

一类参数式李氏卵形曲线

李湘江

长沙理工大学工程训练中心, 湖南 长沙

Email: cslxj@163.com

收稿日期: 2020年12月25日; 录用日期: 2021年1月19日; 发布日期: 2021年1月28日

摘要

本文给出李氏卵形曲线和李氏卵圆及李氏心脏线的定义, 提出一类参数式方程, 证明其在一定条件下可为李氏卵形曲线、李氏卵圆及李氏心脏线。并获得了这类卵形曲线的面积、周长、质心坐标、转动惯量、旋转卵形体的体积等重要公式。

关键词

李氏卵形曲线, 李氏卵圆, 李氏心脏线, 参数式卵形曲线方程, 卵心, 长半径, 短半径, 对称半径

A Kind of Parametric Li's Oval Curve

Xiangjiang Li

Engineering Training Center, Changsha University of Science & Technology, Changsha Hunan

Email: cslxj@163.com

Received: Dec. 25th, 2020; accepted: Jan. 19th, 2021; published: Jan. 28th, 2021

Abstract

In this paper, the definitions of Li's oval curve, Li's oval and Li's cardioid are given; a kind of parametric equation is proposed, which is proved to be Li's oval, Li's Oval circle and Li's cardioid under certain conditions. The important formulas of the area, circumference, centroid coordinate, moment of inertia and volume of rotating oval ball are calculated.

Keywords

Li's Oval Curve, Li's Oval, Li's Cardioid, Parametric Oval Equation, Oval Center, Long Radius, Short Radius, Symmetric Radius



1. 引言

笔者在文[1]中给出了李氏卵圆及其相关概念的定义, 并提出了一类四次李氏卵圆方程, 本文在此基础上给出李氏卵形曲线、李氏卵圆及李氏心脏线的定义, 而把李氏卵圆作为李氏卵形曲线的一种特殊情况包括在李氏卵形曲线中, 同时发现并证明一类参数式方程为李氏卵形曲线, 并获得了这类卵形曲线的面积、周长、质心坐标、转动惯量、旋转卵形体的体积等重要公式。

2. 定义

定义 1: 平面曲线 L , 若满足如下条件:

- ① L 有一条对称轴且是闭合的;
- ② L 上有唯一一对对称点, 设为 S, T 到对称轴的距离最大;
- ③ L 与其对称轴有且仅有两个交点, 设为 P, Q , 又 PQ 与 ST 交于一点设为 O , 且 $OP > OQ$;
- ④ L 处处光滑, 或者 L 上除点 P, Q 外处处光滑;

则称曲线 L 为李氏卵形曲线, 称点 O 为李氏卵形曲线的卵心, 分别称点 P, Q 为李氏卵形曲线的远端点和近端点, 称点 S, T 为李氏卵形曲线的对称端点, 称 PQ 的中点 O' 为李氏卵形曲线的轴心, 过 O' 作对称轴的垂线交李氏卵形曲线于 S' 和 T' , 分别称线段 OP, OQ, OS (或 OT), $O'Q$ (或 $O'P$), $O'S'$ (或 $O'T'$), OO' 为李氏卵形曲线的长半径、短半径、对称半径、轴半径、次对称半径、偏心距, 其长度分别记为 a, b, c, e, g, h , 并把正数 a, b, c ($a > b$) 称为李氏卵形曲线的三个特征参数, 而把 a, b, c, e, g, h 称为李氏卵形曲线的六个元素。

定义 2: 凸的且处处光滑的李氏卵形曲线称为李氏卵圆。

定义 3: 仅在近端点处向里凹进去的李氏卵形曲线称为李氏心脏线。

若取李氏卵形曲线的卵心作坐标系原点, 近端点方向作为 y 轴的正向, 则李氏卵形曲线在直角坐标系的示意图如图 1 所示。

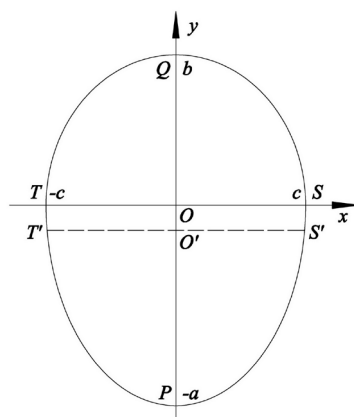


Figure 1. Li's Oval curve and its rectangular coordinate system

图 1. 李氏卵形曲线及其在直角坐标系示意图

3. 一类参数式李氏卵形曲线方程

定理 1: 设参数式方程

$$\begin{cases} x = c \cos t \\ y = \frac{1}{2}[(a+b) - (a-b)\sin t] \sin t \end{cases}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad (3.1)$$

(i) 若

$$a, b, c > 0 \text{ 且 } a > b \quad (3.2)$$

则方程(3.1)是以 a, b, c 为长、短、对称半径的李氏卵形曲线方程。

(ii) 若

$$a, b, c > 0 \text{ 且 } b < a \leq 3b \quad (3.3)$$

则方程(3.1)是以 a, b, c 为长、短、对称半径的李氏卵圆方程。

(iii) 若

$$a, b, c > 0 \text{ 且 } a > 3b \quad (3.4)$$

则方程(3.1)是以 a, b, c 为长、短、对称半径的李氏心脏线方程。

为了证明上述定理, 我们先给出如下引理:

