2\right)^{-\frac{p-1}{2}}<T$$

内爆破。其中，$c=\frac{2p-4\gamma-2}{p+1}(2|\Omega|)^{\frac{1-p}{2}}$。

全文将 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ 和 $\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$ 分别简记为 $\|\cdot\|_{L^p}$ 和，$\|\cdot\|_{H^s}$，记 $(u,v)=\int_\Omega uv\mathrm{d}x$，$c$ 表示不依赖于未知函数的正常数，在不同地方不一定相同。

2. 准备工作

本节主要给出结论证明过程中需要的三个引理。

引理 1 [4] (Sobolev 嵌入定理)对任意函数 $u_0(x)\in H_0^1(\Omega)$，有

$$\|u\|_{L^{p+1}}\le C_1\|\nabla u\|_{L^2},$$

其中，当 $n>2$ 时，$0\le p\le\frac{n+2}{n-2}$；当 $n\le 2$ 时，$0\le p<\infty$，常数 C_1 仅依赖于 n,p,Ω。当 $n<2$ 时，$H_0^1(\Omega)$ 中的函数的连续的，且

$$sup|u|\le C_2\|\nabla u\|_{L^2},$$

常数 C_2 仅依赖于 n,Ω。

引理 2 [4] (Gagliardo-Nirenberg 不等式)对任意函数 $u(x)\in W_0^{1,p}(\Omega)$， $p\ge 1$ 且 $r\ge 1$，有如下不等式成立，

$$\|u\|_{L^q}\le C_3\|\nabla u\|_{L^p}^{\theta}\|u\|_{L^r}^{1-\theta},$$

其中

$$\theta=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\right)^{-1},$$

且

1) 当 $p\ge n=1$ 时， $r\le q\le\infty$；

2) 当 $n>1$ 且 $p<n$ 时，若 $r\le\frac{np}{n-p}$， 则 $r\le q\le\frac{np}{n-p}$；若 $r\ge\frac{np}{n-p}$， 则 $\frac{np}{n-p}\le q\le r$；

3) 当 $p=n>1$ 时， $r\le q\le\infty$，

4) 当 $p>n>1$ 时， $r\le q\le\infty$，

常数 C_3 仅依赖于 n,p,q,r。

引理 3 [5] (伯努利不等式) 若 $0\ne x>-1$， $\alpha\in R$，则有

$(1+x)^{\alpha}>1+\alpha x$，当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时；

$(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x$，当 $0<\alpha<1$ 时。

3. 当 $\gamma>\frac{p-1}{2}$ 时，解的全局性和有界性

证明定理 1：利用 Galerkin 方法。取空间 $H_0^1(\Omega)$ 的一组基 $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$，且 ω_i 是 $-\Delta$ 算子的狄利克雷问题的特征函数：

$$\begin{cases}-\Delta\omega_i=\lambda\omega_i\\ \omega_i|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{3.1}$$

将(3.1)两边同时与 ω_i 做内积，可知特征值 $\lambda_i\ge 0, i\in N^*$，将 ω_i 标准化，使得 $\|\omega_i\|_{L^2}=1$。接下来，寻找(1.1)具有以下形式的解

$$u_m(x,t)=\sum_{i=1}^{m}\theta_{im}(t)\omega_i(x),$$

$$v_m(x,t)=\sum_{i=1}^{m}\phi_{im}(t)\omega_i(x),$$

其中 $\theta_{im}(t),\phi_{im}(t)\in C^1([0,T])$，且由以下常微分方程决定

$$(u_{mt},\omega_j)+\left(\left(\int_\Omega|\nabla u_m|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\gamma}\nabla u_m,\nabla\omega_j\right)=\left(|u_m|^{p-1}u_m,\omega_j\right)+\left(\alpha(u_m-v_m),\omega_j\right),1\le j\le m,\tag{3.2}$$

$$(v_{mt},\omega_j)+\left(\left(\int_\Omega|\nabla v_m|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\gamma}\nabla v_m,\nabla\omega_j\right)=\left(|v_m|^{p-1}v_m,\omega_j\right)+\left(\alpha(v_m-u_m),\omega_j\right),1\le j\le m,\tag{3.3}$$

