

# 红松鼠种群保护的状态反馈脉冲模型研究

王烁烁

北京建筑大学, 北京

Email: 1185244096@qq.com

收稿日期: 2020年12月14日; 录用日期: 2021年1月3日; 发布日期: 2021年1月19日

## 摘要

英国本土红松鼠因外来灰松鼠的入侵而面临灭绝危机。针对目前的情况, 文章根据疱疹病毒对两种松鼠影响程度的差异, 建立竞争模型, 并依据种群数量施加状态反馈脉冲, 进而建立带有状态反馈的脉冲模型。利用后继函数法和微分方程的有关理论, 研究了系统阶一周解的存在性和稳定性。所得结论为红松鼠的保护工作提供了一定的理论依据。数值分析结果验证了文中定理的正确性。

## 关键词

状态反馈脉冲, 后继函数, 阶一周解, 红松鼠

# Study on State Feedback Impulsive Model of Red Squirrel Protection

Shuoshuo Wang

Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Email: 1185244096@qq.com

Received: Dec. 14<sup>th</sup>, 2020; accepted: Jan. 3<sup>rd</sup>, 2021; published: Jan. 19<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

British native red squirrels are facing extinction crisis due to the invasion of foreign grey squirrels. In view of the current situation, the paper established a competitive model according to the difference of the impact of herpes virus on the two kinds of squirrels, and applied state feedback pulse according to the population size, and then established a pulse model with state feedback. The existence and stability of first-order periodic solutions of the system are studied by using the theory of subsequent functions and differential equations. The conclusion provides a theoretical basis for the protection of red squirrel. The numerical results verify the correctness of the

theorem.

## Keywords

Impulsive, Successor Function, Order-1 Periodic Solution, Red Squirrels

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 背景

19 世纪初期, 灰松鼠从美国被引到了英国, 灰松鼠比英国土生土长的红松鼠强壮, 且繁殖能力强, 在抢占食物、栖息地的竞争中, 红松鼠总是处于劣势[1]。灰松鼠还携带疱疹病毒(squirrelpox), 这种病毒会引发一种滤过性皮肤病, 对灰松鼠自身影响较小, 对红松鼠影响较大。在英国, 有 60% 的红松鼠都携带这种病毒, 患病后的红松鼠健康状况急剧下降, 无法觅食, 最快在 15 天内死亡。2008 年的统计数据表明, 红松鼠的数量比 2007 年锐减了 60%, 这个数据大大高于此前每年 10% 左右的下降率。

对红松鼠的保护刻不容缓, 利用数学模型研究红松鼠保护引起了学者的兴趣。刘琼在文献[1]中, 考虑了捕杀灰松鼠, 投放药物治疗红松鼠自身疾病的措施, 建立了依赖红松鼠密度施加状态反馈脉冲控制模型, 并对模型进行了相应的分析。因为状态反馈脉冲微分方程可以描述某些运动状态在固定或不固定时刻加速变化或跳跃, 使模型更切合实际。近年来, 学者用它解决了很多问题[2] [3] [4] [5] [6]。Jiang G R 研究了带有阶段结构的害虫防治模型的脉冲效应, 得到了系统存在周期解的充分条件[7]。Jiang G R 研究具 Holling II 类功能反应和状态反馈脉冲控制的食饵 - 捕食模型, 得到了非平凡正解的存在性和稳定性的充分条件[8]。

本文考虑疱疹病毒建立状态脉冲模型[9]。

## 2. 模型建立

由于疱疹病毒对红松鼠影响较大, 对灰松鼠影响较小, 建立如下模型:

$$\left. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(k_1 - m_1x_1 - \beta_{12}x_2 - r_1x_1x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(k_2 - m_2x_2 - \beta_{21}x_1 - r_2x_1x_2) \end{cases} \right\} x_1 > x_1^* \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{cases} \Delta x_1 = \alpha x_1 \\ \Delta x_2 = -\beta(x_2 - x_2^*) \end{cases} \right\} x_1 = x_1^*$$

其中,  $x_1$  和  $x_2$  分别表示红松鼠和灰松鼠在  $t$  时刻的密度,  $k_1$  和  $k_2$  分别表示红松鼠和灰松鼠的增长率,  $m_1$  和  $m_2$  分别表示红松鼠和灰松鼠的种内竞争系数,  $\beta_{12}$  和  $\beta_{21}$  分别表示红松鼠和灰松鼠的种间竞争系数,  $r_1$  和  $r_2$  分别表示红松鼠和灰松鼠感染病毒的速率。