引理 1: 设(3.2)成立, (3.1)的图形为曲线 L

(i) 若 $x_0 \geq 0$, 点 $(x_0, y_0) \in L$, 则点 $(-x_0, y_0) \in L$;

(ii) 设 l 为平行于 y 轴的直线, 若 l 与 y 轴的距离小于 c , 则 L 与 l 有且仅有两个交点; 若 l 与 y 轴的距离等于 c , 则 L 与 l 有且仅有一个交点; 若 l 与 y 轴的距离大于 c , 则 L 与 l 没有交点。

证明: (i) 由点 $(x_0, y_0) \in L$, 则必存在 $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 满足(3.1):

$$\begin{cases} x_0 = c \cos t_0 \\ y_0 = \frac{1}{2}[(a+b) - (a-b)\sin t_0] \sin t_0 \end{cases}$$

由 $x_0 \geq 0$ 及 $c > 0$ 得 $\frac{x_0}{c} \geq 0$, 故满足上式的第一式的

$$t_0 = \arccos \frac{x_0}{c} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

若 $t_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则取 $\tilde{t}_0 = \pi - t_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 。设 \tilde{t}_0 对应于 L 上的点为 $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$, 将 $t = \tilde{t}_0$ 代入(3.1)得点 $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in L$, 则

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= c \cos \tilde{t}_0 = c \cos(\pi - t_0) = -c \cos t_0 = -x_0 \\ \tilde{y}_0 &= \frac{1}{2}[(a+b) - (a-b)\sin \tilde{t}_0] \sin \tilde{t}_0 \\ &= \frac{1}{2}[(a+b) - (a-b)\sin(\pi - t_0)] \sin(\pi - t_0) \\ &= \frac{1}{2}[(a+b) - (a-b)\sin t_0] \sin t_0 = y_0 \end{aligned}$$

故点 $(-x_0, y_0) = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in L$ 。

若 $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, 则取 $\tilde{t}_0 = \pi - t_0 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, 同理可证 $(-x_0, y_0) = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in L$ 。

(ii) 设直线 l 到 y 轴的距离为 k , 则 l 的方程为

$$x = k (0 \leq k < c), \text{ 或 } x = -k (0 \leq k < c)$$

将上式第一式代入 L 的方程, 即(3.1)的第一式, 得

$$k = c \cos t \text{ 即 } \cos t = \frac{k}{c}$$

当 $0 \leq k < c$ 时, 有 $0 \leq \frac{k}{c} < 1$, 故满足上式的 t 有且仅有两个解 t_1, t_2 满足

$$t_1 = \arccos \frac{k}{c} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], t_2 = -t_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

设 L 上对应于 t_1, t_2 的点分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则

$$x_2 = c \cos t_2 = c \cos(-t_1) = c \cos t_1 = x_1 = k$$

由(3.2)及 $t_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 得

$$y_1 = \frac{1}{2} [(a+b) - (a-b) \sin t_1] \sin t_1 > 0$$

$$y_2 = \frac{1}{2} [(a+b) - (a-b) \sin(-t_1)] \sin(-t_1) = -\frac{1}{2} [(a+b) + (a-b) \sin t_1] \sin t_1 < 0$$

故 $y_1 \neq y_2$, 从而 $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, 即 L 与 l 有且仅有两个交点 $(k, y_1), (k, y_2)$ 。

当 $k = c$ 时, $\cos t = 1$, 显然 t 只有一个解 $t = 0$, 故此时 L 与 l 只有一个交点 $(c, 0)$ 。

当 $k > c$ 时, $\cos t = \frac{k}{c}$ 无解, 故此时 L 与 l 无交点。

对 $x = -k$ 的情形可同理证之。

引理 2: 设由参数式方程(3.1)所确定的 y 为 x 的函数的一阶和二阶导数分别记为 $y'_x(t)$ 和 $y''_x(t)$, 则

$$y'_x(t) = -\frac{1}{2c} [(a+b) - 2(a-b) \sin t] \cot t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad (3.5)$$

$$y''_x(t) = -\frac{1}{2c^2 \sin^3 t} [(a+b) - 2(a-b) \sin^3 t], t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad (3.6)$$

且(i) 若(3.2)成立, 则

$$y''_x(t) > 0, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \quad (3.7)$$

(ii) 若(3.3)成立, 则

$$y''_x(t) \leq 0, t \in (0, \pi) \quad (3.8)$$

(iii) 若(3.4)成立, 则在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上必存在唯一的

$$t_0 = \arcsin \frac{a+b}{2(a-b)} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.9)$$

使

$$y'_x(t_0) = 0 \quad (3.10)$$

且在 $\left(t_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一的

$$t_1 = \arcsin \sqrt[3]{\frac{a+b}{2(a-b)}} \in \left(t_0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.11)$$

使

$$y''_x(t_1) = 0 \quad (3.12)$$

$$y''_x(t) < 0, t \in (0, t_1) \quad (3.13)$$

$$y''_x(t) > 0, t \in \left(t_1, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.14)$$

证明: 由(3.1)得

$$y'_x(t) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left\{ \frac{1}{2} [(a+b) - (a-b)\sin t] \sin t \right\}'}{(c \cos t)'}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

将上式化简即得(3.5), 又由(3.5)得

$$y''_x(t) = \frac{d(y'_x(t))}{dx} = \frac{\left\{ -\frac{1}{2c} [(a+b) - 2(a-b)\sin t] \cot t \right\}'}{(c \cos t)'}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