且初值条件满足

$$u_m(0)=u_{0m}，\quad u_{0m}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{im}(t)\omega_i(x)\to u_0 \text{ 在 } H_0^1(\Omega) \text{ 中}，\quad m\to\infty，\tag{3.4}$$

$$v_m(0)=v_{0m}，\quad v_{0m}=\sum_{i=1}^{m}\beta_{im}(t)\omega_i(x)\to v_0 \text{ 在 } H_0^1(\Omega) \text{ 中}，\quad m\to\infty 。\tag{3.5}$$

因此，由常微分方程中 Picard 迭代法，(3.2)~(3.5)在某一区间$[0,t_m],0<t_m<T$中存在一个局部解$(u_m(t),v_m(t))$。下面证明，对任意的$T>0$，这样的解可以通过先验估计延拓到整个区间$[0,T]$上。

在(3.2)的两边同时乘以θ'_{im}，对 i 从 1 到 m 求和，得到

$$\begin{aligned}&\int_0^t\|u_{mt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\int_0^t\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|\nabla u_m\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{p+1}\|u_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{1}{p+1}\|u_{0m}\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\frac{\alpha}{2}\|u_m\|_{L^2}^2-\frac{\alpha}{2}\|u_0\|_{L^2}^2+\alpha\int_0^t\int_\Omega v_m u_{mt}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{3.6}$$

令$f(t)=\|\nabla u_m\|_{L^2}^2$，则(3.6)左边第二项

$$\frac{1}{2}\int_0^t\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|\nabla u_m\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)^\gamma\,\mathrm{d}f(\tau)=\frac{1}{2\gamma+2}f(t)^{\gamma+1}-\frac{1}{2\gamma+2}f(0)^{\gamma+1},$$

换回原函数名，即

$$\frac{1}{2}\int_0^t\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|\nabla u_m\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u_{0m}\|_{L^2}^{2\gamma+2},\tag{3.7}$$

将(3.7)代入(3.6)整理可得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\|u_{mt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\frac{1}{p+1}\|u_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{\alpha}{2}\|u_m\|_{L^2}^2\\&=\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u_{0m}\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\frac{1}{p+1}\|u_{0m}\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{\alpha}{2}\|u_{0m}\|_{L^2}^2-\alpha\int_0^t\int_\Omega v_m u_{mt}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{3.8}$$

同理，在(3.3)的两边同时乘以ϕ'_{im}，可以得到

$$\begin{aligned}&\int_0^t\|v_{mt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\frac{1}{p+1}\|v_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{\alpha}{2}\|v_m\|_{L^2}^2\\&=\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v_{0m}\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\frac{1}{p+1}\|v_{0m}\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{\alpha}{2}\|v_{0m}\|_{L^2}^2-\alpha\int_0^t\int_\Omega u_m v_{mt}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{3.9}$$

将(3.8)和(3.9)左右两边相加有

$$\begin{aligned}&\int_0^t\|u_{mt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau+\int_0^t\|v_{mt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}\\&-\frac{1}{p+1}\|u_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{1}{p+1}\|v_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{\alpha}{2}\|u_m\|_{L^2}^2-\frac{\alpha}{2}\|v_m\|_{L^2}^2\\&=c-\alpha\int_0^t\int_\Omega(v_m u_{mt}+u_m v_{mt})\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\&=c-\alpha\int_0^t\int_\Omega(v_m u_m)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\&=c-\left(\alpha\int_\Omega v_m u_m\mathrm{d}x-\alpha\int_\Omega v_{0m}u_{0m}\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

整理化简即

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\|u_{mt}\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau+\int_0^t\|v_{mt}\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}\\
&=\frac{1}{p+1}\|u_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\frac{1}{p+1}\|v_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\frac{\alpha}{2}\|u_m\|_{L^2}^2+\frac{\alpha}{2}\|v_m\|_{L^2}^2-\alpha\int_\Omega v_m u_m\mathrm{d}x+c\\
&=\frac{1}{p+1}\|u_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\frac{1}{p+1}\|v_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\frac{\alpha}{2}\int_\Omega|u_m-v_m|^2\,\mathrm{d}x+c\\
&\le\frac{1}{p+1}\|u_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\frac{1}{p+1}\|v_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\frac{\alpha}{2}\|u_m\|_{L^2}^2+\frac{\alpha}{2}\|v_m\|_{L^2}^2+c,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

由于 $\gamma>\frac{p-1}{2}$，当 $n>2$ 时，$1<p\le\frac{2}{n-2}$；当 $n\le2$ 时，$1<p<\infty$，利用引理 1 和 Young 不等式，(3.10)可化为