## 3. 无脉冲模型分析

模型(2.1)对应的无脉冲模型为:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(k_1 - m_1x_1 - \beta_{12}x_2 - r_1x_1x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(k_2 - m_2x_2 - \beta_{21}x_1 - r_2x_1x_2) \end{cases} \quad (3.1)$$

### 3.1. 系统的平衡点分析

系统(3.1)的平衡点为  $E_0(0,0)$ ,  $E_1\left(0, \frac{k_2}{m_2}\right)$ ,  $E_2\left(\frac{k_1}{m_1}, 0\right)$  和  $E_3(x_1^*, x_2^*)$ , 其中

$$x_1^* = \frac{\rho \pm \sqrt{[\rho^2 - 4r_1^2(\beta_{21}r_1 - r_2m_1)(m_2k_1 - \beta_{12}k_2) ]}}{2r_1(\beta_{21}r_1 - m_1r_2)}, \quad x_2^* = \frac{k_1 - x_1^*}{\beta_{12} + r_1x_1^*},$$

$\rho = m_1m_2r_1 - \beta_{21}\beta_{12}r_1$ 。当满足  $\frac{r_1}{r_2} < \frac{m_1}{\beta_{21}}$ ,  $\frac{\beta_{12}}{m_2} < \frac{m_1}{\beta_{21}}$ ,  $\frac{m_2}{\beta_{12}} > \frac{k_2}{k_1}$ , 存在一个正根  $E_3(x_1^*, x_2^*)$ 。

容易知道  $E_0(0,0)$  是不稳定的结点; 当  $\frac{k_1}{k_2} > \frac{\beta_{12}}{m_2}$  时,  $E_1\left(0, \frac{k_2}{m_2}\right)$  是鞍点, 当  $\frac{k_1}{k_2} < \frac{\beta_{12}}{m_2}$  时,  $E_1\left(0, \frac{k_2}{m_2}\right)$  是

稳定的结点; 当  $\frac{k_2}{k_1} > \frac{\beta_{21}}{m_1}$  时,  $E_2\left(\frac{k_1}{m_1}, 0\right)$  是鞍点, 当  $\frac{k_2}{k_1} < \frac{\beta_{21}}{m_1}$  时,  $E_2\left(\frac{k_1}{m_1}, 0\right)$  是稳定的结点; 当

$(m_1 + r_1x_2^*)(m_2 + r_1x_1^*) < (\beta_{12} + r_1x_1^*)(\beta_{21} + r_2x_2^*)$  时,  $E_3(x_1^*, x_2^*)$  是鞍点, 当  $(m_1 + r_1x_2^*)(m_2 + r_1x_1^*) > (\beta_{12} + r_1x_1^*)(\beta_{21} + r_2x_2^*)$  时,  $E_3(x_1^*, x_2^*)$  是稳定的结点或焦点。

假设参数:

$$k_1 = 0.05; k_2 = 0.03; m_1 = 0.02; m_2 = 0.3; \beta_{12} = 0.008; \beta_{21} = 0.006; r_1 = 0.00612; r_2 = 0.006$$

如图 1 我们看出在  $E_3(x_1^*, x_2^*)$  点处是稳定的。

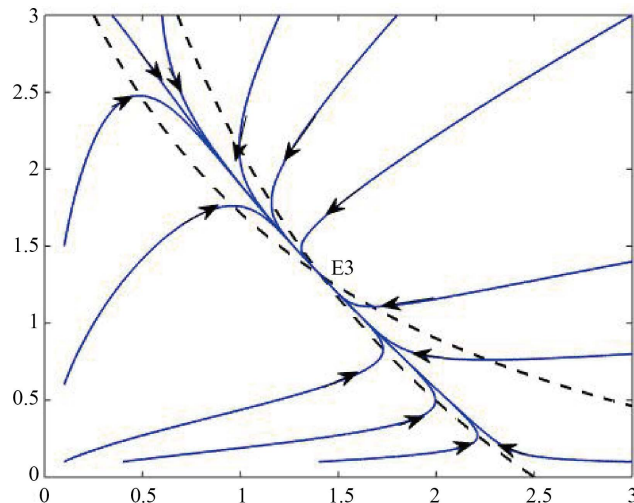


Figure 1. A track map of the neighborhood of  $E_3$

图 1.  $E_3$  附近的轨线图

### 3.2. 系统不存在极限环

我们用 Bendixon-DuLac 检验极限环的存在性, 记

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(k_1 - m_1x_1 - \beta_{12}x_2 - r_1x_1x_2) = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(k_2 - m_2x_2 - \beta_{21}x_1 - r_2x_1x_2) = g_1(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.2)$$