将上式化简即得(3.6)。

(i) 因为当 $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ 时, 恒有 $\sin^3 t < 0$, 由此式及(3.2)和(3.6)即得(3.7)。

(ii) 因为当 $t \in (0, \pi)$ 时, 恒有 $\sin^3 t \leq 1$, 由此式及(3.3), 知

$$(a+b) - 2(a-b)\sin^3 t \geq (a+b) - 2(a-b) = -a + 3b \geq 0 \quad (3.15)$$

又显然有

$$\sin^3 t > 0, t \in (0, \pi) \quad (3.16)$$

于是由(3.6)和(3.15)和(3.16)即得(3.8)。

(iii) 由(3.4)得

$$0 < \frac{a+b}{2(a-b)} < 1 \quad (3.17)$$

由正弦函数 $\sin t$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调递增及(3.17)知, 存在唯一的 $t_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 使

$$\sin t_0 = \frac{a+b}{2(a-b)} \quad (3.18)$$

将(3.18)代入(3.5)，并注意到 $c > 0$ ，即得 $y'_x(t_0) = 0$ ，即(3.9)和(3.10)成立。

又由(3.17)得

$$0 < \frac{a+b}{2(a-b)} < \sqrt[3]{\frac{a+b}{2(a-b)}} < 1 \quad (3.19)$$

同样由正弦函数 $\sin t$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调递增及(3.19)知，存在唯一的 $t_1 \in \left(t_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 使

$$\sin t_1 = \sqrt[3]{\frac{a+b}{2(a+b)}} \quad (3.20)$$

$$\sin t < \sqrt[3]{\frac{a+b}{2(a+b)}}, t \in (0, t_1) \quad (3.21)$$

$$\sin t > \sqrt[3]{\frac{a+b}{2(a+b)}}, t \in \left(t_1, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.22)$$

分别将(3.20)和(3.21)和(3.22)代入(3.6)，即得(3.12)和(3.13)和(3.14)。

定理 1 的证明： 设(3.1)的曲线为 L 。

(i) 由(3.2)及引理 1 知， L 关于 y 轴对称且是闭合的，故 L 满足定义 1 的条件①。

由(3.1)的第一式知， $t = 0$ 是函数 $x = c \cos t$ 在 $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上唯一最大点，且最大值为 c ，将 $t = 0$ 代入式(3.1)的第二式得 $y = 0$ ，故 L 上存在唯一一对对称点 $S(c, 0)$ ， $T(-c, 0)$ ，它们到 L 的对称轴 y 轴的距离最大，故 L 满足定义 1 的条件②。

令 $x = 0$ ，则由(3.1)的第一式得 $t = \frac{\pi}{2}$ 或 $t = \frac{3}{2}\pi$ ，将它们代入(3.1)的第二式分别 $y = b$ 或 $y = -a$ ，故 L 与其对称轴 y 轴有且仅有两个交点 $O(0, b)$ ， $O(0, -a)$ ，显然 PQ 与 ST 相交于坐标系原点 $O(0, 0)$ 且 $OP = a > b = OQ$ ，故 L 满足定义 1 的条件③。

由引理 2 之(3.5)知，导数 $y'_x(t)$ 在 $t = 0$ 或 $t = \pi$ 时为 ∞ ，而在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 的其它点均为有限存在，故曲线 L 处处存在切线，从而处处光滑，所以 L 满足定义 1 的条件④。

因此曲线 L 是满足定义 1 的李氏卵形曲线，参数方程(3.1)为李氏卵形曲线方程。

(ii) 当(3.3)成立即 $0 < b < a \leq 3b$ 时，必有(3.2)成立，从而由引理 2 之(i)即(3.7)知曲线 L 的下半部为下凸的，而由(3.3)及引理 2 之(ii)即(3.8)知曲线 L 的上半部为上凸的[2]，故曲线 L 为凸的，又由(3.3)成立，则(3.2)必成立，从而由(i)知， L 为李氏卵形曲线，又上面已证 L 处处光滑，所以曲线 L 为李氏卵圆。参数方程(3.1)为李氏卵圆方程。

(iii) 当(3.4)成立即 $a > 3b$ 时，由引理 2 之(iii)知(3.9)~(3.14)均成立，且(3.2)亦成立，从而(3.7)成立。

设曲线 L 上对应于 t_1 的点为 H_1 ，则由(3.12)~(3.14)知点 H_1 为曲线 L 的拐点[2]；由对称性知， $t_2 = \pi - t_1$ 所对应的点 H_2 也是曲线 L 的拐点，且曲线 L 在 $t \in (0, t_1)$ 上为上凸的，在 $t \in (t_1, t_2)$ 上为下凸的，在 $t \in (t_2, \pi)$ 上为上凸的。所以曲线 L 的上半部仅在近端点处是向里凹的。

而当 $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ 时，由(3.7)知，曲线 L 在 $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上(即 L 的下半部)是下凸的。

这就证明了当(3.4)成立时，曲线 L 仅在近端点处向里凹；又由(3.4)成立，则(3.2)必成立，从而由(i)知， L 为李氏卵形曲线。所以曲线 L 为李氏心脏线(参见图 2)，参数方程(3.1)为李氏心脏线方程。