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\|u_{mt}\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau+\int_0^t\|v_{mt}\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}\\
&\le c+c\left(\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}\right)^{\frac{p+1}{2\gamma+2}}+c\left(\|\nabla v_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}\right)^{\frac{p+1}{2\gamma+2}}+\frac{\alpha}{2}\left(\|u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}\right)^{\frac{2}{2\gamma+2}}+\frac{\alpha}{2}\left(\|v_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}\right)^{\frac{2}{2\gamma+2}}\\
&\le c+\frac{1}{8\gamma+8}\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{1}{8\gamma+8}\|\nabla v_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{1}{8\gamma+8}\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{1}{8\gamma+8}\|\nabla v_m\|_{L^2}^{2\gamma+2},
\end{aligned}
$$

即

$$
\int_0^t\|u_{mt}\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau+\int_0^t\|v_{mt}\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4\gamma+4}\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{1}{4\gamma+4}\|\nabla v_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}\le c
$$

由此可以得到

$$
\int_0^t\|u_{mt}\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau\le c,\ \int_0^t\|v_{mt}\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau\le c,\tag{3.11}
$$

$$
\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}\le c,\ \|\nabla v_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}\le c,\tag{3.12}
$$

由(3.12)和 Poincaré 不等式，

$$
\|u_m\|_{L^2}^2\le c\|\nabla u_m\|_{L^2}^2\le c,\tag{3.13}
$$

$$
\|v_m\|_{L^2}^2\le c\|\nabla v_m\|_{L^2}^2\le c.\tag{3.14}
$$

因此，由先验估计(3.11)~(3.14)可知，存在一个函数 u,v 和 $\{u_m\},\{v_m\}$ 的子序列，不妨仍记 $\{u_m\},\{v_m\}$，使得

$$
u_m\to u,v_m\to v\text{ 弱*收敛于 }L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\text{ 中，}\tag{3.15}
$$

$$
\nabla u_m\to\nabla u,\nabla v_m\to\nabla v\text{ 弱*收敛于 }L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\text{ 中，}\tag{3.16}
$$

$$
\frac{\partial u_m}{\partial t}\to\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v_m}{\partial t}\to\frac{\partial v}{\partial t}\text{ 弱收敛于 }L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\text{ 中。}\tag{3.17}
$$

一方面，由 Aubin 紧性定理，$W=\left\{\Phi\mid\Phi\in L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),\Phi_t\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right\}$ 紧嵌入到 $L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ 中，根据(3.15)~(3.17)可以得到

$$
u_m\to u\text{ 在 }L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\text{ 中，}\tag{3.18}
$$

于是，存在 $\{u_m\}$ 的子序列，不妨仍记为 $\{u_m\}$，使得

$$u_m \to u \text{ 几乎处处收敛于 } \Omega\times[0,T] \text{ 中}$$

因为 $s \to |s|^{p-1}s$ 是一个连续函数，所以

$$|u_m|^{p-1}u_m \to |u|^{p-1}u \text{ 几乎处处收敛于 } \Omega\times[0,T] \text{ 中}$$

由 u_m 在 $L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ 中的一致有界性和引理 1，$|u_m|^{p-1}u_m$ 在 $L^{\frac{p+1}{p}}\left(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)\right)$ 上一致有界，则

$$|u_m|^{p-1}u_m \to |u|^{p-1}u \text{ 弱收敛于 } L^{\frac{p+1}{p}}\left(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)\right) \text{中}$$

另一方面，由(3.18)可知

$$\|\nabla u_m\|_{L^2} \to \|\nabla u\|_{L^2} \text{ 在 } L^\infty[0,T] \text{ 中}$$

为了讨论方便，记 $a(u)=\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma$，由于 a 是连续的，可以得到

$$a(u_m) \to a(u) \text{ 在 } L^\infty[0,T] \text{ 中}$$

固定(3.2)中的 j，由于 $\frac{p+1}{p}<2$，且每一项均在 $L^{\frac{p+1}{p}}[0,T]$ 中弱收敛，同理可讨论序列 $\{v_m\}$ 的收敛性。于是令 $m\to\infty$，可以得到

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\omega_j + a(u)\nabla u\cdot\nabla\omega_j - |u|^{p-1}u\omega_j - \alpha(u-v)\omega_j\right)\mathrm{d}x = 0,\quad \forall j=1,2,\cdots.$$