系统(3.2)中, 函数  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $g_1(x_1, x_2)$  在第一象限是光滑的, 取  $B(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1x_2}$ , 则

$$\frac{\partial(Bf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(Bg_1)}{\partial x_2} = -\frac{m_1}{x_2} - r_1 - \frac{m_2}{x_1} - r_2 < 0。$$

因此, 系统(3.2)在第一象限不存在极限环。

## 4. 脉冲模型分析

### 4.1. 阶一周解的存在性

#### 定理 4.1 系统(2.1)存在阶一周解

证明: 根据该平面系统上的轨线走势可知[10], 我们假设  $A$  点坐标是  $A(x_{1A}, x_{2A})$ ,  $A_1$  的坐标是  $(x_{1A_1}, x_{2A_1})$ ,  $A^*$  的坐标是  $A^*(x_{1A^*}, x_{2A^*})$ , 假设  $B$  的坐标是  $B(x_{1B}, x_{2B})$ ,  $B_1$  的坐标是  $(x_{1B_1}, x_{2B_1})$ ,  $B^*$  的坐标是

$B^*(x_{1B^*}, x_{2B^*})$ ,  $p_0$  的坐标是  $p_0(x_{1p_0}, x_{2p_0})$ , 从  $A \in N$  点出发的轨线与脉冲集  $M$  交于点  $A^*$ , 再由脉冲函数映射到  $A_1 \in N$ , 此时  $A_1$  在  $A$  的下方, 必定有  $x_2^* < x_{2A_1} < x_{2A^*} < x_{2A}$ , 则  $F(A) = x_{2A_1} - x_{2A} < 0$ , 从  $B \in N$  点出发的轨线与脉冲集  $M$  交于点  $B^*$ , 再由脉冲函数映射到  $B_1 \in N$ ,  $B_1$  在  $B$  的上边,  $x_{2B} < x_{2B_1} < x_{2B^*} < x_2^*$ , 则  $F(B) = x_{2B_1} - x_{2B} > 0$  使得  $p_0 \in N, p_1 \in M, \varphi: p_1 \rightarrow p_2 \in N$  有  $F(p) = x_{2p_2} - x_{2p_1} = 0$ ,  $p_0$  一定在  $AB$  两点之间[11]。所以系统(2.1)必存在阶一周解  $\Gamma(p_0, T)$ , 如图 2 所示:

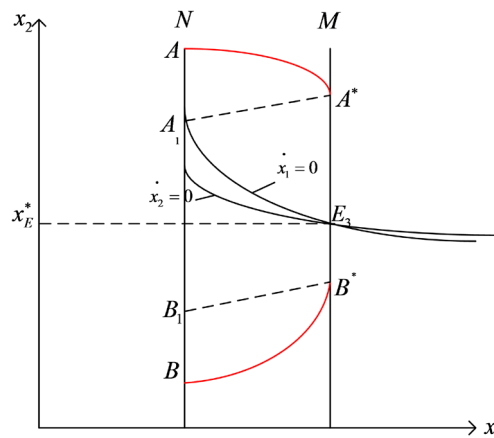


Figure 2. Phase diagram  
图 2. 相图

### 4.2. 阶一周解的稳定性

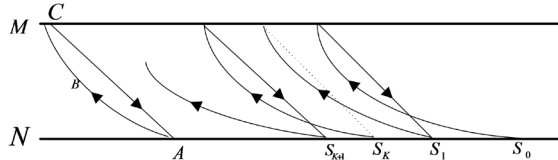
定理 4.2 假设  $\Gamma$  是某状态反馈脉冲控制系统的阶一周解。如果对于任何  $\varepsilon > 0$ , 在相集上存在点  $p$  的  $\delta$  的领域  $U(p, \delta)$ ,  $\delta > 0$  对任意点  $p_1 \in U(p, \delta)$  和以为  $p_1$  初始点的状态反馈脉冲系统的轨线  $f(p_1, t)$ , 存在  $T$ , 当  $t > T$  时有  $\rho(f(p_1, t), \Gamma) < \varepsilon$ , 则称  $\Gamma$  为是轨道稳定的[12]。

我们知道对任意  $\sigma (0 < \sigma < 1)$  系统(1.1), 有个唯一的周期解  $\Gamma$ 。我们在相集  $N$  上确定一点  $A$  (如图 3),