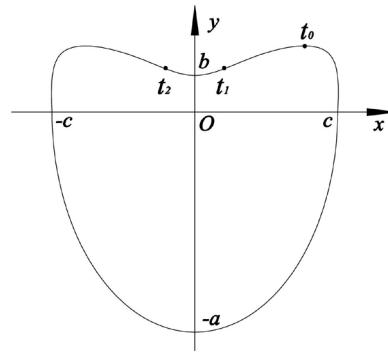


Figure 2. Li's cardioids diagram

图 2. 李氏心脏线示意图

注 1: 在(3.1)中令 $b = a, a > c$, 则得 $\begin{cases} x = c \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 此式正是长、短半轴为 a, c 的椭圆的参数式方程。故李氏卵形曲线(3.1)是椭圆的推广。

4. 参数式李氏卵形曲线的周长和面积

定理 2: 设李氏卵形曲线(3.1)的长、短、对称半径分别为 a, b, c , 曲线的周长为 l , 所围图形面积为 S , 则

$$l = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{4c^2 \sin^2 t + [(a+b) - 2(a-b)\sin t]^2 \cos^2 t} dt \quad (4.1)$$

$$S = \frac{\pi}{2}(a+b)c \quad (4.2)$$

证明: 由文献[2]之 P₂₇₇ 及文献[3]之 P₁₄₅, 知

$$l = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \quad (4.3)$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (xy' - yx') dt \quad (4.4)$$

将(3.1)及其导数代入(4.3)即得(4.1)。

将(3.1)及其导数代入(4.4)并化简, 得

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} [(a+b)\cos t - (a-b)\sin 2t] \cdot c \cos t + \frac{1}{2} [(a+b) - (a-b)\sin t] \sin t \cdot c \sin t \right\} dt \\ &= \frac{c}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (a+b)(\sin^2 t + \cos^2 t) dt - \frac{c}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (a-b)\sin 2t \cos t dt - \frac{c}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (a-b)\sin^3 t dt \end{aligned}$$

而

$$\frac{c}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (a+b)(\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{c}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (a+b) dt = \frac{\pi}{2}(a+b)c$$

$$\frac{c}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (a-b)\sin 2t \cos t dt = \frac{(a-b)c}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t \sin t dt = -\frac{(a-b)c}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t d \cos t = -\frac{(a-b)c}{2} \int_0^0 u^2 du = 0$$

$$\frac{c}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (a-b) \sin^3 t dt = -\frac{(a-b)c}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1-\cos^2 t) d \cos t = -\frac{(a-b)c}{4} \int_0^1 (1-u^2) du = 0$$

故 $S = \frac{\pi}{2}(a+b)c$ ，即(4.2)成立。

注 2: 在(4.2)中令 $b = a, a > c$ ，则得 $S = \pi ac$ ，此式正是长、短半轴为 a, c 的椭圆的面积公式，这也佐证了(4.2)的正确性。

5. 参数式李氏卵形曲线所围图形的质心

定理 3: 设李氏卵形曲线(3.1)的长、短、对称半径分别为 a, b, c ，曲线所围图形的质心为 (\bar{x}, \bar{y}) ，则

$$\begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{y} = -\frac{3}{8}(a-b) \end{cases} \quad (5.1)$$

证明: 由对称性显然有 $\bar{x} = 0$

设参数式(3.1)的卵形曲线的上半部为 $y_2(x)$ ，下半部为 $y_1(x)$ ，则由(3.1)可得

$$y_2(x) = \frac{1}{2c^2} \left[c(a+b)\sqrt{c^2-x^2} - (a-b)(c^2-x^2) \right], x \in [-c, c] \quad (5.2)$$

$$y_1(x) = -\frac{1}{2c^2} \left[c(a+b)\sqrt{c^2-x^2} - (a-b)(c^2-x^2) \right], x \in [-c, c] \quad (5.3)$$

又设卵形曲线(3.1)所围图形对 x 轴的静力矩为 M_x ，则由文献[4]之 P₂₂₉ 知

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{-c}^c (y_2^2 - y_1^2) dx \quad (5.4)$$

将(5.2)和(5.3)代入(5.4)并化简，得

$$M_x = -\frac{a^2-b^2}{2c^3} \int_{-c}^c (c^2-x^2)\sqrt{c^2-x^2} dx$$

上式中令 $x = c \sin t$ ，换元积分之，得

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{a^2-b^2}{2c^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c^4 \cos^4 t dt = -\frac{(a^2-b^2)c}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} (3+4\cos 2t + \cos 4t) dt \\ &= -\frac{(a^2-b^2)c}{16} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 dt = -\frac{3(a^2-b^2)c\pi}{16} \end{aligned} \quad (5.5)$$

又由文献[4]之 P₂₂₆ 知

$$\bar{y} = \frac{M_x}{S} \quad (5.6)$$

将(5.5)和(4.2)代入(5.6)即得 $\bar{y} = -\frac{3}{8}(a-b)$ ，故(5.1)成立。

6. 参数式李氏卵形曲线所围图形的转动惯量

定理 4: 设李氏卵形曲线(3.1)的长、短、对称半径分别为 a, b, c ，曲线所围图形绕 y 轴的转动惯量为 I_y ，则

$$I_y = \frac{1}{4} Mc^2 \quad (6.1)$$

其中

$$M = \frac{1}{2} \pi (a+b) c \rho \quad (6.2)$$

是面密度为常数 ρ 的卵形曲线薄片的质量。

证明: 由文献[4]之 P₂₃₉ 知

$$I_y = \int_{-c}^c \rho x^2 (y_2 - y_1) dx$$

将(5.2)和(5.3)代入上式, 并化简, 得

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{(a+b)\rho}{c} \int_{-c}^c x^2 \sqrt{c^2 - x^2} dx = \frac{2(a+b)\rho}{c} \int_0^c x^2 \sqrt{c^2 - x^2} dx \\ &= \frac{2(a+b)\rho}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^2 \sin^2 t \cdot c \cos t d(c \sin t) = 2(a+b)c^3 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t)^2 dt \\ &= \frac{(a+b)c^3 \rho}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2 dt = \frac{(a+b)c^3 \rho}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \\ &= \frac{(a+b)c^3 \rho}{4} \left[t - \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} (a+b) \rho c^3 = \frac{1}{4} Mc^2 \end{aligned}$$