根据基 $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ 的稠密性，

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\omega + a(u)\nabla u\cdot\nabla\omega - |u|^{p-1}u\omega - \alpha(u-v)\omega\right)\mathrm{d}x = 0,\quad \forall \omega\in H_0^1(\Omega).$$

由(3.4)，(3.16)，(3.17)知，在 $L^2(\Omega)$ 中，$u_m(0)\rightharpoonup u(0)$，$u_m(0)\rightharpoonup u_0$，根据极限的唯一性，$u(0)=u_0$。以类似的方式讨论有 $v(0)=v_0$。因此 (u,v) 是问题(1.1)的整体弱解。

唯一性的证明如下：

令 (u_1,v_1) 和 (u_2,v_2) 是(1.1)的两个满足初值条件的整体弱解，且 $(u_1-u_2)(x,0)=0$，$(v_1-v_2)(x,0)=0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1 - \left(\int_\Omega |\nabla u_1|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma \Delta u_1 = |u_1|^{p-1}u_1 + \alpha(u_1-v_1), \tag{3.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_1 - \left(\int_\Omega |\nabla v_1|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma \Delta v_1 = |v_1|^{p-1}v_1 + \alpha(v_1-u_1), \tag{3.20}$$

且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_2 - \left(\int_\Omega |\nabla u_2|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma \Delta u_2 = |u_2|^{p-1}u_2 + \alpha(u_2-v_2), \tag{3.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_2 - \left(\int_\Omega |\nabla v_2|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma \Delta v_2 = |v_2|^{p-1}v_2 + \alpha(v_2-u_2), \tag{3.22}$$

进一步的，由(3.19)~(3.22)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_1-u_2,h_1)+\left(\int_\Omega|\nabla u_1|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma\int_\Omega\nabla u_1\cdot\nabla h_1\mathrm{d}x-\left(\int_\Omega|\nabla u_2|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma\int_\Omega\nabla u_2\cdot\nabla h_1\mathrm{d}x$$
$$=\left(|u_1|^{p-1}u_1-|u_2|^{p-1}u_2,h_1\right)+\alpha\left((u_1-v_1)-(u_2-v_2),h_1\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_1-v_2,h_2)+\left(\int_\Omega|\nabla v_1|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma\int_\Omega\nabla v_1\cdot\nabla h_2\mathrm{d}x-\left(\int_\Omega|\nabla v_2|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma\int_\Omega\nabla v_2\cdot\nabla h_2\mathrm{d}x$$
$$=\left(|v_1|^{p-1}v_1-|v_2|^{p-1}v_2,h_2\right)+\alpha\left((v_1-u_1)-(v_2-u_2),h_2\right),$$

接下来，取 $h_1=u_1-u_2,h_2=v_1-v_2$ 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_1-u_2\|_{L^2}^2+\left(\int_\Omega|\nabla u_1|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma\left(\nabla u_1,\nabla(u_1-u_2)\right)-\left(\int_\Omega|\nabla u_2|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma\left(\nabla u_2,\nabla(u_1-u_2)\right)\\
&=\left(|u_1|^{p-1}u_1-|u_2|^{p-1}u_2,u_1-u_2\right)+\alpha(u_1-v_1,u_1-u_2)-\alpha(u_2-v_2,u_1-u_2)\\
&\le c\int_\Omega\sup_{x\in\Omega}\left(|u_1|^{p-1},|u_2|^{p-1}\right)(u_1-u_2)^2\,\mathrm{d}x+\alpha\|u_1-u_2\|_{L^2}^2-\alpha(v_1-v_2,u_1-u_2)\\
&\le c\int_\Omega\left(|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1}\right)(u_1-u_2)^2\,\mathrm{d}x+\alpha\|u_1-u_2\|_{L^2}^2+\frac{\alpha}{2}\|v_1-v_2\|_{L^2}^2+\frac{\alpha}{2}\|u_1-u_2\|_{L^2}^2\\
&\le c\int_\Omega(u_1-u_2)^2\mathrm{d}x\cdot\sup_{x\in\Omega}\left(|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1}\right)+\frac{3\alpha}{2}\|u_1-u_2\|_{L^2}^2+\frac{\alpha}{2}\|v_1-v_2\|_{L^2}^2.
\end{aligned}\tag{3.23}$$