$ABC$  轨线 + 线段  $CA =$  阶一周解[13]。我们把它定义为  $\Gamma$ ，然后，另一接近  $A$  点的点  $S_0$ ，我们得到一系列的点  $\{S_0, S_1, \dots, S_k, S_{k+1}, \dots\}$ ，这里的  $S_{i+1}$  是  $S_i$  的后继点， $i = 0, 1, \dots, k, \dots$  在相集  $N$  上建立这些点，假设  $A$  的坐标是  $0$ ， $s_0, s_1, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots$  是  $S_0, S_1, \dots, S_k, S_{k+1}, \dots$  的坐标。我们有：

$$s_k = \begin{cases} -d_k, S_k \text{ 在点 } A \text{ 的左侧} \\ d_k, S_k \text{ 在点 } A \text{ 的右侧} \end{cases}$$

这里的  $d_k$  是  $S_k$  和  $A$  之间的距离。



**Figure 3.**  $s_0, s_1, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots$  are the subsequent points of  $S_0, S_1, \dots, S_k, S_{k+1}, \dots$  respectively

**图 3.**  $s_0, s_1, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots$  是  $S_0, S_1, \dots, S_k, S_{k+1}, \dots$  的坐标

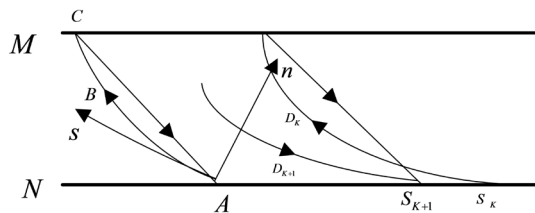
引理 4.2  $f$  来表示抽象脉冲微分动力系统(2.1)的映射[14] [15]。当函数

$$\left| \frac{d\bar{s}}{ds} \right|_{s=0} < 1$$

是稳定的，否则是不稳定的。

一般来说，我们假设  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  是系统(2.1)中的函数，具有任意阶偏导，我们假设在一定的轨道上，从  $A$  到  $C$  时间是  $T$ ，周期闭合轨道  $\Gamma$  也是  $T$ 。

我们建立一个新的坐标，然而第二个点  $n$  作为法向量的个数(这里我们假设是正方向上的)(如图 4 所示)。由第一个坐标，我们可以建立曲线  $ABC$  的参数方程[16] [17] [18] [19]。



**Figure 4.** Establish coordinate system  $(s, n)$  on point  $A$

**图 4.** 存在点系统  $(s, n)$  在点  $A$  上

$x = \phi(s), y = \psi(s)$ ，这里的  $s$  是参数。我们表示坐标  $(x, y)$  与  $(s, n)$  之间的直线表达形式：

$$x = \phi(s) - n\psi'(s), y = \psi(s) + n\phi'(s)$$

根据(2.1)和(4.2)我们有：

$$\frac{dn}{ds} = \frac{Q\phi' - P\psi' - n(P\phi'' + Q\psi'')}{P\phi' + Q\psi'} \triangleq F(s, n) \tag{4.3}$$

很明显  $n = 0$  是上述方程(4.3)的解，一阶偏导数  $F(s, n)$ 。关于  $n$  是连续的。然后上述方程可以简化为：

$$\frac{dn}{ds} = F'_n(s, n)|_{n=0} + O(n)$$

我们可以计算出:

$$F'_n(s, n)|_{n=0} = \frac{P_0^2 Q_{y_0} - P_0 Q_0 (P_{y_0} + Q_{x_0}) + Q_0^2 P_{x_0}}{(P_0^2 + Q_0^2)^{\frac{3}{2}}} \triangleq H(s) \quad (4.4)$$

这里的  $P_0$  和  $Q_0$  代表的是  $P$  和  $Q$  在  $A$  的坐标。  $P_{x_0}$ ,  $P_{y_0}$  以及  $Q_{x_0}$ ,  $Q_{y_0}$  是  $n=0$  时  $P$  和  $Q$  的偏导数, 关于  $x, y$ , 很明显  $P_0 \phi'' + Q_0 \psi'' = 0$  然后(4.4)的直线方程是:

$$\frac{dn}{ds} = H(s)n \quad (4.5)$$

解是:  $n = n_0 e^{\int_0^s H(s') ds'}$ ,  $n_0 = n(0)$

**定理 4.1** 假设  $h$  是轨线  $\widehat{ABC}$  的长度, 是系统(2.1)阶一周解  $\Gamma$  的一部分, 如果把  $\widehat{ABC}$  集成到一起, 用  $H(s)$  来表示是负的, 说明  $\Gamma$  是稳定的, 否则是不稳定的。