其中 $M = \frac{1}{2} \pi (a+b) c \rho$ 。故(6.1), (6.2)成立。

7. 参数式李氏卵形曲线的曲率和曲率半径

定理 5: 设李氏卵形曲线(3.1)的长、短、对称半径分别为 a, b, c , 曲线曲率为 K , 曲率半径为 R , 则

$$K = \frac{4c|(a+b) - 2(a-b)\sin^3 t|}{\left\{4c^2 \sin^2 t + [(a+b)\cos t - (a-b)\sin 2t]^2\right\}^{3/2}} \quad (7.1)$$

$$R = \frac{\left\{4c^2 \sin^2 t + [(a+b)\cos t - (a-b)\sin 2t]^2\right\}^{3/2}}{4c|(a+b) - 2(a-b)\sin^3 t|} \quad (7.2)$$

证明: 由文献[2]之 P₁₇₁ 知参数式表示的曲线的曲率 K 和曲率半径 R , 有公式

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (7.3)$$

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|} \quad (7.4)$$

由式(3.1)得

$$\dot{x} = -c \sin t$$

$$\ddot{x} = -c \cos t$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{2} [(a+b)\cos t - (a-b)\sin 2t]$$

$$\ddot{y} = -\frac{1}{2}[(a+b)\sin t + 2(a-b)\cos 2t]$$

将上诸式分别代入式(7.3)与(7.4), 并化简, 即得式(7.1)和(7.2)。

特别: 由式(7.2)即知, 对应于 $t = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 的点处的曲率半径分别为

$$R\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2c^2}{3a-b} \quad (7.5)$$

$$R(0) = \frac{(a+b)^2}{4c} \quad (7.6)$$

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2c^2}{|-a+3b|} \quad (7.7)$$

$$R(\pi) = \frac{(a+b)^2}{4c} \quad (7.8)$$

8. 参数式李氏卵形曲线旋转卵形体的体积

定理 6: 设李氏卵形曲线(3.1)的长、短、对称半径分别为 a, b, c , 曲线所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转卵形体的体积为 V , 则

$$V = \frac{2}{3}\pi(a+b)c^2 \quad (8.1)$$

证明: 由文献[2]之 P_{273} 及(3.1)知, 旋转卵形体的体积

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^b x^2 dy = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2(t) y'(t) dt = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c^2 \cos^2 t \cdot \frac{1}{2} [(a+b)\cos t - 2(a-b)\cos t \sin t] dt \\ &= \frac{\pi(a+b)c^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt - \pi(a-b)c^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin t dt \\ &= \frac{\pi(a+b)c^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos t + \cos 3t}{4} dt + \pi(a-b)c^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t d\cos t \\ &= \frac{\pi(a+b)c^2}{2} \left[\frac{3}{4} \sin t + \frac{1}{12} \sin 3t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \pi(a-b)c^2 \int_0^0 u^3 du = \frac{\pi(a+b)c^2}{2} \cdot \frac{4}{3} + 0 = \frac{2}{3}\pi(a+b)c^2 \end{aligned}$$

故(8.1)成立。

注 3: 在(8.1)中, 令 $b = a$, $a > c$, 则得 $V = \frac{4}{3}\pi a c^2$, 此式正是长、短半轴分别为 a, c 的旋转椭球的体积公式。这也佐证了(8.1)的正确性。

9. 参数式李氏卵形曲线的几何作法

由(3.1)可得参数式李氏卵形曲线的几何作法, 其作图步骤如下:

首先约定以 O 为圆心, r 为半径的圆表示为圆 $(O; r)$;

1) 以直角坐标系的原点 O 为圆心, c 为半径作图 $(O; c)$ 交 x 轴于点 A , 以 O 为圆心, $a-b$ 为半径作圆 $(O; a-b)$;

- 2) 以 O 为顶点, OA 为始边作 $\angle AOB = t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, OB 交圆 $(O; c)$ 于点 D , OB 的反向延长线交圆 $(O; a-b)$ 于点 E ;
- 3) 从点 E 作 x 轴的垂线, 垂足为 F ;
- 4) 在射线 OB 上取 $OG = \frac{1}{2}(a+b \pm EF)$, $t \in [0, \pi]$ 时取 “-”, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 时取 “+”;
- 5) 过点 D 作 x 轴的垂线, 过点 G 作 y 轴的垂线, 两垂线交于点 M_t , 则点 M_t 就是参数式李氏卵形曲线(3.1)上对应于参数 t 的点。如此作出若干个这样的 M_t 点, 连起来就可获得方程(3.1)的图形, 如图 3 所示。