同理，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v_1-v_2\|_{L^2}^2+\left(\int_\Omega|\nabla v_1|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma\left(\nabla v_1,\nabla(v_1-v_2)\right)-\left(\int_\Omega|\nabla v_2|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma\left(\nabla v_2,\nabla(v_1-v_2)\right)\\
&\le c\int_\Omega(v_1-v_2)^2\mathrm{d}x\cdot\sup_{x\in\Omega}\left(|v_1|^{p-1}+|v_2|^{p-1}\right)+\frac{3\alpha}{2}\|v_1-v_2\|_{L^2}^2+\frac{\alpha}{2}\|u_1-u_2\|_{L^2}^2.
\end{aligned}\tag{3.24}$$

而(3.23)左边第二项和第三项利用 Hölder 不等式可化简为

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\int_\Omega|\nabla u_1|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma\nabla u_1-\left(\int_\Omega|\nabla u_2|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma\nabla u_2,\nabla u_1-\nabla u_2\right)\\
&=\|\nabla u_1\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\|\nabla u_2\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\|\nabla u_1\|_{L^2}^{2\gamma}\int_\Omega\nabla u_1\cdot\nabla u_2\mathrm{d}x-\|\nabla u_2\|_{L^2}^{2\gamma}\int_\Omega\nabla u_1\cdot\nabla u_2\mathrm{d}x\\
&\ge\|\nabla u_1\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\|\nabla u_2\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\|\nabla u_1\|_{L^2}^{2\gamma+1}\|\nabla u_2\|_{L^2}-\|\nabla u_2\|_{L^2}^{2\gamma+1}\|\nabla u_2\|_{L^2}\\
&=\left(\|\nabla u_1\|_{L^2}^{2\gamma+1}-\|\nabla u_2\|_{L^2}^{2\gamma+1}\right)\left(\|\nabla u_1\|_{L^2}-\|\nabla u_2\|_{L^2}\right)\\
&>0.
\end{aligned}$$

同理，(3.24)左边第二项和第三项

$$\left(\left(\int_\Omega|\nabla v_1|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma\nabla v_1-\left(\int_\Omega|\nabla v_2|^2\,\mathrm{d}x\right)^\gamma\nabla v_2,\nabla v_1-\nabla v_2\right)>0.$$

于是，将(3.23)和(3.24)左右两边分别相加，由引理 1 可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_1-u_2\|_{L^2}^2+\|v_1-v_2\|_{L^2}^2\right)\\
&\le c\int_\Omega(u_1-u_2)^2\mathrm{d}x\cdot\sup_{x\in\Omega}\left(|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1}\right)\\
&\quad+c\int_\Omega(v_1-v_2)^2\mathrm{d}x\cdot\sup_{x\in\Omega}\left(|v_1|^{p-1}+|v_2|^{p-1}\right)+2\left(\|u_1-u_2\|_{L^2}^2+\|v_1-v_2\|_{L^2}^2\right)\\
&\le c\left(\|u_1-u_2\|_{L^2}^2+\|v_1-v_2\|_{L^2}^2\right).
\end{aligned}$$

所以，根据 Growall 不等式，

$$\|u_1-u_2\|_{L^2}^2+\|v_1-v_2\|_{L^2}^2=0.$$

证明定理 2：将问题(1.1)中两个方程分别与 u,v 做内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}=\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\alpha\|u\|_{L^2}^2-\alpha\int_\Omega uv\mathrm{d}x, \tag{3.25}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_{L^2}^2+\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}=\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\alpha\|v\|_{L^2}^2-\alpha\int_\Omega uv\mathrm{d}x, \tag{3.26}$$

将(3.25)与(3.26)左右两边相加有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}=\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\alpha\|u-v\|_{L^2}^2, \tag{3.27}$$

因为 $\gamma>\frac{p-1}{2}$，且由引理 1 和 Young 不等式得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}\\&\le C_2^{P+1}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}\right)^{\frac{p+1}{2\gamma+2}}+C_3^{P+1}\left(\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}\right)^{\frac{p+1}{2\gamma+2}}+\alpha\|u-v\|_{L^2}^2\\&\le\frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\alpha\|u-v\|_{L^2}^2+C_4,\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^2}^2\right)+\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}\le 2\alpha\|u-v\|_{L^2}^2+C_4\le 2\alpha\left(\|u\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^2}^2\right)+C_4. \tag{3.28}$$