**定理 4.2** 假设该区域的阶一周解  $\Gamma$  是凸闭的。如果满足  $\int_0^T P_{x_0} + Q_{y_0} < 0$ , 说明  $\Gamma$  是稳定的, 否则是不稳定的。

然后我们直接得出推论:

**推论 4.1** 确定闭区域阶一周解  $\Gamma$  是凸的, 如果  $P_{x_0} + Q_{y_0} < 0$  成立, 证明  $\Gamma$  是稳定的, 否则是不稳定的。

## 参考文献

- [1] 刘琼. 红松鼠保护的数学模型[J]. 系统科学与数学, 2013, 33(9): 1085-1091.
- [2] 陈兰荪. 害虫治理与半连续动力系统几何理论[J]. 北华大学学报自然科学版, 2011, 12(1): 1-9.
- [3] 陈兰荪, 宋新宇, 陆征一. 数学生态模型与研究方法[M]. 成都: 成都科学技术出版, 2003.
- [4] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法(第二版) [M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [5] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程稳定性与稳定性方法[M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 2015.
- [6] Chen, L.S., Liang, X.Y. and Pei, Y.Z. (2018) The Periodic Solutions of the Impulsive State Feedback Dynamical System. *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, **2018**, Article 14.
- [7] Jiang, G.R. and Luo, G.L. (2003) Impulsive Control of a Stage-Structured Pest Management System. *Journal of Mathematical Study*, **36**, 331-334.
- [8] Jiang, G.R., Lu, Q.S. and Qian, L.N. (2007) Complex Dynamics of a Holling Type II Prey-Predator System with State Feedback Control. *Chaos, Solitons & Fractals*, **31**, 448-461. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.09.077>
- [9] 刘琼. 害虫防治的数学模型[J]. 生物数学学报, 2009, 24(2): 251-259.
- [10] Zhang, M., Song, G.H. and Chen, L.S. (2016) A State Feedback Impulse Model for Computer Worm Control. *Nonlinear Dynamics*, **85**, 1562-1569. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2779-0>
- [11] Liu, Q., Zhang, M. and Chen, L.S. (2019) State Feedback Impulsive Therapy to SIS Model of Animal Infectious Disease. *Physica A*, **516**, 222-232. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.09.161>
- [12] Song, G.H. and Chen, L.S. (2009) Periodic Solution of a Chemostat Model with Monod Growth Rate and Impulsive State Feedback Control. *Journal of Theoretical Biology*, **260**, 502-509. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2009.07.007>
- [13] Tian, Y., Chen, L.S. and Kasperski, A. (2010) Modelling and Simulation of a Continuous Process with Feedback Control and Pulse Feeding. *Computers & Chemical Engineering*, **34**, 976-984. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2009.09.002>
- [14] Zeng, G.Z., Chen, L.S. and Sun, L.H. (2006) Existence of Periodic Solution of Order One of Planar Impulsive Autonomous System. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **186**, 466-481. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.03.003>
- [15] Tang, S. and Cheke, R. (2005) State-Dependent Impulsive Models of Integrated Pest Management (IPM) Strategies and Their Dynamic Consequences. *Journal of Mathematical Biology*, **50**, 257-292.

<https://doi.org/10.1007/s00285-004-0290-6>

- [16] Nie, L., Teng, Z. and Guo, B. (2013) A State Dependent Pulse Control Strategy for a SIRS Epidemic System. *Bulletin of Mathematical Biology*, **75**, 1697-1715. <https://doi.org/10.1007/s11538-013-9865-y>
- [17] Guo, H., Song, X. and Chen, L. (2014) Qualitative Analysis of a Korean Pine Forest Model with Impulsive Thinning Measure. *Applied Mathematics and Computation*, **234**, 203-213. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.02.034>
- [18] Xian, Q. and Dai, B. (2015) Dynamics of an Impulsive Predator-Prey Logistic Population Model with State-Dependent. *Applied Mathematics and Computation*, **259**, 220-230. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.02.061>
- [19] Hui, J. and Zhu, D. (2006) Dynamic Complexities for Prey-Dependent Consumption Integrated Pest Management Models with Impulsive Effects. *Chaos, Solitons & Fractals*, **29**, 233-251. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.08.025>