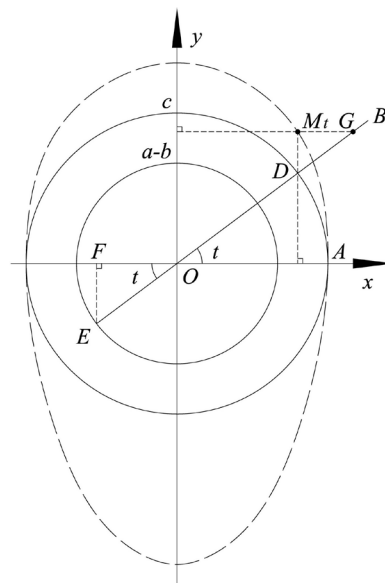


Figure 3. Geometric drawing of Li's oval curve (3.1)

图 3. 李氏卵形曲线(3.1)的几何作法示意图

10. 参数式李氏卵形曲线旋转卵形体的质心

定理 7: 设李氏卵形曲线(3.1)的长、短、对称半径分别为 a, b, c , 曲线绕 y 轴旋转而成的旋转卵形体的质心为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 则

$$\begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{y} = -\frac{3}{10}(a-b) \\ \bar{z} = 0 \end{cases} \quad (10.1)$$

证明: 由文献[4]之 P₂₃₆ 知

$$\bar{y} = \frac{\pi \int_{-a}^b yx^2 dy}{V} \quad (10.2)$$

又

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^b yx^2 dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y(t)x^2(t)y'(t)dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c \cos t \frac{1}{2} [(a+b) - (a-b)\sin t] \sin t \frac{1}{2} [(a+b)\cos t - (a-b)\sin 2t] dt \\
&= \frac{1}{4} c^2 (a+b)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin t dt - \frac{3}{4} c^2 (a^2 - b^2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin^2 t dt - \frac{1}{2} c^2 (a-b)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt
\end{aligned} \tag{10.3}$$

而

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t d \cos t = \int_0^0 u^3 du = 0 \tag{10.4}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt = \frac{1}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2t dt = \frac{1}{32} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin 2t - \sin 6t) dt = \frac{1}{32} \left[-\frac{3}{2} \cos 2t + \frac{1}{6} \cos 6t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 \tag{10.5}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin^2 t dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t d \sin t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^2 t d \sin t \\
&= \int_{-1}^1 (1 - u^2) u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{15}
\end{aligned} \tag{10.6}$$

将(10.4)和(10.5)和(10.6)代入(10.3)得

$$\int_{-a}^b yx^2 dy = -\frac{3}{4} c^2 (a^2 - b^2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin^2 t dt = -\frac{3}{4} c^2 (a^2 - b^2) \cdot \frac{4}{15} = -\frac{3}{15} c^2 (a^2 - b^2) \tag{10.7}$$

由(10.2)和(10.7)和(8.1)得

$$\bar{y} = \frac{-\frac{3}{15} \pi c^2 (a^2 - b^2)}{\frac{2}{3} \pi (a+b) c^2} = -\frac{3}{10} (a-b) \tag{10.8}$$

由对称性知 $\bar{x} = 0$, $\bar{z} = 0$, 故(10.1)成立。

11. 参数式(3.1)为关于 x, y 的四次方程

由参数式(3.1)的第二个式子得

$$(a-b)\sin^2 t - (a+b)\sin t + 2y = 0$$

则

$$\begin{aligned}
\sin t &= \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 8(a-b)y}}{2(a-b)} \\
\sin^2 t &= \left[\frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 8(a-b)y}}{2(a-b)} \right]^2
\end{aligned}$$

又由(3.1)的第一个式子得

$$\cos^2 t = \frac{x^2}{c^2}$$

将上两式相加, 并注意到 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, 则得

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{\left[(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 8(a-b)y} \right]^2}{4(a-b)^2} = 1$$

上式化简即得

$$(a-b)^2 x^4 - 4c^2(a-b)x^2 y - c^2(a^2 - 6ab + b^2)x^2 + 4c^4 y^2 + 4c^4(a-b)y - 4abc^4 = 0 \quad (11.1)$$

故式(11.1)是和参数式(3.1)等价的。从而由定理 1 可得如下

定理 8: (i) 若(3.2)成立, 则(11.1)是以 a, b, c 为长、短、对称半径的李氏卵形曲线方程;

(ii) 若(3.3)成立, 则(11.1)是以 a, b, c 为长、短、对称半径的李氏卵圆方程;

(iii) 若(3.4)成立, 则(11.1)是以 a, b, c 为长、短、对称半径的李氏心脏线方程。

定理 9: 设四次方程

$$Ax^4 - 2\sqrt{AD}x^2 y + \frac{4F - AD}{2\sqrt{D}}x^2 + Dy^2 + D\sqrt{A}y - F = 0 \quad (11.2)$$

(i) 若

$$A, D, F > 0 \quad (11.3)$$

则(11.2)是李氏卵形曲线方程, 且其长、短、对称半径

$$\begin{cases} a = \frac{D\sqrt{A} + \sqrt{AD + 4DF}}{2D} \\ b = \frac{-D\sqrt{A} + \sqrt{AD + 4DF}}{2D} \\ c = \sqrt[4]{\frac{D}{4}} \end{cases} \quad (11.4)$$