其中，$C_4=\frac{2\gamma-p+1}{2\gamma+2}\left(\frac{\gamma+1}{p+1}\right)^{-\frac{p+1}{2\gamma-p+1}}\left(C_2^{\frac{(p+1)(2\gamma+2)}{2\gamma-p+1}}+C_3^{\frac{(p+1)(2\gamma+2)}{2\gamma-p+1}}\right)$，$C_2,C_3,C_5$ 为嵌入定理中不等式的系数。由引理 3 可知

$$\|u\|_{L^2}^{2\gamma+2}=\left(1+\left(\|u\|_{L^2}^2-1\right)\right)^{\gamma+1}>1+(\gamma+1)\left(\|u\|_{L^2}^2-1\right), \tag{3.29}$$

$$\|v\|_{L^2}^{2\gamma+2}=\left(1+\left(\|v\|_{L^2}^2-1\right)\right)^{\gamma+1}>1+(\gamma+1)\left(\|v\|_{L^2}^2-1\right), \tag{3.30}$$

将(3.29)与(3.30)代入(3.28)中，即 $y=\|u\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^2}^2$ 满足微分不等式

$$y'+\left(C_5(\gamma+1)-2\alpha\right)y\le C_4+2C_5\gamma, \tag{3.31}$$

在(3.31)两边同时乘以 $\mathrm{e}^{(c_1(\gamma+1)-2\alpha)t}$，则有

$$\mathrm{e}^{(C_5(\gamma+1)-2\alpha)t}y'+\left(C_5(\gamma+1)-2\alpha\right)\mathrm{e}^{(C_5(\gamma+1)-2\alpha)t}y\le\left(C_4+2C_5\gamma\right)\mathrm{e}^{(C_5(\gamma+1)-2\alpha)t}, \tag{3.32}$$

即

$$\left(\mathrm{e}^{(C_5(\gamma+1)-2\alpha)t}y\right)'\le\left(C_4+2C_5\gamma\right)\mathrm{e}^{(C_5(\gamma+1)-2\alpha)t},$$

两边同时对 t 积分，可以得到

$$e^{(C_5(\gamma+1)-2\alpha)t}y-y(0)\le\frac{C_4+2C_5\gamma}{C_5(\gamma+1)-2\alpha}\left(e^{(C_5(\gamma+1)-2\alpha)t}-1\right),$$

整理化简则有

$$y\le\left(y(0)-\frac{C_4+2C_5\gamma}{C_5(\gamma+1)-2\alpha}\right)e^{-(C_5(\gamma+1)-2\alpha)t}+\frac{C_4+2C_5\gamma}{C_5(\gamma+1)-2\alpha}.$$

由于$\gamma\ge\frac{2\alpha}{C_5}-1$，故$e^{-(C_5(\gamma+1)-2\alpha)t}\le1$，又因为$\frac{C_4+2C_5\gamma}{C_5(\gamma+1)-2\alpha}\le y(0)$，所以

$$y\le\left(y(0)-\frac{C_4+2C_5\gamma}{C_5(\gamma+1)-2\alpha}\right)e^{-(C_5(\gamma+1)-2\alpha)t}+\frac{C_4+2C_5\gamma}{C_5(\gamma+1)-2\alpha}\le y(0).$$

换回原函数名，即结论成立。

注 3 由于$p>1$，故$\gamma+1>\frac{p+1}{2}>1$，又$\|u\|_{L^2}^2\ge0$，所以$\|u\|_{L^2}^2-1\ge-1$，当$\|u\|_{L^2}^2-1>-1$时，由引理 3，(3.29)显然成立；当$\|u\|_{L^2}^2-1=-1$时，代入(3.29)两边验证可知其也成立，当$\|u\|_{L^2}^2-1=0$时，(3.29)等号成立。(3.30)同理可得。

4. 当$0<\gamma<\frac{p-1}{2}$时，解的局部存在性和爆破

证明定理 3：依旧采用 Galerkin 方法，$\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{u_{0m}\},\{u_m\}$与定理 1 中所述相同。同理，因为$\gamma>0$，由常微分方程中 Picard 迭代法，(3.2)~(3.5)在某一区间$[0,t_m],0<t_m<T$中存在一个局部解$(u_m(t),v_m(t))$。