(ii) 若

$$A, D, F > 0 \text{ 且 } A \leq \frac{4F}{3D} \quad (11.5)$$

则(11.2)是李氏卵圆方程, 且其长、短、对称半径如(11.4)所示。

(iii) 若

$$A, D, F > 0 \text{ 且 } A > \frac{4F}{3D} \quad (11.6)$$

则(11.2)是李氏心脏线方程, 且其长、短、对称半径如(11.4)所示。

证明: 考察如下的四次方程

$$Ax^4 - Bx^2 y + Cx^2 + Dy^2 + Ey - F = 0 \quad (11.7)$$

比较(11.7)与(11.1)的系数, 得

$$A = (a-b)^2 \quad (11.8)$$

$$B = 4c^2(a-b) \quad (11.9)$$

$$C = c^2[4ab - (a-b)^2] \quad (11.10)$$

$$D = 4c^4 \quad (11.11)$$

$$E = 4c^4(a-b) \quad (11.12)$$

$$F = 4abc^4 \quad (11.13)$$

由(11.8)得

$$a-b = \sqrt{A} \quad (11.14)$$

由(11.11)及(11.13)得

$$ab = \frac{F}{D} \quad (11.15)$$

由(11.9), (11.11), (11.14)得

$$B = 2\sqrt{AD} \quad (11.16)$$

由(11.10), (11.11), (11.15), (11.8)得

$$C = \sqrt{\frac{D}{4}} \left(4\frac{F}{D} - A \right) = \frac{4F - AD}{2\sqrt{D}} \quad (11.17)$$

由(11.12), (11.11), (11.8)得

$$E = D\sqrt{A} \quad (11.18)$$

将(11.16), (11.17), (11.18)代入(11.7), 即得(11.2)。又由(11.8), (11.11), (11.13)可得

$$\begin{cases} A = (a-b)^2 \\ D = 4c^4 \\ F = 4abc^4 \end{cases} \quad (11.19)$$

由(11.19)反解即得(11.4)。

(i) 由(11.4)及(11.9)得

$$a, b, c > 0 \text{ 且 } a > b \Leftrightarrow A, D, F > 0$$

故由定理 8 之(i)即知本定理之(i)成立。

(ii) 将(11.4)的前两式代入(3.3), 得

$$\begin{aligned} a \leq 3b &\Leftrightarrow \sqrt{AD} + \sqrt{AD^2 + 4DF} \leq 3(-\sqrt{AD} + \sqrt{AD^2 + 4DF}) \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt{AD} \leq 2\sqrt{AD^2 + 4DF} \\ &\Leftrightarrow 3AD^2 \leq 4DF \\ &\Leftrightarrow A \leq \frac{4F}{3D} \end{aligned}$$

由上式及定理 8 之(ii)即得本定理之(ii)。

(iii) 将(11.4)的前两式代入(3.4), 并仿(ii)之推导, 得

$$a \leq 3b \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A > \frac{4F}{3D}$$

由上式及定理 8 之(iii)即得本定理之(iii)。

12. 示例与仿真实验

12.1. 示例

只要给出李氏卵形曲线的长、短、对称半径 a, b, c 三个特征参数的具体数值，代入(3.1)或(11.1)就可得到具体的李氏卵形曲线方程。

例 1: 设 $a = 8$, $b = 6$, $c = 5$, 代入(3.1)或(11.1)得

$$\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 7 \sin t - \sin^2 t \end{cases}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad (12.1)$$

$$4x^4 - 200x^2y + 4700x^2 + 2500y^2 + 5000y - 120000 = 0 \quad (12.2)$$

即

$$x^4 - 50x^2y + 1175x^2 + 625y^2 + 1250y - 30000 = 0 \quad (12.3)$$

注意到这时有 $a, b, c > 0$ 且 $b < a \leq 3b$, 故由定理 1 之(ii)和定理 8 之(ii)知, (12.1)或(12.2)或(12.3)为李氏卵圆方程。曲线图形如图 4 所示。

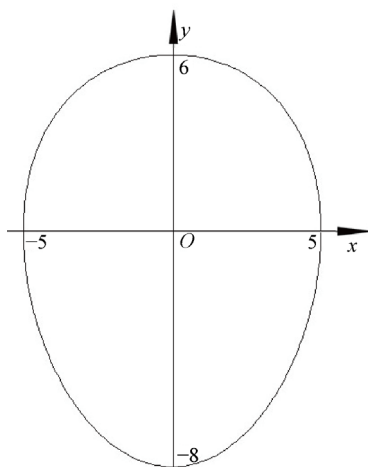


Figure 4. Equation (12.1) graphics
图 4. 方程(12.1)的图形

例 2: 设 $a = 8$, $b = 0.4$, $c = 5$, 代入(3.1)或(11.1)得

$$\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 4.2 \sin t - 3.8 \sin^2 t \end{cases}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad (12.4)$$

$$57.76x^4 - 760x^2y + 1124x^2 + 2500y^2 + 19000y - 8000 = 0 \quad (12.5)$$

注意到这时有 $a, b, c > 0$ 且 $a > 3b$, 故由定理 1 之(iii)和定理 8 之(iii)知, (12.4)及(12.5)为李氏心脏线方程。曲线图形如图 5 所示。