在(3.2)，(3.3)的两边分别同时乘以θ_{im},ϕ_{im}，并对对 i 从 1 到 m 求和，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2+\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}=\|u_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\alpha\|u_m\|_{L^2}^2-\alpha\int_\Omega u_m v_m dx,\tag{4.1}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_m\|_{L^2}^2+\|\nabla v_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}=\|v_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\alpha\|v_m\|_{L^2}^2-\alpha\int_\Omega u_m v_m dx,\tag{4.2}$$

由于$\alpha<0$，于是将(4.1)，(4.2)左右两边分别相加可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_m\|_{L^2}^2+\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\|\nabla v_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}\\&=\|u_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\|v_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\alpha\|u_m-v_m\|_{L^2}^2\\&\le\|u_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\|v_m\|_{L^{p+1}}^{p+1}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

因为$1<p<\frac{n+4}{n}$，所以$\frac{1}{2}-\frac{1}{n}<\frac{1}{p+1}<\frac{1}{2}$，于是根据引理 2 可以得到

$$\left|\int_\Omega u_m^{p+1}dx\right|\le C_3\left(\|\nabla_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}\right)^{\delta}\|u_m\|_{L^2}^{\delta'},\tag{4.4}$$

由于$\gamma>\frac{np-n-4}{4}$，所以

$$\delta=\frac{(p+1)\theta}{2\gamma+2}=\frac{np-n}{4\gamma+4}<1,$$

又因为$\gamma < \frac{p-1}{2}$，故有

$$\delta' = (1-\theta)(p+1) = \frac{n-np+2p+2}{2} > 0,$$

其中，θ是由$\frac{1}{p+1} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\theta + \frac{1}{2}(1-\theta)$唯一确定的[0, 1]中的数，于是根据 Young 不等式，

$$\left|\int_\Omega u_m^{p+1}\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2} + \frac{c}{2}\|u_m\|_{L^2}^{2\delta''}, \tag{4.5}$$

其中$\delta'' = \frac{\delta'}{2(1-\delta)} > 1$。同理

$$\left|\int_\Omega v_m^{p+1}\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{2}\|\nabla v_m\|_{L^2}^{2\gamma+2} + \frac{c}{2}\|v_m\|_{L^2}^{2\delta''}. \tag{4.6}$$

将(4.5)，(4.6)代入(4.3)中则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|_{L^2}^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v_m\|_{L^2}^2 \le c\|u_m\|_{L^2}^{2\delta''} + c\|v_m\|_{L^2}^{2\delta''} \le c\left(\|u_m\|_{L^2}^2 + \|v_m\|_{L^2}^2\right)^{\delta''}, \tag{4.7}$$

于是，微分不等式(4.7)的解$\|u_m\|_{L^2}^2 + \|v_m\|_{L^2}^2$可由如下初值问题的解来表示，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cy^{\delta''},\ y(0) = y_0 = \|u_{0m}\|_{L^2}^2 + \|v_{0m}\|_{L^2}^2, \tag{4.8}$$

如果

$$t < t_\infty = \frac{1}{c(\delta''-1)y_0^{\delta''-1}}, \tag{4.9}$$

则有(4.8)的解是有限的，因此，在区间$0 \le t \le T_0 = \frac{t_\infty}{2}$内，可以得到

$$\|u_m(t)\|_{L^2}^2 + \|v_m(t)\|_{L^2}^2 \le c, \tag{4.10}$$

于是根据(3.10)，(4.4)，(4.10)有

$$\|u_m(t)\|_{L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))} \le c,\ \|v_m(t)\|_{L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))} \le c, \tag{4.11}$$

且

$$\|u_{mt}(t)\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \le c,\ \|v_{mt}(t)\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \le c, \tag{4.12}$$

$$\|\nabla u_m(t)\|_{L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))} \le c,\ \|\nabla v_m(t)\|_{L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))} \le c. \tag{4.13}$$

由(4.11)~(4.13)和 Aubin 紧性定理，重复定理 1 的证明过程，可以得到(u,v)是问题(1.1)在区间$0 \le t \le T_0$上的弱解。

下面证明问题(1.1)满足初值函数的弱解不是全局的，即在有限时间爆破。

证明定理 4：将问题(1.1)中两个方程分别与u_t, v_t做内积可得

$$\|u_t\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\gamma+2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2} = \frac{1}{p+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2}^2 - \alpha\int_\Omega vu_t\mathrm{d}x, \tag{4.14}$$

$$\|v_t\|_{L^2}^2+\frac{1}{2\gamma+2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}=\frac{1}{p+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_{L^2}^2-\alpha\int_\Omega uv_t\mathrm{d}x, \tag{4.15}$$