12.2. 仿真实验

为了验证本文所建参数式李氏卵圆方程图形与真实卵形对比效果, 用计算机编写了一个仿真绘图程序。取一张鸡蛋照片作为绘图程序界面上绘图区的背景。通过像素分析和计算, 获得图片中鸡蛋图像长方向最大像素为 386, 宽方向最大像素为 294, 在鸡蛋图片横向和纵向最大像素处画两条直线作为 x 轴和

y 轴, x 轴与 y 轴的交点即为鸡蛋的卵心, 并将卵心位置设定为绘图区的原点。程序界面如图 6(a)所示。

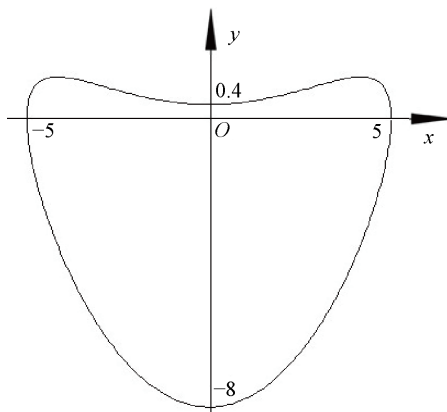


Figure 5. Equation (12.4) graphics
图 5. 方程(12.4)的图形

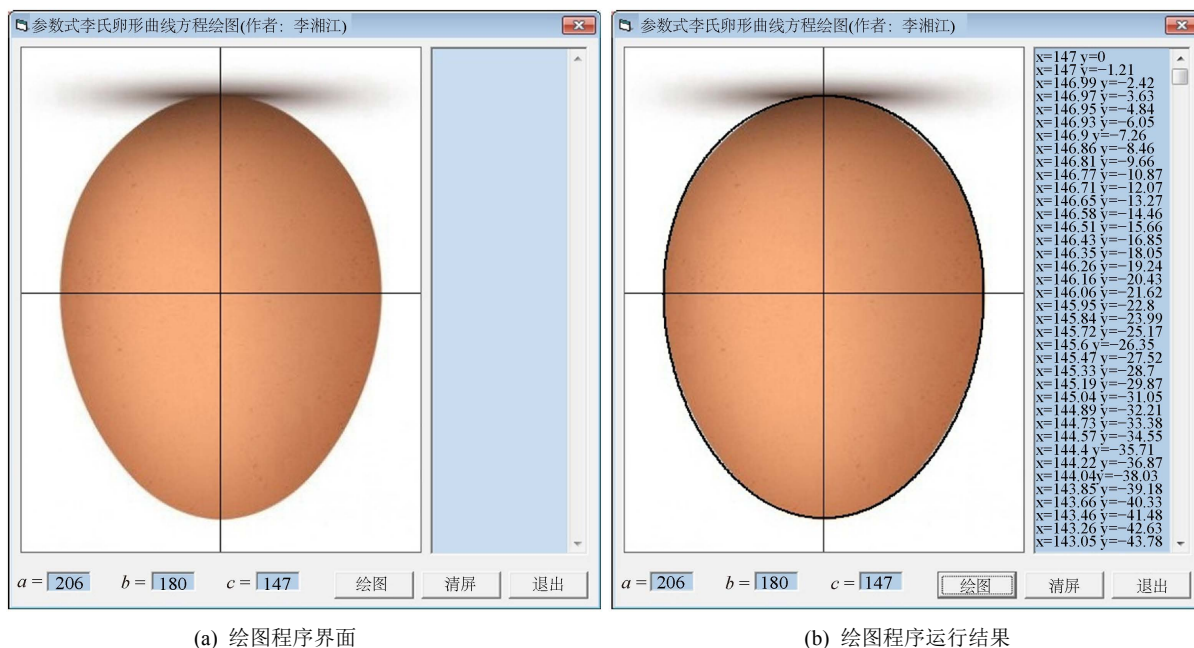


Figure 6. Drawing program of simulating
图 6. 仿真绘图程序

按参数式李氏卵形曲线方程的需求量取鸡蛋以像素为单位的长、短、对称半径三个参数值, 得出 $a = 206$, $b = 180$, $c = 147$, 且满足 $b < a \leq 3b$, 则由(3.1)即得其卵圆方程:

$$\begin{cases} x = 147 \cos t \\ y = (193 - 13 \sin t) \sin t \end{cases}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad (12.6)$$

绘图程序使用方程式(12.6)进行计算并通过描点法绘制图形, 界面右侧文本框中显示方程取点的计算值。程序运行结果见图 6(b)。

图 6(b)中鸡蛋外轮廓的黑色绘图线是绘图程序根据方程式(12.6)绘制的卵圆图形, 图线准确地通过鸡

蛋的近端点、远端点和两个对称端点四个端点，与图片中鸡蛋外轮廓高度吻合。

13. 结语

鉴于到目前为止，人们对卵形曲线和卵圆还没有一个明确统一的定义，本文对卵形曲线和卵圆给出了一种精确定义，且为了叙述方便将这种新定义的卵形曲线和卵圆取名为李氏卵形曲线和李氏卵圆，同时提出了一类非常实用的参数式李氏卵形曲线方程，并推导出其周长、面积、质心坐标、转动惯量和旋转卵形体的体积等重要公式，为卵形曲线及其应用研究提供理论基础，也给卵形曲线的工程应用带来极大的方便。

参考文献

- [1] 李湘江. 一类四次李氏卵圆[J]. 应用数学进展, 2019, 8(2): 193-202.
- [2] 同济大学应用数学系. 高等数学第五版上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 148-149, 171, 273, 277.
- [3] 同济大学应用数学系. 高等数学第五版下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 145.
- [4] Г. М. 菲赫金哥尔茨, 著. 北京大学高等数学教研组, 译. 微积分学教程二册一分册[M]. 北京: 人民教育出版社, 1959: 226, 236, 239.