将(4.14)与(4.15)左右两边分别相加有

$$\begin{aligned}&\|u_t\|_{L^2}^2+\|v_t\|_{L^2}^2+\frac{1}{2\gamma+2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{1}{2\gamma+2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}\\&=\frac{1}{p+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\frac{1}{p+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2}^2+\frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_{L^2}^2-\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega uv\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\|u_t\|_{L^2}^2+\|v_t\|_{L^2}^2+\frac{1}{2\gamma+2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{1}{2\gamma+2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}\\&=\frac{1}{p+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\frac{1}{p+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u-v\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{\alpha}{2}\|u-v\|_{L^2}^2\right)<0.$$

两边关于 t 积分得到

$$\begin{aligned}&-\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}\geq-\frac{2\gamma+2}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{2\gamma+2}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\alpha(\gamma+1)\|u-v\|_{L^2}^2\\&-\|\nabla u_0\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\|\nabla v_0\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{2\gamma+2}{p+1}\|u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\frac{2\gamma+2}{p+1}\|v_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\alpha(\gamma+1)\|u_0-v_0\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{4.16}$$

令

$$F(t)=\|u\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^2}^2,$$

$$E(t)=\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{\alpha}{2}\|u-v\|_{L^2}^2,$$

则由(4.16)可以得到

$$\begin{aligned}F'(t)&=2(u,u_t)+2(v,v_t)\\&=2\left(u,\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^\gamma\Delta u+|u|^{p-1}u+\alpha(u-v)\right)\\&\quad+2\left(v,\left(\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x\right)^\gamma\Delta v+|v|^{p-1}v+\alpha(u-v)\right)\\&=2\left(-\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\alpha\|u-v\|_{L^2}^2\right)\\&\geq-(4\gamma+4)E(0)+\frac{2p-4\gamma-2}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}+\frac{2p-4\gamma-2}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}-2\alpha\gamma\|u-v\|_{L^2}^2,\end{aligned} \tag{4.17}$$

由 Hölder 不等式有

$$\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}\geq|\Omega|^{\frac{1-p}{2}}\left(\|u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{p+1}{2}}. \tag{4.18}$$

因为$\alpha<0$，$0<\gamma<\frac{p-1}{2}$，$E(0)<0$，将(4.18)代入(4.17)，根据不等式

$$|a+b|^n \le 2^{n-1}\left(a^n+b^n\right)$$

可以得到

$$F'(t) \ge cF(t)^{\frac{p+1}{2}},$$

即

$$F(t)^{\frac{p-1}{2}} \ge \frac{1}{F(0)^{-\frac{p-1}{2}}-\frac{p-1}{2}ct},$$

其中，$c=\frac{2p-4\gamma-2}{p+1}\left(2|\Omega|\right)^{\frac{1-p}{2}}$。因此，当$t\to\frac{2}{c(p-1)}\left(\|u_0\|_{L^2}^2+\|v_0\|_{L^2}^2\right)^{-\frac{p-1}{2}}<T$时，$\left(\|u\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^2}^2\right)^{\frac{p-1}{2}}\to\infty$，故结论成立。

参考文献

[1] Raposo, C.A., *et al*. (2008) Solution and Asymptotic Behaviour for a Nonlocal Coupled System of Reaction-Diffusion. *Acta Applicandae Mathematicae*, **102**, 37-56. https://doi.org/10.1007/s10440-008-9207-5

[2] Rui, M.P. (2016) A Reaction-Diffusion Model for the Non-Local Coupled System: Existence, Uniqueness, Long-Time Behaviour and Localization Properties of Solutions. *IMA Journal Applied Mathematics*, **81**, 344-364. https://doi.org/10.1093/imamat/hxv041

[3] Tsutsumi, M. (1972) Existence and Nonexistence of Global Solutions for Nonlinear Parabolic Equations. *Publicational of the Research Institute for Mathematical Sciences*, **8**, 211-229. https://doi.org/10.2977/prims/1195193108

[4] Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A. and Uralceva, N.N. (1968) Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/mmono/023

[5] 葛健芽. Bernoulli 不等式的几个标记[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2003, 26(2): 119-122.